

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 236



Москва 2024

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 236 (2024)

Дата публикации 10 июня 2024 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. С. Бондарев,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

Н. И. Гусева

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

**СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 236

**МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–XXXV».**

ВОРОНЕЖ, 26–30 АПРЕЛЯ 2024 г.

Часть 2



Москва 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Об одном подходе к сильному решению B -эллиптической краевой задачи и его разностном приближении (<i>О. П. Барабаш</i>)	3
О функционировании ресурсных сетей (<i>Я. М. Ерусалимский, Х. Н. Абдулрахман, В. А. Скороходов, В. А. Бабинцев</i>)	13
Вклад обобщенной техники Бохнера в геометрию полных минимальных подмногообразий (<i>С. Е. Степанов, И. И. Цыганок</i>)	22
Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии шестиэлектронных систем в модели Хаббарда. Четвертое триплетное состояние (<i>С. М. Ташипулатов</i>)	31
Расщепляющее преобразование линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в уравнении медленной переменной (<i>О. Б. Цехан</i>)	49
Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. I. Системы третьего порядка (<i>М. В. Шамолин</i>)	72



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-3-12

УДК 517.9, 519.6

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СИЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ B -ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЕГО РАЗНОСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2024 г. О. П. БАРАБАШ

Аннотация. Работа посвящена построению разностной схемы для краевой задачи с уравнением B -эллиптического типа. Исследование сходимости ведется в весовом пространстве Киприянова. С помощью усредняющих операторов Стеклова выведено интегральное соотношение баланса, которому удовлетворяет точное решение исходной задачи. Получена пятиточечная разностная схема и априорная оценка погрешности.

Ключевые слова: оператор Бесселя, пространства Киприянова, разностная схема, усредняющий оператор Стеклова, сильное решение.

ON STRONG SOLUTIONS OF A B -ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM AND ITS DIFFERENCE APPROXIMATION

© 2024 O. P. BARABASH

ABSTRACT. In this work, a finite-difference scheme for a boundary-value problem for a B -elliptic equation is constructed. The convergence is examined in the Kipriyanov weight space. An integral balance relation for the exact solution of the original problem is obtained by using Steklov averaging operators. A five-point difference scheme and an a priori estimate for the error are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, Kipriyanov spaces, difference scheme, Steklov averaging operator, strong solution.

AMS Subject Classification: 35J25, 35J75

1. Введение. Дискретные методы решения задач математической физики в настоящее время являются чрезвычайно действенными инструментами для исследования многих проблем естествознания. К реализуемым методам предъявляются требования высокой точности, устойчивости и экономичности.

Развитие теории однородных разностных схем, сохраняющих сходимость на разрывных решениях, было положено А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (см. [12]). Для одномерных задач авторами с помощью естественных априорных оценок и представления погрешности аппроксимации в дивергентной форме были получены необходимые и достаточные условия сходимости в классе разрывных коэффициентов.

Для случая многомерных задач с негладкими данными естественно возникает понятие обобщенного решения. При этом ключевое значение приобретает вопрос принадлежности обобщенного решения некоторому классу, например, соболевскому классу W_p^k .

Исходя из того, что обобщенное решение определяется как функция, удовлетворяющая некоторому интегральному тождеству, в 1943 г. Р. Курант изложил метод построения дискретных схем как частный случай минимизации вариационного функционала по методу Ритца (см. [13]).

Следуя вариационной постановке задачи с обобщенным решением, построение разностных схем можно осуществлять с помощью аппроксимации производных конечными разностями в узлах сетки и вычисления интегралов по квадратурным формулам. Этим способом были получены хорошие аппроксимации для многомерных задач с граничными условиями второго и третьего рода (см. [8]).

Классическая трактовка погрешности аппроксимации как невязки, получающейся при подстановке точного решения в разностную схему, и ее оценка с помощью формулы Тейлора в многомерном случае не всегда оказывается эффективной. Требуется использование подходящего обобщения определения погрешности. Так, погрешность аппроксимации представляется в дивергентной форме $B_1 * \eta_1 + B_2 * \eta_2$, где B_α , $\alpha = 1, 2$, — линейные разностные операторы. Например, если A — оператор разностной схемы и $A = A_1 + A_2$, то

$$A_\alpha y = -y_{\bar{x}_\alpha x} \equiv B_\alpha^* B_\alpha y, \quad B_\alpha^* y = -y_{x_\alpha}$$

(см. подробнее [7]). Тогда априорная оценка в энергетической норме $\|y\|_A = (Ay, y)^{1/2}$ выражается через $\|\eta_1\|_{L_2(\omega)} + \|\eta_2\|_{L_2(\omega)}$.

2. Постановка задачи. Рассмотрим в области $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ с границей $\Gamma = \{x_1 = 1, 0 \leq x_2 \leq 1\} \cup \{x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq 1\}$ следующую краевую задачу:

$$Lu = f(x_1, x_2), \quad \gamma > 0, q \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

$$Lu = x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - qu, \quad q \in C(\bar{\Omega}), \quad q \geq 0.$$

Одним из способов введения нормы в пространствах Киприянова (см. [1, 4–6, 10, 14, 15]) является следующая формула (см. [2, 3]):

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\Omega)} = \|u\|_{2,\gamma,\Omega} = \left(\sum_{\substack{0 \leq i_1 + 2i_2 + j \leq 2, \\ i_1 = 0, 1, i_2, j \in \mathbb{Z}_+}} \left\| D_{x_1}^{i_1} B_{x_1}^{i_2} D_{x_2}^j u(x_1, x_2) \right\|_{L_{2,\gamma}}^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \|u\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} = \|u\|_{0,\gamma,\Omega} = \left(\iint_{\Omega} x_1^\gamma u^2 d\Omega \right)^{1/2}.$$

Через $W_{2,\gamma,0}^2$ обозначим пространство функций, которые получаются замыканием в норме (3) функций $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям

$$x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = 0, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Сильным решением задачи (1)–(2) будем называть функцию $u \in W_{2,\gamma,0}^2(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(u, \mu) = l(\mu) \quad \forall \mu \in W_{2,\gamma,0}^2(\Omega), \quad (4)$$

где

$$a(u, \mu) = \iint_{\Omega} x_1^\gamma L(u)L(\mu) d\Omega, \quad l(\mu) = \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2)L(\mu) d\Omega, \quad f \in L_{2,\gamma}(\Omega). \quad (5)$$

Для дальнейшего исследования нам потребуется следующий известный результат.

Теорема 1 (лемма Лакса—Мильграма; см. [9, 11]). Пусть V — гильбертово пространство, билинейная форма $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывна и V -эллиптическая, линейная форма $f : V \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывна. Тогда задача, состоящая в нахождении такого элемента $u \in V$, что

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

имеет единственное решение.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, x_2) \in L_{2,\gamma}(\Omega)$. Тогда сильное решение задачи (1)–(2) существует и единственно.

Доказательство. Проверим выполнение условий леммы Лакса—Мильграма:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \iint_{\Omega} x_1^\gamma [L(u)]^2 d\Omega = \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left[x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - qu \right]^2 d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left[\left(x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + (qu)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - 2x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) qu - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} qu \right] d\Omega. \quad (6) \end{aligned}$$

Рассмотрим четвертое слагаемое:

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} d\Omega &= 2 \int_0^1 \left[x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} - \int_0^1 x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^2 \partial x_1} dx_1 \right] dx_2 = \\ &= 2 \left[x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_1=1, x_2=0}^{x_2=1} - \int_0^1 x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{x_1=1} dx_2 \right] - 2 \int_0^1 x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=1} dx_1 + \\ &\quad + 2 \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 d\Omega. \quad (7) \end{aligned}$$

Для функций $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ первые три слагаемых в (7) равны нулю, поскольку содержат производную по направлению касательной на части границы, где функция равна нулю. Например, при $x_2 = 0$, $x_2 = 1$ имеем $u = 0$, а значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = 0.$$

Аналогично при $x_1 = 1$ выполняется равенство $\partial u / \partial x_2 = 0$. С учетом этих обстоятельств равенство (7) примет вид

$$2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} d\Omega = 2 \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 d\Omega.$$

Для функций $u \in W_{2,\gamma,0}^2(\Omega)$ это равенство получается переходом к пределу в норме $\|\cdot\|_{2,\gamma,0}$.

Кроме того, по теореме Вейерштрасса существует конечное значение $Q = \max_{x \in \bar{\Omega}} q(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} -2 \iint_{\Omega} x_1^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} q u d\Omega &\leq 2Q \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega, \\ -2 \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) q u d\Omega &\leq 2Q \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a(u, u) \leq \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left[\left(x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 + Q^2 u^2 + 2Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + 2Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Сравнивая полученное неравенство с полунормой

$$|u|_{2,\gamma,0}^2 = \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left[\left(x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 \right] d\Omega,$$

получаем, что $a(u, u) \geq |u|_{2,\gamma,0}^2$.

Покажем эквивалентность полунормы $|u|_{2,\gamma,0}$ норме $\|u\|_{2,\gamma,0}$. Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = - \int_{x_1}^1 \frac{\partial^2 u(x_3, x_2)}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3.$$

Умножим обе части на $\sqrt{x_1^\gamma}$, возведем в квадрат и проинтегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega &= \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\int_{x_1}^1 \frac{\partial^2 u(x_3, x_2)}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \right)^2 d\Omega \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left(\int_{x_1}^1 \sqrt{x_3^\gamma} \frac{\partial^2 u(x_3, x_2)}{\partial x_3 \partial x_2} dx_3 \right)^2 d\Omega \leq \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \left(\int_0^1 x_3^\gamma \left(\frac{\partial^2 u(x_3, x_2)}{\partial x_3 \partial x_2} \right)^2 dx_3 \right) dx_2 \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 d\Omega. \quad (8) \end{aligned}$$

Аналогичным образом, интегрируя равенство

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \frac{\partial u(x_1, x_3)}{\partial x_3} dx_3,$$

получим

$$\iint_{\Omega} x_1^\gamma u^2(x_1, x_2) d\Omega = \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\int_0^{x_2} \frac{\partial u(x_1, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \right)^2 d\Omega \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega. \quad (9)$$

Далее рассмотрим соотношение

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(x_1, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} dx_3.$$

Возводя в квадрат обе его части, умножая на x_1^γ и интегрируя по Ω , получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)^2 d\Omega &= \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(x_1, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} dx_3 \right)^2 d\Omega \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\int_0^1 dx_3 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3} \right)^2 dx_3 \right) d\Omega = \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 d\Omega. \quad (10) \end{aligned}$$

С учетом неравенств (8)–(10) будем иметь:

$$a(u, u) \geq \iint_{\Omega} x_1^\gamma \left[\left(x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{4}{3} u^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Убедимся, что выполняется условие $W_{2,\gamma}^2$ -эллиптичности билинейной формы, т.е.

$$a(u, u) \geq \chi \|u\|_{2,\gamma,0}, \quad \chi > 0. \quad (11)$$

Проверим выполнение условия $|l(\mu)| \leq M \|\mu\|_{2,\gamma,0}$ для каждого $\mu \in W_{2,\gamma,0}^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |l(\mu)| &= \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2) \left[x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} - q\mu \right] d\Omega \right| \leq \\ &\leq \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma x_1^{-\gamma} f(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) d\Omega \right| + \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} d\Omega \right| + Q \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2) \mu d\Omega \right|. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma x_1^{-\gamma} f(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) d\Omega \right| &\leq \\ &\leq \left(\iint_{\Omega} x_1^\gamma f^2(x_1, x_2) d\Omega \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|f\|_{L_{2,\gamma}} \|\mu\|_{2,\gamma,0} = M_1 \|\mu\|_{2,\gamma,0}. \end{aligned}$$

Для второго:

$$\left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} d\Omega \right| \leq \left(\iint_{\Omega} x_1^\gamma f^2(x_1, x_2) d\Omega \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} x_1^\gamma \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq M_2 \|\mu\|_{2,\gamma,0}.$$

Для третьего слагаемого справедлива оценка:

$$Q \left| \iint_{\Omega} x_1^\gamma f(x_1, x_2) \mu d\Omega \right| \leq M_3 \|\mu\|_{2,\gamma,0}.$$

Суммируя полученные оценки, приходим к неравенству

$$|l(\mu)| \leq M \|\mu\|_{2,\gamma,0} \quad \forall \mu \in W_{2,\gamma,0}^2. \quad (12)$$

Аналогично доказывается третье условие леммы Лакса–Мильграма

$$|a(u, \mu)| \leq \widetilde{M} \|u\|_{2,\gamma,0} \|\mu\|_{2,\gamma,0} \quad \forall u, \mu \in W_{2,\gamma,0}^2.$$

Таким образом, все условия леммы Лакса–Мильграма выполнены, что и доказывает теорему. \square

3. Построение разностной схемы. Априорная оценка. На замыкании области Ω введем сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{x_1} \times \bar{\omega}_{x_2}$:

$$\bar{\omega}_{x_1} = \left\{ x_{1,i} = \left(i - \frac{1}{2} \right) h_1, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad \left(N_1 - \frac{1}{2} \right) h_1 = 1 \right\},$$

$$\bar{\omega}_{x_2} = \left\{ x_{2,j} = j h_2, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad h_2 = \frac{1}{N_2} \right\}.$$

Обозначим через ω и σ соответственно множества внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$ и узлов, лежащих на границе Γ .

Скалярное произведение и норма на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе, задаются следующим образом:

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega} y(x)v(x)h_1h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}. \quad (13)$$

Следуя обозначениям [9], запишем разностные отношения по формулам:

$$y^{(\pm 1_i)} = y^{(\pm 1_i)}(x) = y(x_1, \dots, x_i \pm h_i, \dots, x_n),$$

$$y_{\bar{x}_i} = y_{\bar{x}_i}(x) = \frac{y - y^{(-1_i)}}{h_i}, \quad y_{x_i} = y_{x_i}(x) = \frac{y^{(+1_i)} - y}{h_i},$$

$$y_{\bar{x}_i x_i} = y_{\bar{x}_i x_i}(x) = \frac{y^{(+1_i)} - 2y + y^{(-1_i)}}{h_i^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Примем функцию $\mu(x)$ из равенства (4) такой, чтобы она удовлетворяла равенству

$$x_1^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_2^2} - q\mu = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in e, \\ 0, & (x_1, x_2) \in \Omega \setminus e, \end{cases}$$

где

$$e = \left\{ (\xi_1, \xi_2) : |\xi_1 - x_1| < \frac{h_1}{2}, \quad |\xi_2 - x_2| < \frac{h_2}{2} \right\}.$$

С учетом выбранного μ запишем (4):

$$\frac{1}{h_1 h_2} \iint_e \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + x_1^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - x_1^\gamma q u \right] dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_e f(x_1, x_2) x_1^\gamma dx_1 dx_2.$$

Рассмотрим первое слагаемое полученного выражения:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \iint_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} \xi^\gamma \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{x - \frac{h_1}{2}}^{x + \frac{h_1}{2}} d\tau,$$

$$\left[S_2 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right]_{x_1}^{-0,5_1} =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} \left[\left(x_1 + \frac{h_1}{2} \right)^\gamma \frac{\partial u(x_1 + h_1/2, \tau)}{\partial x_1} - \left(x - \frac{h_1}{2} \right)^\gamma \frac{\partial u(x_1 - h_1/2, \tau)}{\partial x_1} \right] d\tau.$$

Для второго слагаемого:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \iint_e x_1^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \xi^\gamma \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} d\xi,$$

$$\left[S_1 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)^{-0,5_2} \right]_{x_2} = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} \left[\xi^\gamma \frac{\partial u(\xi, x_2 + 1/h_2)}{\partial x_2} - \xi^\gamma \frac{\partial u(\xi, x_2 - 1/h_2)}{\partial x_2} \right] d\xi.$$

Для третьего:

$$-S_1 S_2 \left(x_1^\gamma q(x_1, x_2) u(x_1, x_2) \right) = -\frac{1}{h_1 h_2} \iint_e \xi^\gamma q(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Теперь рассматриваемое равенство (4) запишется в виде

$$\left[S_2 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^{-0,5_1} \right]_{x_1} + \left[S_1 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^{-0,5_2} \right]_{x_2} - S_1 S_2 (x_1^\gamma q u) = S_1 S_2 (x_1^\gamma f), \quad (14)$$

где S_1 и S_2 — усредняющие операторы Стеклова по переменным x_1 и x_2 соответственно, определенные формулой

$$S_i u(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_i - 0,5h_i}^{x_i + 0,5h_i} u(x_1, \dots, \xi_i, \dots, x_n) d\xi_i.$$

Далее в последнем интегральном тождестве заменим производные конечно-разностными соотношениями, интегралы — квадратурной формулой прямоугольников. По первой переменной произведем аппроксимацию производной центрально-разностным соотношением

$$S_2 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^{-0,5_1} \cong S_2 \left(x_1^\gamma \frac{u(x_1 + 0,5h_1, \xi_2) - u(x_1 - 0,5h_1, \xi_2)}{h_1} \right)^{-0,5_1} =$$

$$= \frac{1}{h_2} \int_{x_2 - 0,5h_2}^{x_2 + 0,5h_2} (x_1 - 0,5h_1)^\gamma \frac{u(x_1, \xi_2) - u(x_1 - h_1, \xi_2)}{h_1} d\xi_2 \cong (x_1 - 0,5h_1)^\gamma y_{\bar{x}_1}.$$

Аналогичные действия произведем по второй переменной:

$$S_1 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^{-0,5_2} \cong S_1 \left(\xi_1^\gamma \frac{u(\xi_1, x_2 + 0,5h_2) - u(\xi_1, x_2 - 0,5h_2)}{h_2} \right)^{-0,5_2} =$$

$$= \frac{1}{h_1} \int_{x_1 - 0,5h_1}^{x_1 + 0,5h_1} \xi_1^\gamma \frac{u(\xi_1, x_2) - u(\xi_1, x_2 - h_2)}{h_2} d\xi_1 \cong x_1^\gamma y_{\bar{x}_2}.$$

В результате приходим к следующей разностной схеме для приближенного решения $y(x_1, x_2)$:

$$\Lambda y \equiv ((x_1 - 0,5h_1)^\gamma y_{\bar{x}_1})_{x_1} + x_1^\gamma y_{\bar{x}_2 x_2} - q x_1^\gamma y =$$

$$= S_1 S_2 (x_1^\gamma f(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad (15)$$

$$y(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \sigma.$$

Пусть $v = y - u$, где y — решение полученное с помощью схемы (15), u — сильное решение задачи (1)–(2). Разность v будем называть погрешностью решения. Тогда

$$\Lambda v = \Lambda y - \Lambda u = S_1 S_2 (x_1^\gamma f(x_1, x_2)) - \Lambda u = \psi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

$$v(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \sigma. \quad (16)$$

Представим погрешность аппроксимации ψ в следующем виде:

$$\psi(x_1, x_2) = -\eta_1 x_1 - \eta_2 x_2 + \eta_3,$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (x_1 - 0,5h_1)^\gamma u_{\bar{x}_1} - S_2 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^{-0,5_1}, \\ \eta_2 &= x_1^\gamma u_{\bar{x}_2} - S_1 \left(x_1^\gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^{-0,5_2}, \quad \eta_3 = x_1^\gamma q u - S_1 S_2 (x_1^\gamma q u). \end{aligned}$$

Применим скалярное умножение (13) на v к (16). Затем используем первую разностную формулу Грина для функции равной нулю в граничных точках:

$$(v_{\bar{x}_i x_i}, v) = -(v_{\bar{x}_i}, v_{\bar{x}_i}]_i = -\|v_{\bar{x}_i}\|_i^2,$$

где

$$\begin{aligned} (\omega, v]_1 &= \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \omega(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2, \\ (\omega, v]_2 &= \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \omega(i_1 h_1, i_2 h_2) v(i_1 h_1, i_2 h_2) h_1 h_2. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} &\left(\left((x_1 - 0,5h_1)^\gamma v_{\bar{x}_1} \right)_{x_1}, v \right) + (x_1^\gamma v_{\bar{x}_2 x_2}, v) - (x_1^\gamma q v, v) = \\ &= -\left((x_1 - 0,5h_1)^\gamma v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1} \right]_1 - \left(x_1^\gamma v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2} \right]_2 - (x_1^\gamma q v, v) = \\ &= (\psi, v) = (\eta_1, v_{\bar{x}_1}]_1 + (\eta_2, v_{\bar{x}_2}]_2 + (\eta_3, v). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение следующую норму:

$$\|\Xi y\|_{0,\gamma,\omega} = \left\{ \left((x_1 - 0,5h_1)^\gamma y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_1} \right]_1 + \left(x_1^\gamma y_{\bar{x}_2}, y_{\bar{x}_2} \right]_2 + (x_1^\gamma q y, y) \right\}^{1/2}.$$

С учетом неравенства Коши–Буняковского получим:

$$\begin{aligned} \|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega}^2 &\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{(x_1 - 0,5h_1)^\gamma}} \eta_1 \right\|_1 \left\| \sqrt{(x_1 - 0,5h_1)^\gamma} v_{\bar{x}_1} \right\|_1 + \\ &+ \left\| \frac{1}{\sqrt{x_1^\gamma}} \eta_2 \right\|_2 \left\| \sqrt{x_1^\gamma} v_{\bar{x}_2} \right\|_2 + \|\eta_3\| \|v\|. \quad (17) \end{aligned}$$

Оценим множители, входящие в правую часть (17):

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{(x_1 - 0,5h_1)^\gamma} v_{\bar{x}_1} \right\|_1 &= \sqrt{\left((x_1 - 0,5h_1)^\gamma v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1} \right]_1} \leq \|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega}, \\ \left\| \sqrt{x_1^\gamma} v_{\bar{x}_2} \right\|_2 &= \sqrt{\left(x_1^\gamma v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2} \right]_2} \leq \|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega}. \end{aligned}$$

Для оценки $\|v\|$ рассмотрим равенство

$$v_{\bar{\xi}_2} = \frac{v(x_1, \xi_2) - v(x_1, \xi_2 - h_2)}{h_2},$$

$$\begin{aligned} \sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 v_{\bar{\xi}_2}(x_1, \xi_2) &= v(x_1, h_2) - v(x_1, 0) + v(x_1, 2h_2) - v(x_1, h_2) + v(x_1, 3h_2) - v(x_1, 2h_2) + \\ &+ \dots + v(x_1, x_2 - h_2) - v(x_1, x_2 - 2h_2) + v(x_1, x_2) - v(x_1, x_2 - h_2) = v(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Умножим равенство

$$v(x_1, x_2) = \sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} h_2 v_{\xi_2}(x_1, \xi_2)$$

на $\sqrt{x_1^\gamma h_1 h_2}$, возведем в квадрат и просуммируем по сетке ω :

$$h_1 h_2 \sum_{\omega} x_1^\gamma v^2(x_1, x_2) = \|v\|_{0,\gamma,\omega}^2 = \sum_{\omega} x_1^\gamma h_1 h_2 h_2^2 \left(\sum_{\xi_2=h_2}^{x_2} v_{\xi_2}(x_1, \xi_2) \right)^2. \quad (18)$$

Принимая во внимание неравенство $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$, а также тот факт, что $h_2 N_2 = 1$, перепишем (18) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,\gamma,\omega}^2 &\leq \sum_{\omega} x_1^\gamma h_2^2 N_2 \sum_{\omega_2} v_{\xi_2}^2(x_1, \xi_2) h_1 h_2 = \sum_{\omega} x_1^\gamma h_1 h_2^2 \sum_{\xi_2 \in \omega_2} v_{\xi_2}^2(x_1, \xi_2) = \\ &= \sum_{x_1 \in \omega_1} x_1^\gamma h_1 \sum_{x_2 \in \omega_2} h_2 \sum_{\xi_2 \in \omega_2} v_{\xi_2}^2(x_1, \xi_2) h_2 \leq 2 \sum_{x_1 \in \omega_1} x_1^\gamma h_1 \sum_{\xi_2 \in \omega_2} v_{\xi_2}^2(x_1, \xi_2) h_2 = \\ &= 2 \left\| \sqrt{x_1^\gamma} v_{\xi_2} \right\|^2 \leq C \|\Xi v\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Разностная схема (16) имеет единственное решение, являющееся устойчивым по правой части. При этом выполнена априорная оценка*

$$\|\Xi v\|_{0,\gamma,\omega} \leq \left\| \left[\frac{1}{\sqrt{(x - 0,5h_1)^\gamma}} \eta_1 \right] \right\|_1 + \left\| \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^\gamma}} \eta_2 \right] \right\|_2 + \|\eta_3\| C. \quad (19)$$

4. Заключение. Обсуждаемый в статье подход построения и исследования разностной схемы для эллиптической задачи имеет важные особенности, а именно: 1) представление погрешности аппроксимации согласовано через оператор разностной схемы с нормой, в которой получена оценка; 2) составляющие погрешности аппроксимации η_1 и η_2 оцениваются на обобщенных решениях, имеющих определенную гладкость, которая выражается в их принадлежности пространству Киприянова $W_{2,\gamma}^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426.
2. Катрахова А. А. Формула Тейлора с оператором Бесселя // в кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Ин-т мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 1981. — С. 96–97.
3. Катрахова А. А. Сингулярные краевые задачи и приближенные методы их решения / дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж, 1982.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. Киприянов И. А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1967. — 89. — С. 130–213.
6. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
8. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
9. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высшая школа, 1987.
10. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
11. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.

12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Об однородных разностных схемах// Докл. АН СССР. — 1958. — 122, № 4. — С. 562–565.
13. *Courant R.* Variational methods for solution of problems of equilibrium and vibration// Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — 49. — P. 1–13.
14. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equations. — 2001. — 8, № 3. — P. 353–363.
15. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. — London: Academic Press, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барабаш Ольга Павловна (Barabash Olga Pavlovna)

Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия

имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center “Air Force Academy
named after Professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin,” Voronezh, Russia)

E-mail: navyS9@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 13–21
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-13-21

УДК 519.16, 519.17

О ФУНКЦИОНИРОВАНИИ РЕСУРСНЫХ СЕТЕЙ

© 2024 г. Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, Х. Н. АБДУЛРАХМАН,
В. А. СКОРОХОДОВ, В. А. БАБИНЦЕВ

Аннотация. Ресурсные сети — динамические графовые модели, введенные в рассмотрение О. П. Кузнецовым и Л. Ю. Жилияковой. В основе модели лежат правила их функционирования. В работе предложен общий подход к определению функционирования ресурсных сетей, состоящий в задании на дугах ресурсной сети функции приоритетности, которая и определяет правила функционирования ресурсной сети. Ресурсные сети Кузнецова—Жилияковой являются частным случаем ресурсных сетей с приоритетами на дугах, когда все дуги имеют одинаковые приоритеты. Приведены примеры, показывающие, что ресурсные сети, имеющие одинаковую топологию, при разных функциях приоритетности функционируют по-разному. Получены критерии возникновения стационарного функционирования ресурсной сети с приоритетами на дугах, главным из которых является условие сбалансированности потока. Наиболее общим расширением понятия ресурсной сети является приведенное в работе определение ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. В этом случае функция приоритетности, заданная на дугах сети, зависит от дискретного времени, в котором функционирует сеть.

Ключевые слова: граф, ресурсная сеть, распределение ресурса, поток, приоритеты на дугах.

ON FUNCTIONING OF RESOURCE NETWORKS

© 2024 I. M. ERUSALIMSKIY, H. N. ABDULRAHMAN,
V. A. SKOROKHODOV, V. A. BABINTSEV

ABSTRACT. Resource networks are dynamic graph models introduced by O. P. Kuznetsov and L. Yu. Zhilyakova. These models are based on their functioning rules. The paper proposes a general approach to determining the functioning of resource networks, which consists of specifying a priority function on arcs of the resource network. Such a function determines the rules for the functioning of the resource network. Kuznetsov–Zhilyakova resource networks are a special case of resource networks with priorities on the arcs, where all arcs have the same priorities. We show by examples that resource networks of the same topology with different priority functions operates differently. Criteria for the emergence of stationary functioning of a resource network with priorities on arcs are obtained; the main criterion is the condition of flow balance. Also, we propose a more general extension of the concept of a resource network, namely, the definition of a resource network with dynamic priorities on arcs. In this case, the priority function specified on the network arcs is a function of discrete time in which the network operates.

Keywords and phrases: graph, resource network, resource allocation, flow, priorities on arcs.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C85, 90B10

Ресурсные сети — новые динамические сетевые модели, введенные в рассмотрение О. П. Кузнецовым и Л. Ю. Жилияковой (см., например, [2–8]). Настоящая статья посвящена расширению понятия ресурсной сети. Речь пойдет об общем определении ресурсной сети, при этом ресурсные сети Кузнецова—Жилияковой будут частным случаем ресурсных сетей.

1. Ресурсные сети с приоритетами на дугах. К сожалению, определение ресурсной сети с приоритетами на дугах довольно громоздко, как и определение ресурсной сети по Кузнецову—Жилияковой.

Определение 1. Ресурсной сетью $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$ с приоритетами на дугах будем называть конечный связный ориентированный граф без петель (здесь X — множество вершин сети, U — множество дуг сети, $f : U \rightarrow X \times X$ — отображение инцидентности, ставящее в соответствие каждой дуге упорядоченную пару вершин (начало и конец дуги), $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ — отображение, задающее пропускные способности дуг сети, $\text{pr} : U \rightarrow N$ — отображение приоритетности (считается, что чем меньше значение $\text{pr}(u)$ на дуге $u \in U$, тем приоритет этой дуги выше), с заданными правилами функционирования, которые сформулируем в определении 2.

Определение 2 (правила функционирования). Ресурсная сеть $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$ функционирует в дискретном времени \mathbb{Z}_+ , т.е. на множестве неотрицательных целых чисел. Множество \mathbb{Z}_+ представим в виде объединения множеств $\mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ четных и $\mathbb{Z}_{+\text{нечет}}$ нечетных чисел. Функционирование ресурсной сети на \mathbb{Z}_+ определяется двумя рекурсивными функциями

$$q(x, t) : X \times \mathbb{Z}_{+\text{чет}} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0; +\infty), \quad \varphi(u, t) : U \times \mathbb{Z}_{+\text{нечет}} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$$

называемыми соответственно распределением ресурса в вершинах сети и потоком ресурса на дугах сети.

Эти функции определены следующими условиями (a)–(c):

- (a) Задается начальное распределение ресурса в вершинах сети, т.е. неотрицательные значения функции $q(x, 0)$ на множестве X .
- (b) Каждое из множеств $U_+(x) = f^{-1}(\{x\} \times X)$ представим в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств $(U_+(x))_i$, $i = 1, 2, \dots, k_x$, $k_x = \max_{u \in U_+(x)} \text{pr}(u)$, отнеся ко множеству $(U_+(x))_1$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие наивысший приоритет, ко множеству $(U_+(x))_2$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие следующее возможное значение приоритета и т. д. Для каждого из множеств $(U_+(x))_i$ определим величину

$$(W(x))_i = \sum_{u \in (U_+(x))_i} \rho(u).$$

Значения потоковой функции $\varphi(u, t)$ в момент времени $t = 2n + 1$ в множестве $U_+(x)$ определяются индуктивно по множествам $(U_+(x))_i$ в соответствии со следующим алгоритмом:

- (i) Полагаем $S = q(x, 2n)$. Если $S \leq (W(x))_1$, то

$$\varphi(u, 2n + 1) = \frac{\rho(u)}{\sum_{v \in (U_+(x))_1} \rho(v)} \cdot q(x, 2n) \quad \forall u \in (U_+(x))_1,$$

а поток на дугах остальных множеств $(U_+(x))_i$, $i = 2, \dots, k_x$, полагаем равным нулю. На этом определение потока $\varphi(u, 2n + 1)$ на множестве $U_+(x)$ завершено.

- (ii) В противном случае полагаем

$$\varphi(u, 2n + 1) = \rho(u) \quad \forall u \in (U_+(x))_1, \quad S = q(x, 2n) - \sum_{u \in (U_+(x))_1} \varphi(u, 2n + 1),$$

и переходим к определению потока на множестве $(U_+(x))_2$ по правилу, описанному в п. (bi) и т. д.

(с) Значение функции $q(x, t)$ в момент времени $t = 2n + 2$ в каждой вершине $x \in X$ определяется её значением в момент времени $t = 2n$ и потоком на дугах в момент времени $t = 2n + 1$ следующим правилом:

$$q(x, 2n + 2) = q(x, 2n) - \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, 2n + 1) + \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, 2n + 1). \quad (1)$$

Общее определение ресурсной сети, которое состоит из двух определений 1 и 2, завершено.

Ясно, что функционирование ресурсной сети на \mathbb{Z}_+ однозначно определяется начальным распределением ресурса в вершинах сети, т.е. $q(x, 0)$ для любого $x \in X$. Равенство 1 называют балансовым соотношением; оно, в частности, означает, что ресурс во время функционирования сети не поступает в сеть и не расходуется в ней, т.е.

$$\sum_{x \in X} q(x, 0) = \sum_{x \in X} q(x, 2n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Из определения ресурсной сети (определение 1(b) следует, что

$$0 \leq \varphi(u, 2n + 1) \leq \rho(u) \quad \forall u \in U, \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Неравенство (3) означает, поток по любой дуге ресурсной сети в любой момент времени не превосходит её пропускной способности, что позволяет говорить о том, что ресурсная сеть является динамической сетевой моделью.

Ресурсные сети Кузнецова—Жиляковой (см. [7]) являются частным случаем ресурсных сетей, когда все дуги имеют одинаковый приоритет.

Приведем три примера ресурсных сетей. В качестве основы для рассматриваемых ресурсных сетей возьмем один и тот же граф, приведенный на рис. 1. Пропускные способности всех дуг (I–V) полагаем равными 8.

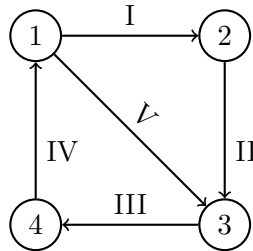


Рис. 1. Граф ресурсной сети примеров 1-3.

Пример 1. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2, 2, 2, 2)$ как сети Кузнецова—Жиляковой (все дуги имеют одинаковый приоритет). Результаты, полученные с помощью описанной в [6] программы и приведенные в таблице 1, показывают, что довольно простая ресурсная сеть по Кузнецову—Жиляковой функционирует довольно «прихотливо».

Пример 2. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2, 2, 2, 2)$ в случае, когда дуга I имеет более высокий приоритет, чем все остальные дуги. Ясно, что в этом случае поток по дуге V в любой момент времени равен нулю. Функционирование такой ресурсной сети приведено в таблице 2, из которой видно, что начальное распределение ресурса $(2, 2, 2, 2)$ порождает стационарное функционирование сети.

Пример 3. Рассмотрим функционирование ресурсной сети с начальным распределением ресурса $(2, 2, 2, 2)$ в случае, когда дуга V имеет более высокий приоритет, чем все остальные дуги. Ясно, что в этом случае поток по дуге I в любой момент времени равен нулю. Функционирование такой ресурсной сети приведено в таблице 3, из которой видно, что начальное распределение ресурса $(2, 2, 2, 2)$ порождает её периодическое функционирование, начиная с $t = 2$.

Таблица 1. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса (2, 2, 2, 2) без учёта приоритетов дуг (пример 1).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					1	2	2	2	1
2	2	1	3	2					
3					1	1	3	2	1
4	2	1	2	3					
5					1	1	2	3	1
6	3	1	2	2					
7					1,5	1	2	2	1,5
8	2	1,5	2	2,5					
9					1	1,5	2	2,5	1
10	2	1	2,5	2,5					
11					1	1	2,5	2,5	1
12	2,5	1	2	2,5					
13					1,25	1	2	2,5	1,25
14	2,5	1,25	2,25	2					
15					1,25	1,25	2,25	2	1,25
16	2	1,25	2,5	2,25					
17					1	1,25	2,5	2,25	1
18	2,25	1	2,25	2,5					
19					1,125	1	2,25	2,5	1,125
20	2,5	1,125	2,125	2,25					
21					1,25	1,125	2,125	2,25	1,25
22	2,25	1,25	2,375	2,125					
23					1,125	1,25	2,375	2,125	1,125
24	2,125	1,125	2,375	2,375					
25					1,0625	1,125	2,375	2,375	1,0625
26	2,375	1,0625	2,1875	2,375					
27					1,1875	1,0625	2,1875	2,375	1,1875
28	2,375	1,1875	2,25	2,1875					
29					1,1875	1,1875	2,25	2,1875	1,1875
30	2,1875	1,1875	2,375	2,25					

Для заполнения таблиц 2 и 3 использована программа, составленная В. А. Бабинцевым, которая в отличие от [9] рассчитана на ресурсные сети, рассмотренные в этой работе, т.е. с приоритетами на дугах.

Начальное состояние ресурсной сети, однозначно определяющее вместе с топологией графа и пропускными способностями дуг функционирование ресурсной сети, было названо в [11] состоянием, ведущим к стационарному функционированию сети, если начиная с какого-то момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+чет}$ имеет место равенство

$$q(x, T_0) = q(x, T_0 + 2) = q(x, T_0 + 4) = \dots \quad \forall x \in X. \quad (4)$$

Из определения потока в ресурсной сети с приоритетами на дугах следует, что с момента $T_0 + 1$ поток тоже стационарен, т.е.

$$\varphi(u, T_0 + 1) = \varphi(u, T_0 + 3) = \varphi(u, T_0 + 5) = \dots \quad \forall u \in U. \quad (5)$$

Таблица 2. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса (2, 2, 2, 2) в случае, когда дуга I имеет более высокий приоритет (пример 2).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					2	2	2	2	0
4	2	2	2	2					
5					2	2	2	2	0
6	2	2	2	2					
7					2	2	2	2	0
8	2	2	2	2					
9					2	2	2	2	0
10	2	2	2	2					
11					2	2	2	2	0
12	2	2	2	2					

Таблица 3. Функционирование ресурсной сети (рис. 1) с начальным распределением ресурса (2, 2, 2, 2) в случае, когда дуга V имеет более высокий приоритет (пример 3).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
	2	2	2	2					
1					0	2	2	2	2
2	2	0	4	2					
3					0	0	4	2	2
4	4	0	2	2					
5					0	0	2	4	2
6	4	0	2	2					
7					0	0	2	2	4
8	2	0	4	2					
9					0	0	4	2	2
10	2	0	2	4					
11					0	0	2	4	2
12	4	0	2	2					
13					0	0	2	2	4
14	2	0	4	2					
15					0	0	4	2	2

При этом в каждой вершине сети для потока выполнено равенство

$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, t) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, t) \quad \forall x \in X, \forall t \in \mathbb{Z}_{+\text{нечет}}, t \geq T_0 + 1. \quad (6)$$

Равенство (6) выглядит аналогично условию неразрывности потока в любой промежуточной вершине классической по Форду—Фалкерсону сети (см. [10]).

В [11] были получены два критерия стационарного функционирования ресурсной по Кузнецову—Жиляковой (КЖ) сети, состоящие в следующем.

Критерий 1. Ресурсная сеть КЖ функционирует стационарно с момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, т.е. с выполнением (4) и (5), тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$q(x, T_0) = q(x, T_0 + 2) = \dots \quad \forall x \in X. \quad (7)$$

Критерий 2. Ресурсная сеть КЖ функционирует стационарно с момента времени $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, т.е. с выполнением (4) и (5), тогда и только тогда, когда для потока на дугах сети в момент времени $T_0 + 1$ выполнено равенство

$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u, T_0 + 1) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u, T_0 + 1) \quad \forall x \in X. \quad (8)$$

Проанализировав доказательство этих критериев, легко понять, что они справедливы и для ресурсных сетей с приоритетами на дугах.

Определение 3. Поток $\varphi(u, t)$, $u \in U$, $t \in \mathbb{Z}_{+\text{нечет}}$, в ресурсной сети $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$, порожденный некоторым начальным распределением ресурса, будем называть сбалансированным в момент времени t_0 , если для него в этот момент времени во всех вершинах сети выполнено равенство (6).

Как уже отмечалось, выполнение равенства (6) для потока в ресурсной сети в момент времени t_0 является необходимым и достаточным условием того, что ресурсная сеть вышла в своем функционировании на стационарный режим; значит, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если поток в сети сбалансирован в какой-либо момент времени t_0 , то он сбалансирован и в любой момент времени $t \geq t_0$, $t \in \mathbb{Z}_{+\text{нечет}}$.

Определение 4. Рассмотрим ресурсную сеть $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$ и её функционирование, порожденное некоторым начальным распределением ресурса. Говорят, что функционирование выходит на периодический режим, если существуют такие $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ и $L \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, $L > 2$, что выполнены условия

$$(x, t) = q(x, t + L) = q(x, t + 2L) = \dots \quad \forall x \in X, \forall t \geq T_0, t \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}, \quad (9)$$

$$q(x, t) \neq q(x, t + 2) \neq \dots \neq q(x, t + L - 2). \quad (10)$$

Для ресурсных сетей с приоритетами на дугах справедлив следующий критерий выхода на периодический режим.

Теорема 2 (критерий выхода на периодический режим). Для того чтобы функционирование ресурсной сети $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$, порожденное некоторым начальным распределением ресурса, выходило на периодический режим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $T_0 \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$ и $L \in \mathbb{Z}_{+\text{чет}}$, $L > 2$, для которых выполнено два условия:

- (I) $q(x, T_0) = q(x, T_0 + L)$ для всех $x \in X$;
- (II) поток $\varphi(u, t)$ не является сбалансированным ни в один из моментов времени на отрезке $[T_0 + 1, L - 1]_{\mathbb{Z}_{+\text{нечет}}}$.

Ясно, что условие (II) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10) определения 4. Ясно, что в случае выхода ресурсной сети на периодический режим функционирования не только распределение ресурса, но и поток периодичен, т.е. удовлетворяет условиям аналогичным условию периодичности распределения ресурса (определение 3).

2. Ресурсные сети с динамическими приоритетами на дугах. Рассмотренные примеры 2 и 3 показывают, что при одном и том же начальном распределении ресурса, на одном и том же графе сети с разными приоритетами функционируют совершенно по-разному (пример 2 — стационарно, пример 3 — периодически). В этом разделе введем понятие ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. Поскольку определение ресурсной сети с приоритетами на дугах достаточно громоздко (ср. определения 1 и 2), ограничимся только необходимыми изменениями, которые следует в них внести, чтобы получить определение ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах.

Таблица 4. Функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (пример 4).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					0	2	2	2	2
4	2	0	4	2					
5					2	0	4	2	0
6	2	2	0	4					
7					0	2	0	4	2
8	4	0	4	0					
9					4	0	4	0	0
10	0	4	0	4					
11					0	4	0	4	0
12	4	0	4	0					
13					4	0	4	0	0
14	0	4	0	4					

В определении 1 отображение $G(X, U, f, \rho, \text{pr})$ заменяется на отображение приоритетности $G(X, U, f, \rho, \text{Pr})$, где $\text{Pr} : U \times \mathbb{Z}_{+\text{нечет}} \rightarrow N$ (считается, что чем меньше значение $\text{Pr}(u, t)$ на дуге $u \in U$, тем приоритет этой дуги в момент времени t выше в сравнении с другими дугами в этот же момент времени).

Наиболее существенно меняется в этом случае пункт (b) определения 2. Он заменяется на следующее условие:

(b') Каждое из множеств $U_+(x) = f^{-1}(\{x\} \times X)$ представим в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств $(U_+(x, t))_i, i = 1, 2, \dots, k_x, k_x = \max_{u \in U_+(x)} \text{Pr}(u, t)$, отнеся ко мно-

жеству $(U_+(x, t))_1$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие наивысший приоритет в момент времени t , ко множеству $((U_+(x, t))_2) -$ все дуги из $U_+(x)$, имеющие следующее возможное значение приоритета в момент времени t и т. д. Для каждого из множеств $(U_+(x, t))_i$ определим величину $(W(x, t))_i = \sum_{u \in (U_+(x, t))_i} \rho(x)$. Значения потоковой функции $\varphi(u, t)$ в момент времени t

на множестве $U_+(x)$ определяются индуктивно по множествам $(U_+(x, t))_i$ в соответствии со следующим алгоритмом:

(iii) Полагаем $S = q(x, t - 1)$. Если $S \leq (W(x, t))_1$, то

$$\varphi(u, t) = \frac{\rho(u)}{\sum_{v \in (U_+(x))_1} \rho(v)} \cdot q(x, t - 1) \quad \forall u \in (U_+(x, t))_1,$$

а поток на дугах остальных множеств $(U_+(x, t))_i, i = 2, \dots, k_x$, полагаем равным нулю. На этом определение потока $\varphi(u, t)$ на множестве $U_+(x)$ завершено.

(iv) В противном случае полагаем

$$\varphi(u, t) = \rho(u) \quad \forall u \in (U_+(x, t))_1, \quad S = q(x, t - 1) - \sum_{u \in (U_+(x))_1} \varphi(u, t)$$

и переходим к определению потока на множестве $(U_+(x, t))_2$ по правилу, описанному в п. (bi) и т. д.

Пример 4. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 1, считая, что пропускные способности всех дуг равны 8. Динамические приоритеты дуг определены следующим образом: при $t = 1$

Таблица 5. Функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (пример 5).

Время	Ресурс в вершинах				Поток на дугах сети				
	Вершины				Дуги				
	«1»	«2»	«3»	«4»	«I»	«II»	«III»	«IV»	«V»
0	2	2	2	2					
1					2	2	2	2	0
2	2	2	2	2					
3					0	2	2	2	2
4	2	0	4	2					
5					1	0	4	2	1
6	2	1	1	4					
7					2	1	1	4	0
8	4	2	1	1					
9					0	2	1	1	4
10	1	0	6	1					
11					0,5	0	6	1	0,5
12	1	0,5	0,5	6					
13					1	0,5	0,5	6	0
14	6	1	0,5	0,5					
15					0	1	0,5	0,5	6
16	0,5	0	7	0,5					
17					0,25	0	7	0,5	0,25
18	0,5	0,25	0,25	7					
19					0,5	0,25	0,25	7	0
20	7	0,5	0,25	0,25					
21					0	0,5	0,25	0,25	7
22	0,25	0	7,5	0,25					
23					0,125	0	7,5	0,25	0,125
24	0,25	0,125	0,125	7,5					
25					0,25	0,125	0,125	7,5	0
26	7,5	0,25	0,125	0,125					
27					0	0,25	0,125	0,125	7,5
28	0,125	0	7,75	0,125					
29					0,0625	0	7,75	0,125	0,0625

наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 3$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 5$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 7$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше и т. д.

Зададим начальное распределение ресурса в вершинах $(2, 2, 2, 2)$ и рассмотрим функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах. Как видно из таблицы 4, эта ресурсная сеть с начального распределения ресурса $(2, 2, 2, 2)$ выходит начиная с $t = 8$ на периодическое функционирование (но не такое, как в примере 3).

Пример 5. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 1, считая, что пропускные способности всех дуг равны 8. Динамические приоритеты дуг определены следующим образом: при $t = 1$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 3$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 5$ приоритет всех дуг одинаковые (т.е. ресурсы распределяются, как в сети Кузнецова—Жилияковой), а потом повторяется процесс, т.е. при $t = 7$ наивысший приоритет имеет дуга I, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 9$ наивысший приоритет имеет дуга V, приоритет остальных дуг меньше; при $t = 11$ приоритет всех дуг одинаковые (КЖ) и т. д.

Зададим начальное распределение ресурса в вершинах $(2, 2, 2, 2)$, и рассмотрим функционирование ресурсной сети с динамическими приоритетами на дугах (таблица 5). Результаты, полученные в [1, 11] для ресурсных сетей Кузнецова—Жиляковой справедливы и для ресурсных сетей с заданными приоритетами на дугах (определения 1, 2 настоящей работы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдулрахман Х. Н., Ерусалимский Я. М.* О реализуемости потоков в классических сетях потоками в ресурсных сетях// Вестн. Дагестан. гос. ун-та. Сер. 1: Естеств. науки. — 2023. — 38, № 3. — С. 7–17.
2. *Жилякова Л. Ю.* Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах// Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
3. *Жилякова Л. Ю.* Полные несимметричные ресурсные сети. Случай одного приемника// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 4 (164). — С. 14–18.
4. *Жилякова Л. Ю.* Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях// Пробл. управл. — 2013. — № 3. — С. 51–59.
5. *Жилякова Л. Ю.* Графовые динамические модели и их свойства// Автомат. телемех. — 2015. — № 8. — С. 115–139.
6. *Жилякова Л. Ю.* Исследование эйлеровых ресурсных сетей// Управление большими системами. — 2013. — № 41. — С. 28–50.
7. *Жилякова Л. Ю., Кузнецов О. П.* Теория ресурсных сетей. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017.
8. *Кузнецов О. П., Жилякова Л. Ю.* Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями// Управление большими системами. — 2010. — № 30–1. — С. 640–664.
9. *Скороходов В. А., Абдулрахман Х., Ерусалимский Я. М.* Программа SYMDRN для исследования функционирования динамических ресурсных сетей// Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019617935, 25.06.2019. Заявка № 2019616962 от 13.06.2019.
10. *Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.
11. *Abdulrahman H. N., Erusalimskiy I. M.* On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks// J. Math. Sci. — 2024. doi: 10.1007/s10958-024-07093-1.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ерусалимский Яков Михайлович (Erusalimskiy Iakov Mikhailovich)

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Абдулрахман Хайдар Нофалович (Abdulrahman Haidar Nofalovich)

Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону

(Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia)

E-mail: abdulrahm.haidar@gmail.com

Скороходов Владимир Александрович (Skorokhodov Vladimir Aleksandrovich)

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Бабинцев Валерий Андреевич (Babintsev Valerii Andreevich)

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

(Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

E-mail: babintsev@sfedu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 22–30
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-22-30

УДК 514.7

ВКЛАД ОБОБЩЕННОЙ ТЕХНИКИ БОХНЕРА В ГЕОМЕТРИЮ ПОЛНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

© 2024 г. С. Е. СТЕПАНОВ, И. И. ЦЫГАНОК

Аннотация. На основе методов техники Бохнера, являющейся важной частью геометрического анализа, установлены условия, при которых минимальные и устойчивые минимальные подмногообразия в римановых многообразиях характеризуются как вполне геодезические подмногообразия.

Ключевые слова: евклидово пространство, риманово многообразие, минимальная гиперповерхность, устойчивая гиперповерхность, теорема о жесткости.

A CONTRIBUTION OF THE GENERALIZED BOCHNER TECHNIQUE TO THE GEOMETRY OF COMPLETE MINIMAL SUBMANIFOLDS

© 2024 S. E. STEPANOV, I. I. TSYGANOK

ABSTRACT. In this paper, based on methods of the Bochner technique, which is an important part of the geometric analysis, we establish conditions under which minimal and stable minimal submanifolds in Riemannian manifolds are characterized as totally geodesic submanifolds.

Keywords and phrases: Euclidean space, Riemannian manifold, minimal hypersurface, stable hypersurface, rigidity theorem.

AMS Subject Classification: 53C20, 53C21, 53C24

1. Введение. Изучение минимальных поверхностей имеет долгую и богатую историю. Напомним, что n -мерное минимальное подмногообразие (M, g) в m -мерном римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ при $m > n$ характеризуется как критическая точка его функционала объема. Важные результаты о минимальных подмногообразиях можно найти в монографии [7, гл. 5]. Более того, такое подмногообразие (M, g) считается устойчивым, если вторая вариация его объема всегда неотрицательна для любой нормальной деформации с компактным носителем. Интересные результаты об устойчивости минимальных подмногообразий можно найти в монографии [7, § 5.10, 11.3, 11.4, 16.11], статье [12], а также в настоящей статье.

Получение результатов о жесткости для минимальных и устойчивых минимальных подмногообразий в римановых многообразиях — это проблема, которая привлекла значительный интерес в сообществе геометрического анализа, начиная с классической статьи [5] и заканчивая более поздними статьями (см., например, [6]).

Методы, используемые в данной работе, являются методами обобщенной техники Бохнера (см. [13]), которая является важной частью геометрического анализа (см., например, [16]). Они позволяют получить новые результаты в этой активно изучаемой теме.

2. Минимальные подмногообразия в римановых многообразиях. Напомним, что одной из наиболее интересных тем в вариационном исчислении в римановой геометрии является изучение минимальных подмногообразий (M, g) риманова многообразия (\bar{M}, \bar{g}) , которые возникают как критические точки функционала объема (см. [7, § 5.1]).

Пусть (M, g) — n -мерное полное многообразие, изометрически погруженное в $(n + k)$ -мерное риманово многообразии (\bar{M}, \bar{g}) постоянной кривизны C . Обозначим через ∇ и $\bar{\nabla}$ связности Леви-Чивиты на (M, g) и (\bar{M}, \bar{g}) соответственно. Для векторных полей $X, Y \in C^\infty(TM)$ тангенциальная компонента $\bar{\nabla}_X Y$ равна $\nabla_X Y$. Формула Гаусса для $(M, g) \subset (\bar{M}, \bar{g})$ имеет вид (см. [7, § 3.1])

$$\varphi(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y;$$

φ — это симметричное 2-тензорное поле на M , которое называется второй фундаментальной формой (M, g) . В этом случае

$$H = \sum_{i=1, \dots, n} \varphi(e_i, e_i)$$

— вектор средней кривизны, где e_1, \dots, e_n — ортонормированный репер на открытом множестве $U \subseteq M$ (см., например, [18, с. 68]). Многообразие (M, g) называется минимальным подмногообразием (\bar{M}, \bar{g}) , если векторное поле средней кривизны тождественно равно нулю (см. [7, § 3.3]). Гиперповерхность (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием (\bar{M}, \bar{g}) тогда и только тогда, когда каждая геодезическая многообразия (M, g) является геодезической многообразия (\bar{M}, \bar{g}) . Это условие эквивалентно обращению в нуль ее второй фундаментальной формы φ для (M, g) .

Замечание 1. Подробные сведения о вполне геодезических подмногообразиях можно найти в монографии [7, гл. 11].

Рассмотрим далее полные римановы многообразия. Существование и несуществование положительной функции Грина делит класс полных многообразий на две категории. В общем случае методы работы с теорией функций на многообразиях из этих двух категорий различны. Если риманово многообразие не допускает положительной функции Грина, то оно называется параболическим, и непараболическим в противном случае (см. [11, с. 164]). Например, полное риманово многообразие (M, g) конечного объема является параболическим многообразием (см. [8]).

Следующая теорема является обобщением утверждения Kobayasi, Черна и до Кармо (см. [5, Theorem 1 and its Corollary]) для компактной минимальной поверхности в римановом многообразии постоянной кривизны.

Теорема 1. Пусть (M, g) — n -мерное полное параболическое многообразие (в частности, полное многообразие конечного объема), минимально погруженное в $(n + k)$ -мерное риманово многообразии (\bar{M}, \bar{g}) постоянной кривизны C . Если (M, g) не является вполне геодезическим и

$$\|\varphi\|^2 \leq \frac{n}{2 - 1/k} C,$$

где φ — вторая фундаментальная форма многообразия (M, g) , то (M, g) является параллельным подмногообразием и

$$\|\varphi\|^2 = \frac{n}{2 - 1/k} C.$$

Доказательство. Пусть (M, g) — n -мерное риманово полное многообразие, изометрически погруженное в $(n + q)$ -мерное риманово многообразии (\bar{M}, \bar{g}) постоянной кривизны C . Обозначим через \bar{g} метрику расслоения $TM \oplus T^\perp M$ над M ; тогда, в частности, квадрат длины второй фундаментальной формы φ многообразия (M, g) имеет вид

$$\|\varphi\|_{\bar{g}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{g}(\varphi(e_i, e_j), \varphi(e_i, e_j)),$$

где e_1, \dots, e_n — ортонормированный репер на открытом множестве $U \subseteq M$. Следовательно, $\|\varphi\|_{\bar{g}}^2$ — гладкая функция, определенная на M . Независимо от того, компактно (M, g) или нет,

согласно уравнениям (3.10) и (3.12) из [5, с. 65-66], имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\Delta_g\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 = \|\tilde{\nabla}\varphi\|_{\tilde{g}}^2 + \left(nC - \left(2 - \frac{1}{k}\right)\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2\right)\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2, \quad (1)$$

где $\Delta_g = \text{trase}_g \nabla^2$ — лапласиан, определенный на $C^2(M)$, а $\tilde{\nabla}\varphi$ — ковариантная производная относительно связности $\tilde{\nabla}$, определенной на $TM \oplus T^\perp M$ (см. [7, § 3.1], [5, с. 62, 66]). Поэтому, если предположить, что (M, g) не является вполне геодезическим и $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 \leq nC/(2-1/k)$, то из (1) заключаем, что

$$\Delta_g\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 \geq 0.$$

В этом случае $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2$ — неотрицательная субгармоническая функция, ограниченная сверху. Обратим внимание, что определение параболичности допускает следующую характеристику: полное многообразие (M, g) является параболическим, если каждая ограниченная субгармоническая функция на (M, g) является константой (см. [11, с. 164], [10, с. 66]). Следовательно, если (M, g) — параболическое многообразие и, в частности, имеет конечный объем, то $\|\varphi\| = \text{const}$. В этом случае из (1) получаем $\|\varphi\|_{\tilde{g}}^2 = nC$ и $\tilde{\nabla}\varphi = 0$. Напомним также, что риманово подмногообразие называется параллельным, если его вторая фундаментальная форма параллельна относительно $\tilde{\nabla}$ (подробности см. в [7, гл. 8]). Теорема доказана. \square

Рассмотрим теперь гладкое связное n -мерное риманово многообразие (M, g) , изометрически погруженное в $(n+1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$, $n \geq 2$; такое многообразие называется гиперповерхностью. В этом случае справедлива формула Гаусса:

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y - g(A_g X, Y)N,$$

где X и Y — произвольные касательные векторные поля к (M, g) , N — глобальное нормальное единичное векторное поле к (M, g) , а A_g — оператор формы (оператор Вейнгартена) многообразия (M, g) . Средняя кривизна многообразия (M, g) задается формулой $H = \text{trase } A_g$. Многообразие (M, g) минимально тогда и только тогда, когда $H \equiv 0$ (см. [3, с. 39]).

Вторая фундаментальная форма гиперповерхности (M, g) определяется тождеством $\varphi(X, Y) := g(A_g X, Y)$, где X и Y — произвольные касательные векторные поля к (M, g) .

Обозначим через $\|\varphi_g\|^2 := \|\varphi_g\|_g^2$ квадрат длины оператора формы (M, g) . Следующее утверждение очевидно.

Следствие 1. Пусть (M, g) — n -мерное полное параболическое многообразие (в частности, полное многообразие конечного объема), минимально погруженное в $(n+1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной кривизны C . Если (M, g) не является вполне геодезическим и $\|\varphi_g\|^2 \leq nC$, где φ_g — оператор формы (M, g) , то $\|\varphi_g\|^2 = nC$ и вторая фундаментальная форма φ многообразия (M, g) параллельна относительно связности Леви-Чивиты ∇ многообразия (M, g) .

Известная теорема Эйзенхарта (см. [9, с. 303]) утверждает следующее: если φ — параллельный симметричный 2-тензор на (M, g) , то для каждой точки $x \in M$ существует некоторая окрестность $U \subset M$, где

$$\varphi = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_r g_r,$$

и локально (M, g) допускает риманову структуру прямого произведения $(M, g) \supset (U, g_U) = (U_1, g_1) \times \dots \times (U_r, g_r)$. Здесь коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ являются константами, а $(U_1, g_1), \dots, (U_r, g_r)$ являются римановыми многообразиями размерностей $n_1 \geq 1, \dots, n_r \geq 1$ соответственно, причем $n_1 + \dots + n_r = n$ для некоторого r (см. [9]). В этом случае условия $\text{trase}_g \varphi = 0$ и $\|\varphi_g\|^2 = nC$ можно переписать в виде

$$n_1 \lambda_1 + \dots + n_r \lambda_r = 0, \quad n_1 \lambda_1^2 + \dots + n_r \lambda_r^2 = nC,$$

соответственно. Кроме того, согласно [5], известно, что если (M, g) — минимальная (но не вполне геодезическая) гиперповерхность, погруженная в $(n+1)$ -мерное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной кривизны 1, удовлетворяющее условию $\|\varphi_g\|^2 = n$, то $r = 2$. В этом случае прямыми вычислениями получаем равенства

$$\lambda_1 = \sqrt{(n-m)/m}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{n/(n-m)}$$

где $m = \dim U_1 \geq 1$ и $n - m = \dim U_2 \geq 1$. Следовательно, справедливо следующее следствие (ср. с утверждением, приведенным в [5, с. 68]).

Следствие 2. *Если (M, g) – такое n -мерное минимальное (не вполне геодезическое) подмногообразие $(n + 1)$ -мерного риманова многообразия (\bar{M}, \bar{g}) постоянной кривизны $C = 1$, что $\|\varphi_g\|^2 = n$, то для каждой точки $x \in M$ существует такая окрестность $U \subset M$, что (M, g) локально является римановым прямым произведением $(M, g) \supset (U, g|_U) = (U_1, g_1) \times (U_2, g_2)$, где (U_1, g_1) и (U_2, g_2) – римановы многообразия постоянной кривизны размерностей соответственно $m \geq 1$ и $n - m \geq 1$ и $\varphi = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$, где $\lambda_1 = \sqrt{(n - m)/m}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{n/(n - m)}$.*

Если (\bar{M}, \bar{g}) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны, то вторая фундаментальная форма φ гиперповерхности (M, g) удовлетворяет уравнениям Кодацци (см. [3, с. 436] и [14, с. 350]):

$$(\nabla_X \varphi)(Y, Z) = (\nabla_Y \varphi)(X, Z), \quad (2)$$

где X, Y и Z – произвольные касательные векторные поля многообразия (M, g) . В то же время, любое поле $\varphi \in C^\infty(S^2 M)$, удовлетворяющее уравнениям Кодацци (2), называется тензором Кодацци (см. [3, с. 435] и [14, с. 350]).

Следовательно, если (\bar{M}, \bar{g}) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны, то из уравнений Кодацци (2) выводим

$$\delta\varphi = -dH, \quad (3)$$

где $\delta\varphi = -\operatorname{div} \varphi$. В то же время хорошо известно, что для любого n -мерного ($n \geq 3$) компактного (без края) риманова многообразия (M, g) алгебраическая сумма $\operatorname{Im} \delta^* + C^\infty M \cdot g$ замкнута в $S^2 M$, где $\delta^* \theta := \frac{1}{2} L_\xi g$ и $L_\xi g$ – производная Ли вдоль гладкого векторного поля ξ , которое является двойственным (относительно g) к 1-форме θ (см. [3, с. 35]). В этом случае имеет место разложение (см. [3, с. 130])

$$S^2 M = (\operatorname{Im} \delta^* + C^\infty M \cdot g) \oplus (\delta^{-1}(0) \cap \operatorname{trace}_g^{-1}(0)), \quad (4)$$

где оба слагаемых бесконечномерны и ортогональны друг другу относительно внутреннего скалярного произведения в L^2 :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_M g(\cdot, \cdot) dv_g$$

для канонической меры dv_g на (M, g) . Очевидно, что второе слагаемое $\delta^{-1}(0) \cap \operatorname{trace}_g^{-1}(0)$ в (4) – это пространство TT -тензоров.

Замечание 2. Напомним, что симметричный бездивергентный бесследовый ковариантный 2-тензор называется TT -тензором. Как следствие результата Бургиньона, Эбина и Марсдена (см. [3, с. 132]), пространство TT -тензоров является бесконечномерным векторным пространством для любого замкнутого риманова многообразия (M, g) . Такие тензоры имеют фундаментальное значение в анализе устойчивости в общей теории относительности (см., например, [4]) и в римановой геометрии (см., например, [3, с. 346-347]).

Учитывая вышеизложенное, приходим к выводу, что вторая фундаментальная форма φ имеет следующее L^2 -ортогональное разложение (см. также формулу (4)):

$$\varphi = \left(\frac{1}{2} L_\xi g + \lambda g \right) + \varphi^{TT} \quad (5)$$

для некоторых векторного поля $\xi \in C^\infty TM$, TT -тензора $\varphi^{TT} \in C^\infty(S^2)$ и скалярной функции $\lambda \in C^\infty M$. Применяя оператор trace_g к обеим сторонам (5), получим

$$H = -\delta\theta + n\lambda, \quad (6)$$

где $\theta^\sharp = \xi$ (см. [3, с. 30]). В этом случае уравнение (6) можно переписать в виде

$$\varphi_0 = S\theta + \varphi^{TT}, \quad (7)$$

где $\varphi_0 = \varphi - \frac{1}{n} Hg$ – бесследовая часть второй фундаментальной формы φ и

$$S\theta = \frac{1}{2} L_\xi g + \frac{1}{n} \delta\theta g$$

— оператор Коши—Альфорта. Далее, применяя $S^* := \delta$ к обеим сторонам (6), получаем

$$S^* S\theta = \delta\varphi_0 \quad (8)$$

для лапласиана Альфорта $S^* S$ (см. [15]). Объединяя (3) и (8), находим

$$S^* S\theta = -dH. \quad (9)$$

Следовательно, если средняя кривизна $H(M, g)$ постоянна, то $S^* S\theta = 0$. Тогда $S\theta = 0$, поскольку $\langle S^* S\theta, \theta \rangle = \langle S\theta, S\theta \rangle \geq 0$ (см. [15]). В этом случае из (7) получаем

$$\varphi = \frac{1}{n}Hg + \varphi^{TT}.$$

Обратное утверждение также справедливо. Теперь мы готовы сформулировать результат, обобщающий теорему 5.4.2 из [18].

Теорема 2. Пусть (M, g) — компактная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, $\dim \overline{M} \geq 4$. Средняя кривизна H многообразия (M, g) постоянна тогда и только тогда, когда вторая фундаментальная форма $\varphi(M, g)$ допускает L^2 -ортogonalное разложение

$$\varphi = \frac{1}{n}Hg + \varphi^{TT}, \quad (10)$$

где φ^{TT} — некоторый TT -тензор. В частности, если (M, g) — компактная минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то $\varphi = \varphi^{TT}$.

Из (10) и уравнений Кодацци (2) следует, что φ^{TT} — бесследовый тензор Кодацци, а это значит, что φ^{TT} — гармоническая форма (см. [14, с. 350]). В то же время в [2] мы доказали, что любой такой TT -тензор должен быть нулевым тензором на компактном римановом многообразии (M, g) с квазиположительной секционной кривизной, т.е. она всюду полуотрицательно определена и отрицательно определена в некоторой точке. В частности, если (M, g) — гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то она является вполне омбилической (см. [3, с. 39]) и имеет постоянную среднюю кривизну. В этом случае (M, g) — риманово многообразие постоянной секционной кривизны. Более того, эта кривизна должна быть положительной, поскольку мы предположили, что (M, g) — многообразии квазиположительной секционной кривизны.

Римановы многообразия постоянной секционной кривизны называются пространственными формами (см. [14, с. 20]). Поэтому в нашем случае (M, g) должно быть сферической пространственной формой, поскольку имеет положительную постоянную кривизну. В частности, если (M, g) — односвязное многообразие, то $M = \mathbb{S}^n$ (см. [14, с. 200-201]). Используя этот факт, а также результат теоремы 2, приходим к следующему выводу.

Следствие 3. Пусть $(\overline{M}, \overline{g})$ — n -мерное риманово многообразие постоянной секционной кривизны, где $n \geq 4$, и пусть (M, g) — изометрически вложенная компактная гиперповерхность $(M, g) \subset (\overline{M}, \overline{g})$ постоянной средней кривизны. Если (M, g) имеет квазиположительную секционную кривизну, то (M, g) — сферическая пространственная форма. Кроме того, если (M, g) — односвязное многообразие, то это евклидова сфера \mathbb{S}^n .

Замечание 3. Приведем альтернативное доказательство следствия 2. Следующая теорема хорошо известна (см. [3, с. 436]): Каждый тензор Кодацци φ с постоянным следом на компактном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны параллелен. Более того, если секционные кривизны многообразия (M, g) положительны в некоторой точке, то φ является постоянным кратным g . Следовательно, если (M, g) — гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны, то она является вполне омбилической и имеет постоянную среднюю кривизну.

Рассмотрим (M, g) как гиперповерхность $(n + 1)$ -мерного риманова многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ положительной постоянной секционной кривизны. Напомним, что в таком случае ее вторая фундаментальная форма является тензором Кодацци (см. [3, с. 436]). Более того, если средняя кривизна

многообразия (M, g) постоянна (и, в частности, если она равна нулю), то его вторая фундаментальная форма становится гармонической билинейной формой (см. [14, с. 350]). Используя этот факт, а также наши результаты о гармонических билинейных формах на полных многообразиях (см. [17]), приходим к следующему выводу.

Следствие 4. Пусть (M, g) — полная некомпактная гиперповерхность в $(n + 1)$ -мерном римановом многообразии (\bar{M}, \bar{g}) положительной постоянной секционной кривизны. Если секционная кривизна многообразия (M, g) неотрицательна, средняя кривизна постоянна (в частности, равна 0), а вторая фундаментальная форма φ удовлетворяет условию

$$\int_M \|\varphi\|^p dv_g < \infty$$

хотя бы для одного значения $p \geq 1$, то (M, g) — сферическая пространственная форма. В частности, если (M, g) — односвязное многообразие, то это евклидова сфера \mathbb{S}^n .

3. Устойчивые минимальные гиперповерхности в римановых многообразиях. В этом разделе рассматриваем полные, связные, изометрически погруженные гиперповерхности $(M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$, где (\bar{M}, \bar{g}) — риманово многообразие размерности $n + 1 \geq 3$. Напомним, что минимальная гиперповерхность (M, g) в римановом многообразии (\bar{M}, \bar{g}) считается устойчивой тогда и только тогда, когда вторая вариация ее функционала объема неотрицательна для любой нормальной деформации с компактным носителем (см., например, [7, § 5.2], [8]). Согласно [6] устойчивость (M, g) , связанная с неотрицательностью второй вариации ее функционала объема, эквивалентна неположительности оператора Якоби (или оператора устойчивости)

$$L_g := \Delta_g + \|A_g\|^2 + \text{Ric}_{\bar{g}}(N, N),$$

где $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N)$ — кривизна Риччи многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в направлении единичного нормального векторного поля N к многообразию (M, g) в каждой его точке. Следовательно, в этом случае имеем

$$\Delta_g u \leq -[\|A_g\|^2 + \text{Ric}_{\bar{g}}(N, N)]u \tag{11}$$

для любой функции $u \in C^\infty(M)$. В то же время, если $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке многообразия M , то из неравенства (11) получаем $\Delta_g u \leq 0$ и, следовательно, u — супергармоническая функция.

Обратим внимание, что определение параболичности допускает эквивалентную характеристику: полное многообразие (M, g) является параболическим, если любая положительная супергармоническая функция на (M, g) является постоянной; в противном случае оно считается непараболическим (см. [11, с. 164], [1]). В этом случае, если гиперповерхность (M, g) является параболическим полным римановым подмногообразием многообразия (\bar{M}, \bar{g}) и существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, то u является постоянной и из (11) выводим, что $A_g = 0$ и $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N) = 0$ в каждой точке многообразия M . В этом случае (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием многообразия (\bar{M}, \bar{g}) . Это приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть (M, g) — параболическое риманово многообразие, которое является устойчивой минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии (\bar{M}, \bar{g}) , причем кривизна Риччи многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в направлении единичного нормального векторного поля κ к (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , и (M, g) параболично, то оно является вполне геодезическим подмногообразием в (\bar{M}, \bar{g}) .

Замечание 4. Эта теорема дополняет следующий результат (см. [12, Теорема 1.1]): Пусть (M, g) — полная минимальная гиперповерхность в многообразии (\bar{M}, \bar{g}) с неотрицательной кривизной Риччи $\text{Ric}_{\bar{g}}$. Если гиперповерхность (M, g) является параболической, то она должна быть вполне геодезической в (\bar{M}, \bar{g}) . Более того, кривизна Риччи $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N)$ многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в

нормальном направлении также равна нулю, и гиперповерхность (M, g) должна иметь неотрицательную скалярную кривизну. Это можно объяснить следующим образом: неотрицательность скалярной кривизны (M, g) следует из уравнения кривизны Гаусса в сочетании с предположением, что $(\overline{M}, \overline{g})$ имеет неотрицательную кривизну Риччи $\text{Ric}_{\overline{g}}$.

По теореме Ченга—Яу полное многообразие конечного объема является параболическим (см. [8]). Следовательно, полное риманово многообразие конечного объема не допускает непостоянных положительных супергармонических функций. Более того, если $0 < u \in C^2(M)$ и $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке многообразия M , то из (11) заключаем, что u должна быть постоянной, что подразумевает $A_g = 0$ и $\text{Ric}_{\overline{g}}(N, N) = 0$ в каждой точке M . В этом сценарии (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием $(\overline{M}, \overline{g})$. Имея это в виду, можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 5. Пусть (M, g) — полное устойчивое риманово многообразие конечного объема, которое является минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем что кривизна Риччи $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля κ (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если существует положительная функция $u \in C^2(M)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Замечание 5. Подробности об устойчивости вполне геодезических подмногообразий можно найти в монографии [7, § 11.3].

Кроме того, обратим внимание на следующий элегантный результат Ченга и Яу (см. [8, Theorem 1, Corollary 1]): Если на полном римановом многообразии (M, g) объем V_R геодезического шара радиуса R с фиксированным центром удовлетворяет неравенству $V_R \leq CR^2$, то каждая отрицательная субгармоническая функция на (M, g) должна быть постоянной. По определению функция u называется субгармонической, если $-u$ является супергармонической (см. [11, с. 150]). Таким образом, если (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в $(\overline{M}, \overline{g})$, удовлетворяющая условию теоремы Ченга—Яу и критериям, указанным в предыдущей теореме, то из (11) следует, что $A_g = 0$ и, следовательно, (M, g) является вполне геодезической. В свете вышеизложенного можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля κ многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если объем V_R геодезического шара радиуса R с центром в фиксированной точке удовлетворяет неравенству $V_R \leq CR^2$ и существует положительная функция $u \in C^2(M, g)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Основной результат работы [1] можно сформулировать следующим образом: Если на полном римановом многообразии (M, g) объем V_R геодезического шара радиуса R с центром в фиксированной точке удовлетворяет неравенству $V_R \leq e^{CR^2}$, то каждая неотрицательная супергармоническая функция в $L^1(M, g)$ является константой. В этом сценарии многообразие (M, g) является параболическим, поскольку определение параболичности допускает эквивалентную характеристику: многообразие (M, g) является параболическим, если любая положительная супергармоническая функция на (M, g) является константой; в противном случае оно считается непараболическим (см. [11, стр. 164]). Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть (M, g) — связная, полная, устойчивая минимальная гиперповерхность в римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, причем кривизна Риччи многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ в направлении единичного нормального векторного поля κ многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Предположим, что объем V_R геодезического шара радиуса R с фиксированным центром на (M, g) удовлетворяет неравенству $V_R \leq e^{CR^2}$. Если существует гладкая положительная функция $u \in L^1(M, g)$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) — вполне геодезическое подмногообразие в $(\overline{M}, \overline{g})$.

Имеется обобщение понятия параболического многообразия, известное как стохастически полные многообразия. Любое параболическое многообразие является стохастически полным, но обратное не обязательно верно (см. [11, р. 172]). Рассмотрим минимальный винеровский процесс на (M, g) , т.е. диффузионный процесс, порожденный оператором Лапласа—Бельтрами Δ с условиями поглощения на бесконечности. Если вероятность поглощения на бесконечности за конечное время равна нулю, то многообразие (M, g) называется стохастически полным (см. [1, 11]). В заключение докажем следующую теорему.

Теорема 6. Пусть (M, g) — полное, устойчивое и стохастически полное риманово многообразие, которое является минимальной гиперповерхностью в римановом многообразии (\bar{M}, \bar{g}) , причем кривизна Риччи многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M . Если существует гладкая положительная функция $u \in L^p(M, g)$, $0 < p \leq 1$, удовлетворяющая неравенству $L_g u \leq 0$, где L_g — оператор устойчивости (или оператор Якоби) на (M, g) , то (M, g) является вполне геодезическим подмногообразием многообразия (\bar{M}, \bar{g}) .

Доказательство. Хорошо известно, что если (M, g) — стохастически полное многообразие, то каждая положительная супергармоническая функция $u \in L^1(M, g)$ является постоянной (см. [1]). Следовательно, если гиперповерхность (M, g) — стохастически полное риманово многообразие и кривизна Риччи многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M , то из (11) следует, что для каждой гладкой положительной функции $u \in L^1(M, g)$ имеем $A_g = 0$, и, следовательно, (M, g) — вполне геодезическое многообразие.

Напомним, что Яу установил следующий результат (см. [20]): Пусть u — гладкая функция, определенная на полном римановом многообразии (M, g) , причем $u \geq 0$ и $(p - 1)u \Delta_g u \geq 0$, где p — положительное число. Тогда для $p \neq 1$ либо

$$\int_M u^p dv_g = \infty,$$

либо u является константой. Следовательно, для случая, когда $0 < u \in L^p(M, g)$ по крайней мере для одного $0 < p < 1$ и кривизна Риччи многообразия (\bar{M}, \bar{g}) в направлении единичного нормального векторного поля к многообразию (M, g) неотрицательна в каждой точке M , из уравнения (11) на основании теоремы Яу получаем, что $A_g = 0$ и, следовательно, (M, g) является вполне геодезической. Доказательство завершено. \square

Замечание 6. Если (M, g) — полное некомпактное риманово многообразие с неотрицательной кривизной Риччи, то (M, g) имеет бесконечный объем (см. [19]). В то же время, если объем полного и стохастически полного риманова многообразия (M, g) бесконечен, то не существует положительных супергармонических функций $u \in L^1(M)$ (см. [1]). Следовательно, если полное некомпактное и стохастически полное риманово многообразие (M, g) имеет неотрицательную кривизну Риччи Ric_g , то не может существовать положительной функции $u \in L^1(M, g)$, которая удовлетворяла бы неравенству (11) с $\text{Ric}_{\bar{g}}(N, N) \geq 0$ в каждой точке x множества M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян А. А. Стохастически полные многообразия и суммируемые гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — 52, № 5. — С. 1102–1108.
2. Степанов С. Е., Цыганок И. И. Поточечное ортогональное расщепление пространства ТТ-тензоров // Диффер. геом. многообр. фигур. — 2023. — 54, № 2. — С. 45–53.
3. Besse A. Einstein Manifolds. — Berlin: Springer, 1987.
4. Carlotto A. The general relativistic constraint equations // Living Rev. Relativ. — 2021. — 24. — 2.
5. do Carmo M. P., Chern S. S., Kobayashi S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length // in: Functional Analysis and Related Fields (Browder F. E., ed.). — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1970. — P. 59–75.

6. *Catino G., Mastrolia P., Roncoroni A.* Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces// *Geom. Funct. Anal.* — 2024. — 34. — P. 1–18.
7. *Chen B.-Y.* Riemannian submanifolds// in: *Handbook of Differential Geometry. Vol. 1 (Dillen F. J. E., Verstraeten L. C. A., eds.)*. — Amsterdam: North Holland, 2000. — P. 187–418.
8. *Cheng S. Y., Yau S.-T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications// *Commun. Pure Appl. Math.* — 1975. — 28, № 3. — P. 333–354.
9. *Eisenhart L. P.* Symmetric tensor of the second order whose first covariant derivatives are zero// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1923. — 25, № 2. — P. 297–306.
10. *Fu H.-P., Xu G.-B., Tao Y.-Q.* Some remarks on Riemannian manifolds with parallel Cotton tensor// *Kodai Math. J.* — 2019. — 42, № 1. — P. 64–74.
11. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1999. — 36, № 2. — P. 135–249.
12. *Li P., Wang J.* Stable minimal hypersurfaces in a non-negatively curved manifold// *J. Reine Angew. Math.* — 2004. — 566. — P. 215–230.
13. *Mikeš J., Stepanov S.* What is the Bochner technique and where is it applied// *Lobachevskii J. Math.* — 2022. — 43, № 4. — P. 709–719.
14. *Petersen P.* *Riemannian Geometry*. — Cham: Springer, 2016.
15. *Pierzchalski A.* Gradients: The ellipticity and the elliptic boundary conditions — a jigsaw puzzle// *Folia Math.* — 2017. — 19, № 1. — P. 65–83.
16. *Pigola S., Rigoli M., Setti A. G.* Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A Generalization of the Bochner Technique. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2008.
17. *Shandra I. G., Stepanov S. E., Mikeš J.* On higher-order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds// *Ann. Glob. Anal. Geom.* — 2019. — 56. — P. 429–442.
18. *Simons J.* Minimal varieties in Riemannian manifolds// *Ann. Math.* — 1968. — 88, № 1. — P. 62–105.
19. *Yau S.-T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry// *Indiana Univ. Math. J.* — 1976. — 25, № 7. — P. 659–670.
20. *Yau S.-T.* Erratum: Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry// *Indiana Univ. Math. J.* — 1982. — 31, № 4. — P. 607–607.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Степанов Сергей Евгеньевич (Stepanov Sergey Evgenievich)

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук, Москва

(Russian Institute for Scientific and Technical Information

of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia);

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

(Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail: s.e.stepanov@mail.ru

Цыганок Ирина Ивановна (Tsyganok Irina Ivanovna)

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва

(Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail: i.i.tsyganok@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 31–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-31-48

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА
И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ
ШЕСТИЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ХАББАРДА.
ЧЕТВЕРТОЕ ТРИПЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2024 г. С. М. ТАШПУЛАТОВ

Аннотация. Рассматривается оператор энергии шестиэлектронных систем в модели Хаббарда и исследуются структура существенного спектра и дискретный спектр системы для четвертого триплетного состояния системы. Доказано, что в одномерном и двумерном случаях существенный спектр оператора шестиэлектронного четвертого триплета является объединением семи отрезков, а дискретный спектр системы содержит не более одного собственного значения. В трехмерном случае имеют место следующие ситуации: (а) существенный спектр оператора шестиэлектронного четвертого триплета является объединением семи отрезков, а дискретный спектр содержит не более одного собственного значения; (б) существенный спектр является объединением четырех отрезков, а дискретный спектр пуст; (в) существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст; (г) существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Найденны условия, при которых реализуется каждая ситуация.

Ключевые слова: модель Хаббарда, шестиэлектронная система, триплетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр.

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM
AND THE DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR
OF SIX-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL.
FOURTH TRIPLET STATE

© 2024 S. M. TASHPULATOV

ABSTRACT. In this paper, we analyze the energy operator of six-electron systems within the framework of the Hubbard model and examine the structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the system in the fourth triplet state. We prove that in the one- and two-dimensional cases, the essential spectrum of the six-electron fourth triplet state operator is the union of seven segments, whereas the discrete spectrum contains at most one eigenvalue. In the three-dimensional case, the following situations can occur: (a) the essential spectrum of the operator is the union of seven segments and the discrete spectrum contains at most one eigenvalue; (b) the essential spectrum is the union of four segments and the discrete spectrum is empty; (c) the essential spectrum is the union of two segments and the discrete spectrum is empty; (d) the essential spectrum consists of a single segment and the discrete spectrum is empty. We found conditions under which each of these situations occurs.

Keywords and phrases: Hubbard model, six-electron system, triplet state, essential spectrum, discrete spectra.

AMS Subject Classification: 62M15, 46L60, 47L90

1. Введение. В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [10, 11, 15], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием.

Предложенная в [10, 11, 15] модель получила название модели Хаббарда в честь Дж. Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле [8].

Модель Хаббарда является приближением, которое используется в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающую взаимодействие частиц в решетке. Ее гамильтониан содержит только два слагаемых: кинетический член, соответствующий туннелированию («перескокам») частиц между узлами решетки, и слагаемое, соответствующее внутриузловому взаимодействию. Частицы могут быть фермионами, как в исходной работе Хаббарда, а также бозонами. Простота и достаточность гамильтониана H сделала модель Хаббарда весьма популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах, когда все частицы находятся в нижней блоховской зоне, а дальними взаимодействиями можно пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на разных узлах, то такую модель часто называют «расширенной моделью Хаббарда». Впервые эта модель была предложена для описания электронов в твердых телах; с тех пор она представляет особый интерес при изучении высокотемпературной сверхпроводимости. Позднее расширенная модель Хаббарда стала использоваться и при описании поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

Модель Хаббарда основана на приближении сильно связанных электронов. В приближении сильной связи электроны изначально занимают стандартные орбитали в атомах (узлах решетки), а затем перескакивают на другие атомы в процессе проведения тока. Математически это представляется так называемым интегралом перескока. Этот процесс можно рассматривать как физическое явление, благодаря которому появляются электронные зоны в кристаллических материалах. Однако в более общих зонных теориях взаимодействие между электронами не рассматривается. Кроме интеграла перескока, объясняющего проводимость материала, модель Хаббарда содержит так называемое внутриузловое отталкивание, соответствующее кулоновскому отталкиванию между электронами. Это приводит к конкуренции между интегралом перескока, зависящим от взаимного расположения узлов решетки, и внутриузловым отталкиванием, которое от расположения атомов не зависит. Благодаря этому факту модель Хаббарда объясняет переход «проводник-диэлектрик» в оксидах некоторых переходных металлов. При нагревании такого материала расстояния между ближайшими соседними узлами в нем увеличиваются, интеграл перескока уменьшается, и внутриузловое отталкивание становится доминирующим фактором.

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучаемых многоэлектронных моделей металла (см. [2, 3, 5, 9]). В обзоре [2] обобщены полученные результаты по модели Хаббарда; чем больший прогресс достигается в получении теоретических решений, тем яснее становится, что эта простая модель может демонстрировать поразительный набор фаз и режимов, многие из которых имеют четкие параллели с наблюдаемым поведением широкого спектра сложных материалов. Например, имеются убедительные доказательства того, что ферромагнетизм, различные формы антиферромагнетизма, нетрадиционная сверхпроводимость, волны плотности заряда, электронные жидкокристаллические фазы и топологические упорядоченные фазы (например «спиновые жидкости») встречаются в конкретных реализациях модели Хаббарда. Показано также, что положительные собственные значения в модели Хаббарда (соответствующие отталкивающим эффективным взаимодействиям) ослабевают, а отрицательные растут. Различные собственные функции соответствуют, но не полностью определяются неприводимым представлением группы кристаллических точек в модели Хаббарда.

Получение точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, представляет большой интерес.

В [4] изучались спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном (см. [4]). В [4] доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и представляет собой отрезок $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, при некоторых значениях квазиимпульса существует единственное антисвязанное состояние (см. [4]). Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состояний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояниями типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируется. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ реализуется, как нетрудно видеть, обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой полосы спектр не зависит от параметра U кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной полосой. Вторая полоса в гораздо большей степени определяется кулоновским взаимодействием: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама полоса исчезает при $U \rightarrow 0$, а при $U \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает. Вторая полоса в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно, движению двойки, т.е. двухэлектронным связанным состояниям.

В [6] изучался спектр и волновые функции системы трёх электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что трехэлектронные системы могут находиться в трех состояниях: квартетном и двух состояниях дублетного типа (см. [6]). Квартетное состояние соответствует свободному движению трех электронов на решетке, и ему отвечают базисные функции

$$q_{m,n,p}^{3/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0.$$

В [6] доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из единственного отрезка, а трехэлектронное связанное состояние или трехэлектронное антисвязанное состояние отсутствуют.

Дублетному состоянию соответствуют базисные функции

$${}^1 d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ \varphi_0, \quad {}^2 d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ \varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого дублетного состояния \tilde{H}_1^d является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, т.е. в системе существует единственное антисвязанное состояние. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр либо является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст, т.е., в системе антисвязанные состояния отсутствуют. В одномерном случае существенный спектр оператора второго дублетного состояния \tilde{H}_2^d является объединением трёх отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора второго дублетного состояния \tilde{H}_2^d является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки (т.е. в системе существует не более одного антисвязанного состояния), либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст, т.е. в системе антисвязанные состояния отсутствуют.

В [18] изучались спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в триплетном состоянии системы. Четырехэлектронные системы могут находиться в шести состояниях: квинтетном, трех состояниях триплетного типа и двух состояниях синглетного типа (см. [18]). Триплетным состояниям соответствуют базисные функции

$${}^1t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\downarrow}^+ \varphi_0, \quad {}^2t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0, \quad {}^3t_{m,n,p,r}^1 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\downarrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в первом триплетном состоянии ${}^1\tilde{H}_t^1$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр в первом триплетном состоянии ${}^1\tilde{H}_t^1$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр системы оператора состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр системы оператора во втором дублетном состоянии ${}^2\tilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора во втором триплетном состоянии ${}^2\tilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в третьем триплетном состоянии ${}^3\tilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора в третьем триплетном состоянии ${}^3\tilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Видим, что здесь существует три типа триплетных состояний, и они имеют различные происхождения.

В [19] изучался спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в квинтетном и синглетных состояниях системы. Квинтетному состоянию соответствуют свободные движения четырех электронов в решетке, описываемые базисными функциями ${}^q_{m,n,p,r}^2 = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\uparrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ \varphi_0$. В [19] доказано, что спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывен и представляет собой отрезок, а четырехэлектронные связанные состояния и четырехэлектронные антисвязанные состояния в системе отсутствуют. Синглетным состояниям соответствуют базисные функции

$${}^1s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\uparrow}^+ a_{r,\downarrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0, \quad {}^2s_{p,q,r,t}^0 = a_{p,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{t,\downarrow}^+ \varphi_0,$$

и эти два синглетных состояния имеют различное происхождение.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого синглетного состояния ${}^1\tilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора первого синглетного состояния ${}^1\tilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора второго синглетного состояния ${}^2\tilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора второго синглетного состояния ${}^2\tilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

В [20–24] изучались спектр и волновые функции системы пяти электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в секстетном, квартетных и синглетных состояниях системы.

В [7] изучались спектр и волновые функции системы шести электронов, который описывается гамильтонианом Хаббарда во втором синглетном состоянии системы.

2. Гамильтониан системы. В настоящей работе рассматривается оператор энергии шести-электронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы для четвертых триплетных состояний. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}. \quad (1)$$

Здесь A — энергия электрона в узле решетки; B — интеграл переноса между соседними узлами (для удобства считаем, что $B > 0$); $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле; γ — спиновый индекс, $\gamma = \uparrow$ или $\gamma = \downarrow$; через \uparrow и \downarrow обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$; $a_{m,\gamma}^+$ и $a_{m,\gamma}$, соответственно, — операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Энергия системы зависит от ее полного спина S . В случае насыщенного ферромагнитного состояния ($S = N_e/2$, где N_e — число электронов в системе) решение задачи является точным и тривиальным для любого допустимого числа электронов N_e . В этом случае система представляет собой идеальный ферми-газ электронов с одним направлением проекции спинов.

Наряду с гамильтонианом, N_e -электронная система характеризуется полным спином S , $S = S_{\max}, S_{\max} - 1, \dots, S_{\min}$, где $S_{\max} = N_e/2$, $S_{\min} = 0, 1/2$. Гамильтониан (1) коммутирует со всеми компонентами оператора $S = (S^+, S^-, S^z)$ полного спина системы, поэтому структура собственных функций и собственные значения системы зависят от S . Гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока \mathcal{H}_{as} .

Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве \mathcal{H}_{as} . Четвертое триплетное состояние соответствует свободному движению шести электронов на решетке и их взаимодействие, и ему отвечают базисные функции

$${}^4t_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1 = a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0.$$

Подпространство ${}^4\mathcal{H}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$, соответствующее четвертому триплетному состоянию, есть множество всех векторов вида

$${}^4\psi_t^1 = \sum_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu} \tilde{f}(p, q, r, k, m, n) {}^4t_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1, \quad \tilde{f} \in l_2^{\text{as}},$$

где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^\nu)^6)$.

Теорема 1. Подпространство ${}^4\tilde{\mathcal{H}}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$ инвариантно относительно оператора H , а сужение ${}^4H_t^1 = H|_{{}^4\mathcal{H}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1}$ оператора H на подпространство ${}^4\mathcal{H}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^4\bar{H}_t^1$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле

$$\begin{aligned} ({}^4\bar{H}_t^1 f)(p, q, r, k, m, n) &= 6Af(p, q, r, k, m, n) + \\ &+ B \sum_{\tau} \left[f(p + \tau, q, r, k, m, n) + f(p, q + \tau, r, k, m, n) + f(p, q, r + \tau, k, m, n) + \right. \\ &\left. + f(p, q, r, k + \tau, m, n) + f(p, q, r, k, m + \tau, n) + f(p, q, r, k, m, n + \tau) \right] + \\ &+ U \left[\delta_{p,r} + \delta_{p,k} + \delta_{p,m} + \delta_{p,n} + \delta_{q,r} + \delta_{q,k} + \delta_{q,m} + \delta_{q,n} \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Сам оператор ${}^4H_t^1$ действует на вектор ${}^4\psi_t^1 \in {}^4\tilde{\mathcal{H}}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$ по формуле

$${}^4H_t^1 {}^4\psi_t^1 = \sum_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu} ({}^4\overline{H}_t^1 f)(p, q, r, k, m, n) {}^4t_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1. \quad (3)$$

Доказательство. Подействуем гамильтонианом H на векторы ${}^4\psi_t^1 \in {}^4\tilde{\mathcal{H}}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$ с использованием обычных антикоммутиационных соотношений между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах

$$\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}^+\} = \delta_{m,n} \delta_{\gamma,\beta}, \quad \{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a_{m,\gamma}^+, a_{n,\beta}^+\} = \theta,$$

а также учтем, что $a_{m,\gamma} \varphi_0 = \theta$, где θ — нулевой элемент пространства ${}^4\tilde{\mathcal{H}}_{p,q,r,k,m,n \in Z^\nu}^1$. Отсюда получается утверждение теоремы. \square

Лемма 1. *Спектры операторов ${}^4H_t^1$ и ${}^4\overline{H}_t^1$ совпадают.*

Доказательство. Так как операторы ${}^4H_t^1$ и ${}^4\overline{H}_t^1$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то из критерия Вейля (см. [16, гл. VII, § 3]) следует существование такой последовательности векторов ψ_i , что

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_{p,q,r,k,m,n} f_i(p, q, r, k, m, n) a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0, \quad \|\psi_i\| = 1, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^4H_t^1 - \lambda)\psi_i\| &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda \in \sigma({}^4H_t^1)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|({}^4H_t^1 - \lambda)\psi_i\|^2 &= \left(({}^4H_t^1 - \lambda)\psi_i, ({}^4H_t^1 - \lambda)\psi_i BNB \right) = \\ &= \sum_{p,q,r,k,m,n} \|({}^4\overline{H}_t^1 - \lambda)f_i(p, q, r, k, m, n)\|^2 \cdot \left(a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0, a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0 \right) = \\ &= \sum_{p,q,r,k,m,n} \|({}^4\overline{H}_t^1 - \lambda)F_i(p, q, r, k, m, n)\|^2 \cdot \left(a_{n,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ a_{q,\downarrow}^+ a_{r,\uparrow}^+ a_{k,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ \varphi_0, \varphi_0 \right) = \\ &= \sum_{p,q,r,k,m,n} \|({}^4\overline{H}_t^1 - \lambda)F_i(p, q, r, k, m, n)\|^2 \cdot (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{p,q,r,k,m,n} \|({}^4\overline{H}_t^1 - \lambda)F_i(p, q, r, k, m, n)\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $i \rightarrow \infty$, где

$$F_i = \sum_{p,q,r,k,m,n} f_i(p, q, r, k, m, n), \quad \|F_i\|^2 = \sum_{p,q,r,k,m,n} |f_i(p, q, r, k, m, n)|^2 = \|\psi_i\|^2 = 1.$$

Это означает, что $\lambda \in \sigma({}^4\overline{H}_t^1)$. Следовательно, $\sigma({}^4H_t^1) \subset \sigma({}^4\overline{H}_t^1)$.

Обратно, пусть $\bar{\lambda} \in \sigma({}^4\overline{H}_t^1)$. Тогда в силу того же критерия Вейля существует такая последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, что $\|F_i\| = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|({}^4\overline{H}_t^1 - \bar{\lambda})\psi_i\| = 0.$$

Полагая

$$F_i = \sum_{p,r,t,k,m,n} f_i(p, r, t, k, m, n), \quad \|F_i\| = l \left(\sum_{p,r,t,k,m,n} |f_i(p, r, t, k, m, n)|^2 \right)^{1/2},$$

имеем $\|\psi_i\| = \|F_i\| = 1$ и

$$\|({}^4\overline{H}_t^1 - \bar{\lambda})F_i\| = \|({}^4\overline{H}_t^1 - \bar{\lambda})\psi_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда вытекает, что $\bar{\lambda} \in \sigma({}^4H_t^1)$ и, следовательно, $\sigma({}^4\overline{H}_t^1) \subset \sigma({}^4H_t^1)$. Эти два соотношения означают, что $\sigma({}^4H_t^1) = \sigma({}^4\overline{H}_t^1)$. \square

Оператор ${}^4H_t^1$ будем называть оператором шестиэлектронного четвертого триплета в модели Хаббарда.

Обозначим через \mathcal{F} преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^6) \rightarrow L_2((T^\nu)^6) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_t^1,$$

где T^ν — ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е., $\lambda(T^\nu) = 1$. Положим ${}^4\widetilde{H}_t^1 = \mathcal{F}{}^4\overline{H}_t^1\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^4\widetilde{H}_t^1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\text{as}}((T^\nu)^6)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^6)$.

Теорема 2. Преобразование Фурье переводит оператор ${}^4\overline{H}_t^1$ в ограниченный самосопряженный оператор ${}^4\widetilde{H}_t^1 = \mathcal{F}{}^4\overline{H}_t^1\mathcal{F}^{-1}$, действующий в пространстве $L_2^{\text{as}}((T^\nu)^6)$ по формуле

$$\begin{aligned} {}^4\widetilde{H}_t^{14}\psi_t^1 &= h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) + \\ &+ U \left[\int_{T^\nu} f(s, \mu, \lambda + \gamma - s, \theta, \eta, \xi) ds + \int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \lambda + \theta - s, \eta, \xi) ds + \right. \\ &+ \int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \theta, \lambda + \eta - s, \xi) ds + \int_{T^\nu} f(s, \mu, \gamma, \theta, \eta, \lambda + \xi - s) ds + \\ &+ \int_{T^\nu} f(\lambda, s, \mu + \gamma - s, \theta, \eta, \xi) ds + \int_{T^\nu} f(\lambda, s, \gamma, \mu + \theta - s, \eta, \xi) ds + \\ &\left. + \int_{T^\nu} f(\lambda, s, \gamma, \theta, \mu + \eta - s, \xi) ds + \int_{T^\nu} f(\lambda, s, \gamma, \theta, \eta, \mu + \xi - s) ds \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$h(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi) = 6A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \left[\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i + \cos \theta_i + \cos \eta_i + \cos \xi_i \right]$$

и L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^6)$.

Используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах (см. [17]) и учитывая, что $f(\lambda, \mu, \gamma, \theta, \eta, \xi)$ — антисимметричная функция, можно убедиться, что оператор ${}^4\widetilde{H}_t^1$ представим в виде

$${}^4\widetilde{H}_t^{14}\psi_t^1 = \widetilde{H}_2^1 \otimes I \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_2^2 \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{H}_3^2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} (\widetilde{H}_2^1 f)(\lambda, \mu) &= \left\{ 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i \right) \right\} f_{\Lambda_1}(\lambda) + U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s) ds, \\ (\widetilde{H}_2^2 f)(\gamma, \theta) &= \left\{ 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_2^i}{2} - \gamma_i \right) \right\} f_{\Lambda_2}(\gamma) + U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_2}(s) ds, \\ (\widetilde{H}_3^2 f)(\eta, \xi) &= \left\{ 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_3^i}{2} - \eta_i \right) \right\} f_{\Lambda_3}(\eta) - 2U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_3}(s) ds; \end{aligned}$$

здесь I — единичный оператор в пространстве двухэлектронных состояний $\widetilde{\mathcal{H}}_2$, $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$, и $\Lambda_3 = \eta + \xi$.

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [12–14], где получены явные выражения для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(A \otimes I + I \otimes B)$ и дискретного спектра $\sigma_{\text{disc}}(A \otimes I + I \otimes B)$ оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через

спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{\text{disc}}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\text{disc}}(B)$ оператора B :

$$\sigma_{\text{disc}}(A \otimes I + I \otimes B) = \left\{ \sigma(A) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{\text{ess}}(B) \right\} \setminus \left\{ (\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B)) \right\}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\text{ess}}(A \otimes I + I \otimes B) = (\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B)). \quad (8)$$

Ясно, что $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \{\lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$. Следовательно, мы должны исследовать спектр операторов двухэлектронных систем в модели Хаббарда \tilde{H}_2^1 , \tilde{H}_2^2 и \tilde{H}_2^3 .

3. Спектр операторов \tilde{H}_2^1 , \tilde{H}_2^2 и \tilde{H}_2^3 . Сначала исследуем спектр оператора

$$(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1 f_{\Lambda_1})(\lambda) = \left\{ 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_1^i}{2} - \lambda_i \right) \right\} f_{\Lambda_1}(\lambda) + U \int_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s) ds.$$

Известно, что непрерывный спектр оператора \tilde{H}_2^1 не зависит от параметра U и заполняет отрезок

$$\left[2A - 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}, 2A + \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \right].$$

Положим

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 1 + U \int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \cos \left(\frac{\Lambda_1^i}{2} - s_i \right) - z}.$$

Лемма 2. Число $z = z_0 \notin \sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1)$ является собственным значением оператора \tilde{H}_2^1 тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$, т.е. $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$.

Теорема 3.

А. Если $\nu = 1$ и $U < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение

$$z_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, \quad (9)$$

лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора.

В. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение

$$\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, \quad (10)$$

лежащее выше области непрерывного спектра этого оператора.

Доказательство. Если $U < 0$, в одномерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно убывающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^1$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ убывает от 1 до $-\infty$,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow m_{\Lambda_1}^1 - 0} -\infty.$$

Поэтому ниже значений $m_{\Lambda_1}^1$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ имеет единственный корень (9).

Если $U < 0$, в одномерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ монотонно убывающая функция z в области, лежащей выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^1$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ убывает от $+\infty$ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^1 + 0} \infty.$$

Поэтому выше значений $M_{\Lambda_1}^1$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ не имеет корней.

Если $U > 0$, в одномерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно возрастающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^1$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ возрастает от 1 до ∞ ,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow m_{\Lambda_1}^1 - 0} \infty.$$

Поэтому ниже значений $m_{\Lambda_1}^1$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ спектра не имеет корней.

Если $U > 0$, в одномерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно возрастающая функция z выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^1$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ возрастает от $-\infty$ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^1 + 0} -\infty.$$

Поэтому уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ имеет единственный корень (10), лежащий выше значения $M_{\Lambda_1}^1$. \square

Теорема 4.

- А.** Если $\nu = 2$ и $U < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение z'_1 , лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора.
- В.** Если $\nu = 2$ и $U > 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение \tilde{z}'_1 , лежащее выше области непрерывного спектра этого оператора.

Доказательство. Если $U < 0$, в двумерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно убывающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^2$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ убывает от 1 до $-\infty$,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow m_{\Lambda_1}^2 - 0} -\infty.$$

Поэтому ниже значений $m_{\Lambda_1}^2$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ имеет единственный корень в точке z'_1 .

Если $U < 0$, в двумерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно убывающая функция z выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^2$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ убывает от ∞ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^2 + 0} \infty.$$

Поэтому выше значений $M_{\Lambda_1}^2$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ не имеет корней.

Если $U > 0$, в двумерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно возрастающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^2$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ убывает от ∞ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{[z \rightarrow m_{\Lambda_1}^2 - 0]} \infty.$$

Поэтому уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ ниже области непрерывного спектра не имеет корней.

Если $U > 0$, в двумерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно возрастающая функция z выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^2$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ возрастает от $-\infty$ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^2 + 0} -\infty.$$

Поэтому выше значений $M_{\Lambda_1}^2$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ имеет единственный корень \tilde{z}'_1 . \square

Теперь рассмотрим трехмерный случай. Обозначим через W интеграл Ватсона (см. [1])

$$W = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} \approx 1,516.$$

Так как λ — нормированная мера, имеем

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{3 - \cos x - \cos y - \cos z} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{3 + \cos x + \cos y + \cos z} = \frac{W}{3}.$$

Пусть полный квазиимпульс двухэлектронных систем Λ_1 имеет вид

$$\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) = (\Lambda_1^0, \Lambda_1^0, \Lambda_1^0).$$

Теорема 5.

- А.** Если $\nu = 3$ и $U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение z_1'' , лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора. Если же $-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ не имеет собственных значений, лежащих ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.
- В.** Если $\nu = 3$ и $U > \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ имеет единственное собственное значение \tilde{z}_1'' , лежащее выше области непрерывного спектра этого оператора. Если же $0 < U < \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ не имеет собственных значений, лежащих выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

Доказательство. Если $U < 0$, то в трехмерном случае $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ — монотонно убывающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ убывает от 1 до $1 + \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)}$,

$$D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow m_{\Lambda_1}^3 - 0} 1 + \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)}.$$

Поэтому ниже значения $m_{\Lambda_1}^3$ уравнение $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) = 0$ имеет единственный корень в точке z_1'' , если выполняется условие

$$U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}.$$

Если же $-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U < 0$, то уравнение $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) = 0$ не имеет корней ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$.

Если $U < 0$, в трехмерном случае, $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ — монотонно убывающая функция z в области, лежащей выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ убывает от $1 - \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)} > 1$ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^3 + 0} 1 - \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)} > 1.$$

Поэтому выше значений $M_{\Lambda_1}^3$ уравнение $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) = 0$ не имеет корней.

Если $U > 0$, в трехмерном случае, $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ — монотонно возрастающая функция z в области, лежащей ниже непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z < m_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z)$ возрастает от $1 + \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)} > 1$,

$$D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) \xrightarrow{z \rightarrow m_{\Lambda_1}^3 - 0} 1 + \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)} > 1.$$

Поэтому ниже значений $m_{\Lambda_1}^3$ уравнение $D_{\Lambda_1}^{\nu}(z) = 0$ не имеет корней.

Если $U > 0$, в трехмерном случае, $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ — монотонно возрастающая функция z в области, лежащей выше непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$. Для $z > M_{\Lambda_1}^3$ функция $D_{\Lambda_1}^\nu(z)$ возрастает от $1 - \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)}$ до 1,

$$D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 1, \quad D_{\Lambda_1}^\nu(z) \xrightarrow{z \rightarrow M_{\Lambda_1}^3 + 0} 1 - \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)}.$$

Поэтому выше значений $M_{\Lambda_1}^3$ уравнение $D_{\Lambda_1}^\nu(z) = 0$ имеет единственный корень \tilde{z}_1' , если выполняется условие

$$1 - \frac{UW}{12B \cos(\Lambda_1^0/2)} < 0, \quad \text{т.е.} \quad U > \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}.$$

Ясно, что если это условие не выполняется, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ выше области непрерывного спектра этого оператора не имеет собственных значений. \square

Так как операторы \tilde{H}_2^1 и \tilde{H}_2^2 тождественны, их спектры одинаковы; нужно лишь в полученных результатах Λ_1 заменить на Λ_2 .

Теперь исследуем спектр оператора \tilde{H}_2^3 . Непрерывный спектр оператора \tilde{H}_2^3 представляет собой отрезок

$$\sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_2^3) = \left[2A - 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}, 2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} \right].$$

Положим

$$D_{\Lambda_3}^\nu(z) = 1 - 2U \int_{T^\nu} \frac{ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{2A + 4B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} \cos(\frac{\Lambda_3^1}{2} - s_i) - z}.$$

Теорема 6.

А. Если $\nu = 1$ и $U < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ имеет единственное собственное значение

$$\tilde{z}_3 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}},$$

лежащее выше области непрерывного спектра этого оператора.

В. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ имеет единственное собственное значение

$$z_3 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}},$$

лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

В двумерном случае справедлив аналог теоремы 6; в этом случае собственное значение оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ обозначим через \tilde{z}_3 и z_3 соответственно.

Теперь рассмотрим трехмерный случай. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.

А. Если $\nu = 3$ и $U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ имеет единственное собственное значение \tilde{z}_3'' , лежащее выше области непрерывного спектра этого оператора. Если же $-\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < U < 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ не имеет собственных значений, лежащих выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$.

В. Если $\nu = 3$ и $U > \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 0$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ имеет единственное собственное значение z_3'' , лежащее ниже области непрерывного спектра этого оператора. Если же

$0 < U < \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}$, то оператор $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ не имеет собственных значений, лежащих ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$.

Теорема 7 доказывается аналогично теореме 5.

4. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$. Теперь, используя полученные результаты и представления (6), опишем структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии шестизлектронных систем модели Хаббарда в четвертом триплетном состоянии оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$.

Теорема 8. Пусть $\nu = 1$ и $U < 0$. Тогда существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + \tilde{z}_3, b + d + \tilde{z}_3] \cup \\ & \cup [a + e + z_2, b + f + z_2] \cup [a + z_2 + \tilde{z}_3, b + z_2 + \tilde{z}_3] \cup [c + e + z_1, d + f + z_1] \cup \\ & \cup [c + z_1 + \tilde{z}_3, d + z_1 + \tilde{z}_3] \cup [e + z_1 + z_2, f + z_1 + z_2]; \end{aligned}$$

здесь и далее

$$\begin{aligned} a &= 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, & b &= 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, & c &= 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, \\ d &= 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, & e &= 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, & e &= 2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, \\ z_1 &= 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, & z_2 &= 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}, \\ & & \tilde{z}_3 &= 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}. \end{aligned}$$

Дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ содержит не более одного собственного значения:

$$\sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \{z_1 + z_2 + \tilde{z}_3\} \quad \text{либо} \quad \sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \emptyset.$$

Доказательство. В одномерном случае непрерывные спектры операторов $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ суть отрезки

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1) &= \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2} \right], \\ \sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2) &= \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2} \right], \\ \sigma_{\text{cont}}(\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3) &= \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2}, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right]; \end{aligned}$$

эти операторы имеют собственные значения z_1 , z_2 и \tilde{z}_3 соответственно. Поэтому спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ представляет собой множество

$$\left\{ \lambda + \mu + \gamma : \lambda \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2), \gamma \in \sigma(\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3) \right\}$$

(см. [12–14]). Отсюда, из представления (6) и формул (7) и (8)) следует, что существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков:

$$\begin{aligned} & \left[6A - 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right), 6A + 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) \right], \\ & \left[4A - 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2}{2} \right) + \tilde{z}_3, 4A + 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2}{2} \right) + \tilde{z}_3 \right], \\ & \left[4A - 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + z_2, 4A + 4B \left(\cos \frac{\Lambda_1}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + z_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2} + z_2 + \tilde{z}_3, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_1}{2} + z_2 + \tilde{z}_3 \right], \\ & \left[4A - 4B \left(\cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + z_1, 4A + 4B \left(\cos \frac{\Lambda_2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3}{2} \right) + z_1 \right], \\ & \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2} + z_1 + \tilde{z}_2, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_2}{2} + z_1 + \tilde{z}_2 \right], \\ & \left[2A - 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2} + z_1 + z_2, 2A + 4B \cos \frac{\Lambda_3}{2} + z_1 + z_2 \right], \end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ – состоит из единственного собственного значения $z_1 + z_2 + \tilde{z}_3$, т.е.

$$\sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \{z_1 + z_2 + \tilde{z}_3\}.$$

Если $z_1 + z_2 + \tilde{z}_3 \in \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1)$, то дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст. \square

Теорема 9. Пусть $\nu = 1$ и $U > 0$. Тогда существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a + c + e, b + d + f] \cup [a + c + z_3, b + d + z_3] \cup \\ & \cup [a + e + \tilde{z}_2, b + f + \tilde{z}_2] \cup [a + \tilde{z}_2 + z_3, b + \tilde{z}_2 + z_3] \cup [c + e + \tilde{z}_1, d + f + \tilde{z}_1] \cup \\ & \cup [c + \tilde{z}_1 + z_3, d + \tilde{z}_1 + z_3] \cup [e + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2, f + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2]; \end{aligned}$$

здесь

$$\tilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_1}{2}}, \quad \tilde{z}_2 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_2}{2}}, \quad z_3 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2 \cos^2 \frac{\Lambda_3}{2}}.$$

Дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ содержит не более одного собственного значения:

$$\sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + zfd_3\} \quad \text{либо} \quad \sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \emptyset.$$

Теорема 9 доказывается аналогично теореме 8. В двумерном случае также имеет место аналог этой теоремы.

Теорема 10. Пусть $\nu = 3$ и $U < 0$.

A. Если

$$U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \quad \text{или} \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3'', b_1 + d_1 + \tilde{z}_3''] \cup \\ & \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup [a_1 + z_2'' + \tilde{z}_3'', b_1 + z_2'' + \tilde{z}_3''] \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup \\ & \cup [c_1 + z_1'' + \tilde{z}_3'', d_1 + z_1'' + \tilde{z}_3''] \cup [e_1 + z_1'' + z_2'', f_1 + z_1'' + z_2'']; \quad (11) \end{aligned}$$

здесь и далее

$$a_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad b_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad c_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

$$d_1 = 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad e_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad f_1 = 2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2},$$

а z_1'' , z_2'' и \tilde{z}_3'' – собственные значения операторов $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, соответственно. Дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ содержит не более одного собственного значения:

$$\sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \{z_1'' + z_2'' + \tilde{z}_3''\}, \quad \text{либо} \quad \sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \emptyset.$$

В. Если

$$-\frac{6B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}}{W} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$$

или

$$-\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \leq U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением четырех отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup \\ & \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup [e_1 + z_1'' + z_2'', f_1 + z_1'' + z_2''] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3'', b_1 + d_1 + \tilde{z}_3''] \cup \\ & \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup [a_1 + z_2'' + \tilde{z}_3'', f_1 + z_2'' + \tilde{z}_3''], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3'', b_1 + d_1 + \tilde{z}_3''] \cup \\ & \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup [c_1 + z_1'' + \tilde{z}_3'', d_1 + z_1'' + \tilde{z}_3''], \end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

С. Если

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$-\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq U < -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением двух отрезков:

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''],$$

или

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''],$$

или

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3'', b_1 + d_1 + \tilde{z}_3''],$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

D. Если

$$-\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} \leq U < 0, \quad \text{или} \quad -\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} \leq U < 0, \quad \text{или} \quad -\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} \leq U < 0,$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ состоит из единственного отрезка

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1],$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

Доказательство. При $\nu = 3$ из теорем 5 и 7 следует, что если выполняется условие А теоремы 10, то непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ является отрезком $\left[2A - 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}\right]$, дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$ состоит из единственного собственного значения z_1'' , непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ является отрезком $\left[2A - 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}\right]$, дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ состоит из единственного собственного значения z_2'' , непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ является отрезком $\left[2A - 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, 2A + 12B \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}\right]$, дискретный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ состоит из единственного собственного значения \tilde{z}_3'' . Поэтому существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ содержит не более одного собственного значения.

Если выполняется условие В теоремы 10, то лишь один из операторов $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$ обладает единственным собственным значением, а дискретные спектры остальных двух операторов пусты. Поэтому существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

Остальные утверждение теоремы 10 доказывается аналогично. \square

Теорема 11. Пусть $\nu = 3$ и $U > 0$.

A. Если

$$U > \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U > \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$U > \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением семи отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3'', b_1 + d_1 + z_3''] \cup \\ & \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup [a_1 + z_2'' + z_3'', b_1 + z_2'' + z_3''] \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup \\ & \cup [c_1 + z_1'' + z_3'', d_1 + z_1'' + z_3''] \cup [e_1 + z_1'' + z_2'', f_1 + z_1'' + z_2'']; \end{aligned}$$

здесь z_1'' , z_2'' и z_3'' — собственные значения операторов $\tilde{H}_{2\Lambda_1}^1$, $\tilde{H}_{2\Lambda_2}^2$ и $\tilde{H}_{2\Lambda_3}^3$, соответственно.

Дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ содержит не более одного собственного значения:

$$\sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \{z_1'' + z_2'' + z_3''\} \quad \text{либо} \quad \sigma_{\text{disc}}({}^4\tilde{H}_t^1) = \emptyset.$$

В. Если

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < U \leq \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U \leq \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2},$$

или

$$\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением четырех отрезков:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup \\ & \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup [e_1 + z_1'' + z_2'', f_1 + z_1'' + z_2''], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3'', b_1 + d_1 + z_3''] \cup \\ & [a_1 + e_1 + z_2'', b_1 + f_1 + z_2''] \cup [a_1 + z_2'' + z_3'', f_1 + z_2'' + z_3''], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = & [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + z_3'', b_1 + d_1 + z_3''] \cup \\ & \cup [c_1 + e_1 + z_1'', d_1 + f_1 + z_1''] \cup [c_1 + z_1'' + z_3'', d_1 + z_1'' + z_3''], \end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

С. Если

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} > 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2} < U \leq \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} > \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

или

$$\frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < U \leq \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_3^0}{2} < 2 \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \cos \frac{\Lambda_1^0}{2} < \cos \frac{\Lambda_2^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ является объединением двух отрезков:

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [c_1 + e_1 + \tilde{z}_1'', d_1 + f_1 + \tilde{z}_1''],$$

или

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + e_1 + \tilde{z}_2'', b_1 + f_1 + \tilde{z}_2''],$$

или

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1] \cup [a_1 + c_1 + \tilde{z}_3'', b_1 + d_1 + \tilde{z}_3''],$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

Д. Если

$$0 < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_1^0}{2}, \quad \text{или} \quad 0 < U \leq \frac{12B}{W} \cos \frac{\Lambda_2^0}{2}, \quad \text{или} \quad 0 < U \leq \frac{6B}{W} \cos \frac{\Lambda_3^0}{2},$$

то существенный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ состоит из единственного отрезка:

$$\sigma_{\text{ess}}({}^4\tilde{H}_t^1) = [a_1 + c_1 + e_1, b_1 + d_1 + f_1],$$

а дискретный спектр оператора ${}^4\tilde{H}_t^1$ пуст.

Теорема 11 доказывается аналогично теореме 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальков В. В., Овчинников С. Г., Петраковский О. Г. Спектр возбуждений двухмагнитных систем в легкоосном квазиразмерном ферромагнетике // Физика твердого тела. — 1988. — 30. — С. 3044–3047.
2. Изюмов Ю. А. Модель Хаббарда в режиме сильных корреляций // Усп. физ. наук. — 1995. — 165, № 4. — С. 403–427.
3. Изюмов Ю. А., Чащин Н. И., Алексеев Д. С. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. — М.-Ижевск, 2006.
4. Карпенко Б. В., Дякин В. В., Будрина Г. Л. Двухэлектронные системы в модели Хаббарда // Физика металлов и металловедение. — 1986. — 61, № 4. — С. 702–706.
5. Овчинников С. Г., Шнейдер Е. И. Спектральные функции модели Хаббарда в случае половинного заполнения // Физика твердого тела. — 2004. — 46, № 8. — С. 1428–1432.

6. *Tashpulatov S. M.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда// Теор. мат. физ. — 2014. — 179, № 3. — С. 387–405.
7. *Tashpulatov S. M.* Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии шестиэлектронных систем в модели Хаббарда. Второе синглетное состояние// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2023. — 29, № 3. — С. 210–230.
8. *Anderson P. W.* Localized magnetic states in metals// Phys. Rev. — 1961. — 124. — P. 41–53.
9. *Arovas D. P., Berg E., Kivelson S., Raghy S.* The Hubbard model// Ann. Rev. Condens. Matter Phys. — 2022. — 13. — P. 239–274.
10. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals// Phys. Rev. Lett. — 1963. — 10. — P. 159–162.
11. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. Roy. Soc. A. — 1963. — 276. — P. 238–257.
12. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 235. — P. 75–113.
13. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. II. The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 237. — P. 223–254.
14. *Ichinose T.* Tensor products of linear operators. Spectral theory// in: Banach Center Publications. Vol. 8. — Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1982. — P. 294–300.
15. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals// Progr. Theor. Phys. — 1963. — 30. — P. 275–289.
16. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 1. Functional Analysis. — New York: Academic Press, 1972.
17. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 4. Operator Analysis. — New York: Academic Press, 1982.
18. *Tashpulatov S. M.* Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — 697. — 012025.
19. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state// Lobachevskii J. Math. — 2017. — 38, № 3. — P. 530–541.
20. *Tashpulatov S. M.* Structure of essential spectrum and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model-doublet state// in: Operator Theory and Differential Equations (*Kusraev A. G., Totieva Z. D.*, eds.). — Cham: Birkhäuser, 2021. — P. 275–301.
21. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. Fifth doublet state// Bull. Inst. Math. — 2018. — 5. — P. 43–52.
22. *Tashpulatov S. M.* Structure of the essential and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. Third and Fourth doublet states// J. Appl. Math. Phys. — 2020. — 8, № 12. — P. 2886–2918.
23. *Tashpulatov S. M.* Structure of the essential and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. Sextet and quartet states// Am. Rev. Math. Stat. — 2021. — 9. — P. 12–40.
24. *Tashpulatov S. M.* Structure of the essential and discrete spectra of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. Fourth quartet state// Far Eastern Math. J. — 2023. — 23, № 1. — P. 112–133.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ташпулатов Садулла Мамаражабович (Tashpulatov Sadulla Mamarazhabovich)
 Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент
 (Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent)
 E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 49–71
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-49-71

УДК 517.928, 517.929

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УРАВНЕНИИ МЕДЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2024 г. О. Б. ЦЕХАН

Аннотация. Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в уравнении для медленных переменных на основе алгебраического подхода — погружения системы с запаздыванием в семейство систем с расширенным пространством состояний — и нелокальной замены переменных разработан метод декомпозиции по темпам изменения переменных. Доказано существование и построена асимптотика преобразования Ляпунова, обобщающего на системы с запаздыванием расщепляющее преобразование Чанга и осуществляющего полную декомпозицию двухтемповой системы с постоянным запаздыванием на две независимые подсистемы меньших размеров, чем исходная: отдельно по быстрой и медленной переменным. Доказано, что расщепленная система алгебраически и асимптотически эквивалентна исходной системе в расширенном пространстве состояний. Построена асимптотика и исследовано действие асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, нестационарная система, запаздывание, расщепляющее преобразование, асимптотическая аппроксимация.

SPLITTING TRANSFORMATION FOR A LINEAR NONSTATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH CONSTANT DELAY IN THE EQUATION FOR THE SLOW VARIABLE

© 2024 О. В. TSEKHAN

ABSTRACT. A method of splitting with respect to rates in change of variables is developed for a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay in the equation for slow variables. The splitting method is based on an algebraic approach, namely, the immersion of the system with delay into a family of systems with an extended state space, and a nonlocal change of variables. The existence is proved and the asymptotics of the Lyapunov transformation is constructed, which generalizes the splitting Chang transformation to systems with delay and performs a complete splitting of a two-rate system with constant delay into two independent subsystems of lower dimensions than the original system: separately for the fast and slow variables. We prove that the split system is algebraically and asymptotically equivalent to the original system in the extended state space. The asymptotics is constructed and the action of asymptotic approximations of the splitting transform is examined.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, nonstationary system, delay, splitting transformation, asymptotic approximation.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K17, 34K26, 41A60

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

1. Введение. Сингулярно возмущенные системы с малым параметром при производной являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных (см. [11, 15, 22, 45, 49, 53] и ссылки в них).

В математической теории управления при решении задач анализа и синтеза для сингулярно возмущенных систем возникают проблемы, обусловленные их многотемповостью. Например, это проблемы, связанные с высокой размерностью и вычислительной жесткостью моделей в форме дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, с зависимостью от параметра условий наличия структурных свойств, а также законов управления и наблюдения такими системами.

Исследование системы может упроститься, если она с помощью некоторого оператора преобразования может быть приведена к более простой форме (см. [14, 27]). Для многотемповых систем такого упрощения можно достичь, если имеется возможность представить систему в форме с разделенными по темпам переменными, т.е. расщепить (декомпозировать) многотемповую систему на независимые подсистемы в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Проблема применения декомпозиционного подхода заключается в том, чтобы установить условия на параметры исходной системы, при которых возможна точная или асимптотическая декомпозиция сингулярно возмущенной системы и связанных с ней объектов, построить соответствующие преобразования и исследовать их асимптотику и действие.

Для сингулярно возмущенной системы декомпозицию можно реализовать на основе метода пограничных функций А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова (см. [10]), метода интегральных многообразий Н. И. Боголюбова и Ю. А. Митропольского (см. [9]), с помощью невырожденной замены переменных Чанга (см. [38]).

Метод погранфункций позволяет выполнять декомпозицию сингулярно возмущенных систем на основе описания движений с различными темпами в разных масштабах времени и асимптотического разложения разделенных по темпам переменных. О применении метода погранфункций для решения задач теории управления сингулярно возмущенными системами см., например, [11, 15, 16, 53] и ссылки там. Метод погранфункций для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием развивается в [63].

Метод интегральных многообразий реализует геометрический подход к декомпозиции. Он основан на существовании интегральных многообразий медленных и быстрых движений (см. [29]), в силу чего фазовое пространство конечномерных двухтемповых систем может быть разложено в прямую сумму двух интегральных многообразий. Асимптотические методы, основанные на технике интегральных многообразий, развивались и применялись к сингулярно возмущенным системам управления в [28, 29, 40, 41, 44–47, 61, 63]. В алгебраической форме подход к декомпозиции сингулярно возмущенной системы, основанный на методе интегральных многообразий, эквивалентен построению такого преобразования вектора состояний, что в терминах нового вектора состояния динамика быстрых и медленных движений описывается независимыми друг от друга подсистемами, а матрица сингулярно возмущенной системы преобразуется к квазитреугольному и блочно-диагональному виду. При этом и само преобразование, и матрицы расщепленной системы могут быть представлены в виде асимптотических разложений по малому параметру. Взаимосвязь между некоторыми подходами к декомпозиции линейных разнотемповых систем обсуждалась в [59].

В настоящей работе используется алгебраический подход к декомпозиции сингулярно возмущенных систем с помощью расщепляющего преобразования. Впервые невырожденное линейное расщепляющее преобразование для нестационарной линейной сингулярно возмущенной системы без запаздывания было предложено Чангом [38] и далее использовалось и развивалось в многочисленных исследованиях (см. [1, 12, 13, 20, 21, 26, 28, 29, 36, 38, 39, 42, 43, 48, 50, 57, 60–62, 67, 68] и ссылки там).

Наличие запаздывания отражает объективное свойство инерционности систем, так или иначе присущее любым реальным процессам, и приводит к моделям, описываемым функционально-

дифференциальными уравнениями (см. [31]). Современные исследования по системам с запаздываниям изложены в [30, 40, 45, 56, 60]. Сингулярно возмущенные системы с запаздыванием с точки зрения декомпозиции изучены гораздо слабее. Присутствие запаздывания в модели определяет особенности и принципиальные трудности разработки методов декомпозиции, что связано с бесконечномерностью пространства состояний систем с запаздыванием.

В отличие от систем без запаздывания, класс преобразований для систем с запаздыванием включает функциональные (нелокальные по времени) преобразования. Вопросы построения преобразований для систем с запаздыванием изучались в [18, 24, 25, 37]. Вопросы исследования различных групп преобразований для нестационарных линейных систем изучались в [3, 4, 6, 14]. Свойства операторов сдвига исследовались в [2].

Для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием расщепляющее преобразование строилось в основном в случае малого запаздывания (см. [41, 46, 52, 57, 58]). Вопросы построения и анализа расщепляющего преобразования для систем с немалым (фиксированным) запаздыванием менее изучены.

Наличие «немалого» запаздывания в модели вносит особенности и принципиальные сложности как в разработку методов декомпозиции, так и в его результаты. Так, например, локальная замена переменных из преобразования Чанга (см. [38]) при применении ее к сингулярно возмущенной системе с постоянным запаздыванием приводит лишь к частичной декомпозиции системы (см. [51]); функциональные преобразования систем с запаздыванием могут привести к изменению пространства решений (см. [18, 24, 25]); получение оценок значений параметра, при которой справедливы аппроксимации, требует оценок для функциональных матриц; аппроксимации более высокого порядка (например, второго порядка для решений сингулярно возмущенных систем без запаздывания из [48]) не переносятся напрямую на сингулярно возмущенные системы с запаздыванием из-за нелокального характера преобразований, выполняющих точную декомпозицию таких систем.

Для стационарных сингулярно возмущенных систем с немалым запаздыванием расщепляющие преобразования строились в [19, 44, 45, 47, 51]. Замена переменных в [19] приводит к изменению оператора системы, асимптотический анализ преобразования не производился. В [44, 45] на основе асимптотической декомпозиции строятся аппроксимирующие подсистемы первого порядка (медленная и быстрая); расщепляющее преобразование не строится. Для нестационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием в обеих переменных расщепляющее преобразование ранее не строилось.

В связи с этим возникают задачи построения и обоснования преобразования Ляпунова, обобщающего преобразование Чанга на случай линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием, получения аппроксимаций расщепляющего преобразования, расщепленной системы и решения исходной системы. Инвариантами преобразования Ляпунова являются характеристическая матрица системы, структурные свойства управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости системы (см. [25]), класс системы (см. [5]), многие асимптотические характеристики решений линейных систем (см. [23, с. 3]).

Ранее в работах автора [33, 34, 54, 64–66] построено невырожденное расщепляющее преобразование, обобщающее преобразование Чанга на линейные стационарные, нестационарные сингулярно возмущенные функционально-дифференциальные системы с конечным запаздыванием (как поточечным, так и распределенным) только в медленных переменных, стационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием на шкалах для D- и R-моделей. Доказывается оценка для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

В настоящей работе, развивающей предыдущие работы автора, разрабатывается расщепляющее преобразование для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы, содержащей постоянное запаздывание в медленной и быстрой переменных состояниях в уравнении медленной переменной. Используется погружение системы в семейство систем с запаздыванием в

расширенном пространстве состояний, что позволяет расширить класс возможных замен переменных. Операторный подход и представление оператора правой части системы в кольце формальных степенных рядов позволяют применять алгебраическую технику работы с матрицами над кольцом формальных степенных рядов, алгебраические свойства оператора запаздывания.

В работе используются следующие обозначения.

\mathbb{R} — поле вещественных чисел;

\mathbb{R}^n — векторное пространство n -мерных векторов с элементами из \mathbb{R} ;

$\mathbb{R}^{k \times s}$ — множество $(k \times s)$ -матриц с элементами из \mathbb{R} ;

$C(T; \mathbb{R})$ — кольцо непрерывных на T вещественных функций;

$PC(T; \mathbb{R}^n)$ — пространство n -вектор функций, кусочно непрерывных на T ;

$\bar{C}(T; \mathbb{R}^n)$ — пространство n -вектор функций, ограниченных и непрерывных на T ;

$C^1(T; \mathbb{R}^{k \times s})$ — множество непрерывно дифференцируемых $(k \times s)$ -матричнозначных функций;

$R[\mu, z]$ — кольцо всех полиномов от μ, z над кольцом R ;

$R[z]$ — кольцо всех полиномов от z над кольцом R ;

$R_j[z]$ — кольцо полиномов степени не выше j от z над кольцом R ;

$R_{ij}[\mu, z]$ — кольцо полиномов от двух переменных: переменной μ (степени не выше i) и z (степени не выше j) над кольцом R ;

$R[[\mu; z]]$ — кольцо формальных степенных рядов от двух переменных μ, z над кольцом R ;

E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица.

2. Исследуемая система. Постановка задач. Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с постоянным запаздыванием по состоянию:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{10}(t)x(t) + A_{11}(t)x(t-h) + A_{20}(t)y(t) + A_{21}(t)y(t-h), \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad t \in T \triangleq [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $h = \text{const} > 0$ — запаздывание, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — матричные функции подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими (точная гладкость указана ниже).

Далее запись $f(\cdot)$ означает реализацию заданной на T функции $f(t)$ аргумента t , $t \in T$, рассматриваемую как единое целое (элемент некоторого пространства функций, например, $C(T; \mathbb{R})$).

При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ под *состоянием* системы (1) в момент времени $t \in T$ понимаем n -вектор функции

$$z_t(\cdot, \mu) \triangleq (x(\tau, \mu), y(\tau, \mu), \tau \in [t-h, t]) \in PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n).$$

Таким образом, пространство состояний системы (1) — это $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$.

С системой (1) связаны не зависящие от параметра μ вырожденная система и система погранслоя, которые формально получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$ (см. [35]).

Пусть $A_3(t)$, $A_4(t)$ продолжены влево на $T_h \triangleq [t_0-h, t_0]$. Тогда для вырожденной системы при справедливо представление

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_{s0}(t)x_s(t) + A_{s1}(t)x_s(t-h), & x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \in T, \\ A_{sj}(t) =: A_{1j}(t) - A_{2j}(t)A_4^{-1}(t-jh)A_3(t-jh), & j = 0, 1, \quad t \in T. \end{cases} \quad (2)$$

Вырожденная система (2) представляет собой n_1 -мерную нестационарную систему с запаздыванием в состоянии.

Система погранслоя, соответствующая (1), может быть получена, если рассмотреть систему (1) в «растянутой» шкале времени: $\tau = (t - t_0)/\mu$, и положить $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) = A_4(t_0)y_f(\tau), & \tau \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \\ y_f(\tau) = y(t_0 + \mu\tau), & y_f \in \mathbb{R}^{n_2}. \end{cases} \quad (3)$$

Система погранслоя (3) является стационарной системой размерности n_2 без запаздывания.

Далее будет установлена связь между исходной системой (1), ее вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3).

Постановка задач. Для системы (1) построить и обосновать преобразование Ляпунова, обобщающее расщепляющее преобразование Чанга (см. [38]) на систему (1) и при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ осуществляющее полную декомпозицию исходной двухтемповой системы на две независимые подсистемы меньших размеров, чем исходная: отдельно по быстрой и медленной переменным. Построить асимптотику и исследовать действие асимптотических аппроксимаций преобразования, установить связь между матрицами исходной системы и асимптотическими аппроксимациями матриц расщепленной системы.

3. Операторная форма представления линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Представим правую часть системы (1) в операторной форме. Для этого на множестве дифференцируемых функций введем оператор дифференцирования $p \triangleq d/dt$ и для заданного $h \in (0, +\infty)$ на множестве ограниченных функций — оператор чистого запаздывания e^{-ph} :

$$\begin{aligned} e^{-ph}x(t) &= x(t-h), & e^{-jph}x(t) &= x(t-jh), \\ e^{-ph}f(x)x(t) &= f(t-h)e^{-ph}x(t) = f(t-h)x(t-h). \end{aligned} \quad (4)$$

Корректность представления оператора чистого запаздывания в экспоненциальной форме доказана в [55, утверждение 2.5].

Обозначим через $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph})$, $i = 1, 2$, ограниченные на T функциональные операторы

$$\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) : PC([t-h, t]; \mathbb{R}^{n_1}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}, \quad \mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Ограниченность на T операторов (5) следует из ограниченности на T матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, и ограниченности оператора запаздывания e^{-ph} на множестве ограниченных функций (см. [2]). Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t), \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad t \in T. \end{cases} \quad (6)$$

Определим блочную матрицу

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

и представим ее в виде

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t)e^{-ph}, \quad (8)$$

где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_{10}(t) & A_{20}(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Класс блочных $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathbf{A}(t, e^{-ph})$ вида (8), (9) обозначим через \mathcal{A}_h .

Введем обозначение $\mathcal{M} = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$ и по параметрам системы (1) определим согласно (6)–(9) блочный $(n \times n)$ -оператор правой части системы (1):

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ \mu^{-1} A_3(t) & \mu^{-1} A_4(t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Множество операторов $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (10) обозначим \mathcal{A}_μ .

Положим $n = n_1 + n_2$ и $z' = (x', y)'$, где $'$ — символ транспонирования. С учетом введенного оператора (10) и представления (6) систему (1) можно записать в виде

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Отождествим систему (11) с матричным оператором $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{A}_\mu$. Совокупность всех таких операторов с непрерывными на T компонентами (т.е. систем вида (11), (10), (5) с пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$) обозначим Σ_h .

4. Расширение пространства состояний и погружение линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в семейство. Построим преобразование, выполняющее полную декомпозицию системы (1) на независимые подсистемы по темпам изменения переменных. Одним из способов построения операторов преобразования для систем дифференциальных уравнений является определение замены переменных.

В общем случае точечной заменой переменных нельзя привести линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с запаздыванием к системе с разделенными движениями в том же функциональном пространстве состояний. Это эквивалентно утверждению, что преобразованиями из класса операторов без запаздывания нельзя в общем случае добиться полного расщепления системы с запаздыванием. Продемонстрируем это на примере.

Пример 1. Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с запаздыванием вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x(t-h) + y(t-h), \\ \mu \dot{y}(t) = -x(t) - y(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12)$$

оператор правой части которой имеет вид

$$A_\mu = \begin{pmatrix} -1 + e^{-ph} & e^{-ph} \\ -1/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Будем искать невырожденную матрицу преобразований в виде

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}, \quad g_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (14)$$

Применим преобразование (14) к системе (13) (см. [5, с. 42]). Тогда преобразованная матрица системы имеет вид

$$G * A_\mu = \frac{1}{\mu(-g_2g_3 + g_1g_4)} \times \\ \times \begin{pmatrix} g_1(g_2 - \mu(1 - e^{-ph})g_4) + g_3(g_2 + g_4\mu e^{-ph}) & g_2^2 + g_4^2\mu e^{-ph} + g_2g_4(1 - \mu(1 - e^{-ph})) \\ -g_1^2 - g_3^2\mu e^{-ph} - g_1g_3(1 - \mu(1 - e^{-ph})) & -g_1(g_2 + g_4) + \mu g_3(g_2 - e^{-ph}(g_2 + g_4)) \end{pmatrix}.$$

Чтобы система расщеплялась, матрица преобразованной системы должна быть диагональной. Это равносильно тому, что при любых μ и z система уравнений

$$\begin{cases} g_2(g_2 + g_4) + g_4(g_4 + g_2)\mu z - g_2g_4\mu = 0, \\ -g_1(g_1 + g_3) - g_3(g_3 + g_1)\mu z + g_1g_3\mu = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно g_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Легко видеть, что это возможно только при $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0$, что невозможно для невырожденной матрицы преобразований G .

Вместе с тем, для систем с запаздыванием естественно рассматривать классы преобразований, порождаемые нелокальными заменами переменных, включающими запаздывание (см. [25, \mathcal{R}_1 – \mathcal{R}_4]). Однако можно показать, что в общем случае преобразованиями из того же класса, что и оператор системы, т.е. преобразованиями с конечным запаздыванием, тоже нельзя добиться полного расщепления.

Утверждение 1. *Существуют такие линейные нестационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием, что преобразованием с конечным запаздыванием нельзя добиться полного расщепления по темпам.*

Для построения оператора преобразования, выполняющего полное расщепление системы (1) по темпам изменения переменных, погрузим пространство состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$ системы (1) в пространство $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ и будем искать оператор преобразования, порождаемый нелокальной заменой переменных в расширенном пространстве состояний.

Опишем процесс погружения.

Предположения.

- (i) Корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения $\det(\lambda E_{n_2} - A_4(t)) = 0$ матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < -2\gamma < 0$ для всех $t \in T$, $\gamma = \operatorname{const} > 0$;
- (ii) $\|A_4(t)\| \leq c_2$ для всех $t \in T$;
- (iii) $\|\dot{A}_4(t)\| \leq \beta$ для всех $t \in T$.

Предположения (i)–(iii) гарантируют, что любая система из семейства быстрых подсистем, связанных с (1), асимптотически устойчива (см. [35]). При этом из (i) следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$.

Погрузим класс \mathcal{A}_h операторов (7) в класс \mathcal{O}_h нестационарных $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathcal{O}_h(t, e^{-ph})$, $t \in T$, вида

$$\mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t)e^{-ph}, \quad t \in T,$$

где $A_i(t) \in \bar{C}(T; \mathbb{R}^{n \times n})$ — произвольные $(n \times n)$ -матричные функции, непрерывные и ограниченные на T . Таким образом, \mathcal{O}_h — это подмножество кольца $R^{n \times n}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = \bar{C}(T, \mathbb{R})$, $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_h$ с непрерывными ограниченными на T элементами из кольца $\bar{C}(T; \mathbb{R})[z]$, $z = e^{-ph}$.

Наряду с \mathcal{O}_h определим также класс \mathcal{O}_μ зависящих от параметра нестационарных $(n \times n)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_\mu(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{O}_h(t, e^{-ph}), \quad \mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_h. \quad (15)$$

Тогда определенное выше множество \mathcal{A}_μ является подклассом класса \mathcal{O}_μ , состоящим из зависящих от параметра блочных $(n \times n)$ -матричных операторов вида (10), (5).

Продолжим с $T = [t_0, t_1]$ на $(-\infty, t_1]$ матричные функции $A_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, так, что они ограничены, непрерывно дифференцируемы и $A_4(t)$ удовлетворяет предположению (i) для любого $t \in (-\infty, t_1]$. Сохраним для них прежние обозначения.

Погрузим класс операторов \mathcal{O}_μ , содержащий оператор $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ правой части системы (11), в семейство классов $\mathcal{O}_{\mu k}$, $k = 1, 2, \dots$, определенное следующим образом.

Для произвольных целых $k, s, q > 0$ определим класс $\mathcal{O}_k^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = M_0(t, \mu) + M_1(t, \mu)e^{-ph} + \dots + M_k(t, \mu)e^{-kph}, \quad t \in T, \quad (16)$$

где

$$M_j(t, \mu) = \sum_{m=j}^k \mu^m M_j^m(t), \quad j = 0, \dots, k,$$

$M_j^m(t)$, $m = 0, 1, \dots, j$, — заданные $(s \times q)$ -матричные функции с ограниченными на $[t_0 - kh, t_0] \cup T$ элементами из кольца $\bar{C}([t - kh, t]; \mathbb{R})[\mu, z]$, $z = e^{-ph}$; область определения и область значений суть

$$D(\mathcal{O}_k^{s \times q}) = PC([t - kh, t_1]; \mathbb{R}^s), \quad \operatorname{Im}(\mathcal{O}_k^{s \times q}) = \mathbb{R}^q.$$

Аналогично (15) определим для $k = 1, 2, \dots$ классы $\mathcal{O}_{\mu k}^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_{\mu k}^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}), \quad \mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_k^{s \times q}. \quad (17)$$

При $k = 1$, $s = q = n$ имеем $\mathcal{O}_1^{n \times n} = \mathcal{O}_h$, $\mathcal{O}_{\mu 1}^{n \times n} = \mathcal{O}_\mu$.

Введем также группу $\mathcal{O}_\infty^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов

$$\mathcal{O}_\infty^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}, \quad t \in T,$$

с ограниченными на $(-\infty, t_1]$ элементами из кольца $\bar{C}((-\infty, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$, действующих из $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^s)$ в \mathbb{R}^q , и класс $\mathcal{O}_{\mu \infty}^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных

операторов $\mathcal{O}_\mu(t, \mu, e^{-ph})$ вида

$$\mathcal{O}_{\mu\infty}^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{O}_\infty^{s \times q}(t, e^{-ph}), \quad \mathcal{O}_\infty^{s \times q}(t, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_\infty^{s \times q};$$

область определения $D(\mathcal{O}_\infty^{s \times q}) = PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^s)$ и область значений $\text{Im}(\mathcal{O}_k^{s \times q}) = \mathbb{R}^q$. При $s = q = n$ верхние индексы $n \times n$ в обозначениях операторов и их классов будем опускать, например, $\mathcal{O}_{\mu\infty}^{n \times n}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{O}_{\mu\infty}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathcal{O}_{\mu\infty}^{n \times n} = \mathcal{O}_{\mu\infty}$.

В классах \mathcal{O}_k , $k = 1, 2, \dots$, $\mathcal{O}_{\mu\infty}$, \mathcal{O}_∞ операторов (16), (17) выделим подклассы \mathcal{A}_k , $k = 1, 2, \dots$, $\mathcal{A}_{\mu\infty}$, \mathcal{A}_∞ операторов вида (16), (17), для которых $M_0(t)$, $M_1(t)$ имеют вид (9) и $M_j(t) \equiv 0$, $t \in T$, $j \geq 2$.

Таким образом, на расширенном пространстве состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ определены последовательности вложенных классов операторов такие что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h &\subset \mathcal{O}_h \subset \dots \subset \mathcal{O}_{(k-1)} \subset \mathcal{O}_k \subset \dots \subset \mathcal{O}_\infty, \\ \mathcal{A}_\mu &\subset \mathcal{O}_\mu \subset \dots \subset \mathcal{O}_{\mu(k-1)} \subset \mathcal{O}_{\mu k} \subset \dots \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}, \\ \mathcal{A}_\mu &\subset \mathcal{A}_{\mu 2} \subset \dots \subset \mathcal{A}_{\mu(k-1)} \subset \mathcal{A}_{\mu k} \subset \dots \subset \mathcal{A}_{\mu\infty}, \\ \mathcal{A}_{k-1} &\subset \mathcal{A}_k \subset \mathcal{O}_k, \quad \mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{O}_\infty, \quad \mathcal{A}_{\mu k} \subset \mathcal{O}_{\mu k}, \quad \mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}. \end{aligned} \tag{18}$$

Множество Σ_h систем (11) можно охарактеризовать как множество систем с оператором правой части $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{A}_\mu$ и пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$. Наряду с Σ_h введем также множества систем с пространством состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$: множество Σ_∞ систем вида (11), где вместо оператора \mathbf{A}_μ используется оператор $\mathbf{A}_{\mu\infty} \in \mathcal{A}_{\mu\infty}$, и множество $\tilde{\Sigma}_\infty$ систем вида (11), где вместо оператора \mathbf{A}_μ используется оператор $\mathbf{O}_{\mu\infty} \in \mathcal{O}_{\mu\infty}$: $\Sigma_\infty \subset \tilde{\Sigma}_\infty$.

Таким образом определено погружение множества Σ_h систем (11) в множество $\tilde{\Sigma}_\infty$ систем вида (11) в расширенном пространстве состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ с оператором $\mathbf{A}_{\mu\infty} \in \mathcal{A}_{\mu\infty}$ вида (10), в котором элементы матричных блоков $A_{i0}(t)$, $A_{i1}(t)$, $i = \overline{1, 2}$, $A_j(t)$, $j = \overline{3, 4}$, являются функциональными матрицами с элементами из кольца $C(T; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$: $\Sigma_h \subset \Sigma_\infty$.

5. Нелокальная замена переменных и преобразование линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Для системы из Σ_∞ с оператором правой части из $\mathcal{A}_{\mu\infty}$ построим расщепляющее преобразование. Рассмотрим в \mathcal{O}_∞ подмножество \mathcal{G} нестационарных $(n \times n)$ -матричных невырожденных при каждом $t \in (-\infty, t_1]$ унимодулярных операторов $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$ с элементами из кольца $\bar{C}^1(T; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$. Определим произведение $\mathbf{G}^1(\mu, e^{-ph}) \cdot \mathbf{G}^2(\mu, e^{-ph})(t)$ двух элементов $\mathbf{G}^1(t, \mu, e^{-ph})$ и $\mathbf{G}^2(t, \mu, e^{-ph})$ поточечно на T , т.е.

$$(\mathbf{G}^1(\mu, e^{-ph}) \cdot \mathbf{G}^2(\mu, e^{-ph}))(t) = \mathbf{G}^1(t, \mu, e^{-ph}) \cdot \mathbf{G}^2(t, \mu, e^{-ph}).$$

С целью сокращения записей аргументы (t, μ, e^{-ph}) у операторов далее иногда будем опускать.

Утверждение 2. *Совокупность \mathcal{G} является группой относительно введенной операции умножения.*

Доказательство. Для доказательства надо проверить выполнение трех аксиом:

- (а) Для всяких трех элементов \mathbf{G}^1 , \mathbf{G}^2 , \mathbf{G}^3 верно равенство $(\mathbf{G}^1 \cdot \mathbf{G}^2)\mathbf{G}^3 = \mathbf{G}^1(\mathbf{G}^2 \cdot \mathbf{G}^3)$.
- (б) Существует такой элемент $I \in \mathcal{G}$, называемый единицей, что $I \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot I$ для любого $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$.
- (в) Всякий элемент $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$ имеет обратный $\mathbf{G}^{-1} \in \mathcal{G}$, для которого $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = I$.

Из правил умножения матриц и свойств кольца формальных степенных рядов (коммутативное кольцо с единицей) следует выполнение первых двух аксиом. В качестве I берем единичную матрицу: $I = E_n$. Поскольку для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, с учетом невырожденности $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$ при всех $t \in (-\infty, t_1]$, преобразование (22) невырожденное, откуда следует выполнение требований аксиомы (в). \square

Группу \mathcal{G} можно рассматривать как группу обратимых линейных нелокальных преобразований. Определим действие $\mathbf{G}\mathcal{O}_{\mu\infty} \mapsto \mathbf{G} * \mathcal{O}_{\mu\infty}$ группы \mathcal{G} операторов преобразования на множестве

$\mathcal{O}_{\mu\infty}$ следующим (сплетающим) равенством:

$$\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{O}_{\mu\infty} \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}} \triangleq \mathbf{O}_{\xi\eta} \in \mathcal{O}_{\mu\infty} \quad (19)$$

для любых $\mathbf{O}_{\mu\infty} \in \mathcal{O}_{\mu\infty}$, $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}$. Всякое преобразование $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}$ индуцирует определенное на пространстве $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ нелокальное (по времени) преобразование переменных состояния системы из $\tilde{\Sigma}_{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \in (-\infty, t_1], \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in (-\infty, t_1]. \quad (21)$$

Тем самым соотношение (19) определяет действие группы \mathcal{G} на множестве систем $\tilde{\Sigma}_{\infty}$, которое является преобразованием системы с оператором $\mathbf{O}_{\mu\infty}$, в систему с оператором $\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty} = \mathbf{O}_{\xi\eta}$. Это действие разбивает множество всех систем $\tilde{\Sigma}_{\infty}$ на *орбиты*. Для фиксированной системы $\mathbf{O}_{\mu\infty} \in \tilde{\Sigma}_{\infty}$ подмножество $\mathcal{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}$ множества $\mathcal{O}^{n \times n}$, состоящее из всех $\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}$, когда \mathbf{G} пробегает \mathcal{G} , называется *орбитой* системы относительно группы \mathcal{G} .

Две системы $\mathbf{O}_{\mu\infty}^1$ и $\mathbf{O}_{\mu\infty}^2$, лежащие в одной орбите, называются *алгебраически эквивалентными* (см. [17, с. 357]). Необходимым и достаточным условием эквивалентности является выполнение равенства $\mathbf{O}_{\mu\infty}^1 = \mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}^2$ при каком либо $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$.

Определим оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ вида

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \\ -\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_2 \times n_1}$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_1 \times n_2}$ — операторные матрицы подходящих размеров:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}), \\ \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}), \\ \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n \times n}); \end{aligned}$$

здесь $z = e^{-ph}$.

Утверждение 3. Оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)) унимодулярный и обратимый и определяет преобразование при всех $\mu > 0$, всех $t \in T$ и любых матриц \mathbf{L} и \mathbf{H} . При этом справедливо представление

$$\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & -\mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \\ \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Доказательство. Несложно проверить, что $\det \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$ для всех $\mu > 0$, $t \in T$, \mathbf{L} , \mathbf{H} , что согласно определению подтверждает унимодулярность матрицы преобразования. Поскольку для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, то преобразование (22) невырождено. Непосредственным вычислением устанавливается (23). Из невырожденности следует, что преобразование (22), (23) является преобразованием подобия для любого значения μ , для любых матриц \mathbf{L} и \mathbf{H} (т.е. принадлежит классу преобразований \mathcal{R}_2 при $c = 1$, $k = 0$; см. [25]). \square

Утверждение 4. Для любых матричных операторов $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ и $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ принадлежит группе \mathcal{G} (см. (22)).

Чтобы переменные в преобразованной системе (19) были разделены по темпам — отдельно по медленным и быстрым переменным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{O}_{\xi\eta}$ (см. (19)) имела блочно-диагональный вид. Выясним условия на оператор (22), при которых это верно для системы из $\mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}$. Для этого получим уравнения, которым должны удовлетворять матричные операторы $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ из оператора преобразования (22).

Продифференцируем (21) в силу системы (1) и выполним замену переменных (20) с $\mathbf{G} = \mathbf{K}$ (см. (22)). В результате система (1) преобразуется в эквивалентную систему

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \left[\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L} - \mathbf{H}(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \right] \xi(t) + \\ &\quad + \left[\mu(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}) \mathbf{H} - \mathbf{H}(\mathbf{A}_4 + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2) - \mu \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{A}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \mu \mathbf{H}(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{H} \right] \eta(t), \\ \mu \dot{\eta}(t) &= \left[\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}} \right] \xi(t) + \\ &\quad + \left[\mathbf{A}_4 + \mu(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{H} \right] \eta(t), \quad t \in (-\infty, t_1].\end{aligned}\quad (24)$$

Чтобы медленные и быстрые переменные состояния системы (24) были полностью разделены, матричные операторы $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ выбираются из условия равенства нулю в системе (24) коэффициентов при медленных переменных ξ в уравнении для быстрых переменных η и наоборот. Тогда матричные операторы $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ и $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ должны удовлетворять для всех $t \in (-\infty, t_1]$ следующим матричным операторным дифференциальным уравнениям Риккати:

$$\begin{aligned}\mu \dot{\mathbf{L}}(t, \mu, e^{-ph}) &= \mathbf{A}_4(t) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) - \mathbf{A}_3(t) - \\ &\quad - \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \right), \quad t \in (-\infty, t_1],\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}-\mu \dot{\mathbf{H}}(t, \mu, e^{-ph}) &= \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{A}_4(t) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) + \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) - \\ &\quad - \mu \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \right) \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}), \quad t \in (-\infty, t_1].\end{aligned}\quad (26)$$

Таким образом, разрешимость уравнений (25), (26) определяет возможность расщепления системы (1), а вид решений системы (25), (26) — класс расщепляющих преобразований (22).

6. Асимптотика оператора преобразования и расщепленная линейная нестационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием. Обозначим через $O(\mu)$ вектор-функцию $f(t, \mu)$ на $[a, b]$ (размерность ясна из контекста), компоненты которой $f_i(t, \mu)$ таковы, что для каждого $t \in [a, b]$ существуют такие константы $\mu^* > 0$, $c > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ верно неравенство $\|f_i(t, \mu)\| \leq c\mu$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Следующее утверждение устанавливает условия разрешимости уравнений (25), (26), а также асимптотику операторов преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)).

Теорема 1. Пусть элементы матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на $(-\infty, t_1]$, а также предположения (i)–(iii). Тогда существует такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ существуют ограниченные непрерывно дифференцируемые (с ограниченными производными) непрерывно зависящие от μ матричные функции $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$, удовлетворяющие дифференциальным матричным уравнениям (25), (26).

Более того, если элементы матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, непрерывно дифференцируемы k раз на $(-\infty, t_1]$, $k = 1, 2, \dots$, то при $t \in (-\infty, t_1]$ для \mathbf{L} , \mathbf{H} верны асимптотические представления

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) + O(\mu^k), \\ \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \mu^i \mathbf{H}^i(t, e^{-ph}) + O(\mu^k),\end{aligned}\quad (27)$$

где члены асимптотических рядов (27) находятся по итерационной схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{m+1}(t, e^{-ph}) &= A_4^{-1}(t) \left(\mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^m \mathbf{L}^{m-j}(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^j(t, e^{-ph}) + \dot{\mathbf{L}}^m(t, e^{-ph}) \right), \\ \mathbf{H}^{m+1}(t, e^{-ph}) &= \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \sum_{i=0}^m \mathbf{L}^i(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^{m-i}(t, e^{-ph}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^m \mathbf{H}^i(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^{m-i}(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) - \dot{\mathbf{H}}^m(t, e^{-ph}) \right) A_4^{-1}(t), \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) = A_4^{-1}(t) \mathbf{A}_3(t), \quad \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) = \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) A_4^{-1}(t). \quad (29)$$

Кроме того, для любого целого $m \geq 0$ матричные функции $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$ из (28), (29) могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^m L_j^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{m+1} H_j^m(t) e^{-jph}, \quad (30)$$

где $L_j^m(t)$, $H_j^m(t)$, $L^m(t, z) \in R_m[z]$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1})$, $H^m(t, z) \in R_{m+1}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2})$, вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} L_j^m(t) &= A_4^{-1}(t) \left(\sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1}(t) A_{1,j-s}(t-sh) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k(t) A_{2r}(t-sh) L_{j-s-r}^{m-k-1}(t-(r+s)h) + \dot{L}_j^{m-1}(t) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} H_j^m(t) &= \left(\sum_{s=0}^1 A_{1s}(t) H_{j-s}^{m-1}(t-sh) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{s=0}^{m-1} A_{2k}(t) L_s^{i-1}(t-kh) H_{j-k-s}^{m-i}(t-(s+k)h) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m H_k^{n-1}(t) L_s^{m-n}(t-kh) A_{2,j-k-s}(t-(s+k)h) - \dot{H}_j^{m-1}(t) \right) A_4^{-1}(t-jh), \end{aligned} \quad (32)$$

$$H_j^m(t) \equiv 0, \quad \text{если } j < 0 \text{ или } m < 0 \text{ или } j > m + 1,$$

с начальными условиями

$$L_0^0(t) = A_4^{-1}(t) \mathbf{A}_3(t), \quad L_j^m(t) = 0, \quad \text{если } j < 0 \text{ или } m < 0 \text{ или } j > m, \quad (33)$$

$$H_0^0(t) = A_{20}(t) A_4^{-1}(t), \quad H_1^0(t) = A_{21}(t) A_4^{-1}(t-h). \quad (34)$$

Доказательство. Представление системы $\mathbf{A}_\mu \in \Sigma_h$ в операторном виде (11) как системы, определенной над $\mathcal{A}_h = R^{n \times n}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = C(T; \mathbb{R})$, и определенное в разделе 5 погружение ее во множество систем над кольцом $\mathcal{O}_\infty = R^{n \times n}[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R})$, позволяет применять для доказательства существования решения \mathbf{L} , \mathbf{H} (см. (27)) схему из [48, с. 212].

Будем искать решение \mathbf{L} уравнения (25) в виде формального степенного ряда по μ с коэффициентами, являющимися полиномами от символа оператора запаздывания e^{-ph} :

$$\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m L_j^m(t) e^{-jph}. \quad (35)$$

Для доказательства (28) подставим представление (35) в уравнение (25). Далее, выполняя преобразования с учетом начальных условий для $L_j^m(t)$ (см. (29)) и определяющих и алгебраических свойств (4) оператора запаздывания и приравнявая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях μ и e^{-ph} , получаем матричные уравнения для нахождения коэффициентов разложения (35), которые решаются последовательно и однозначно в силу справедливости предположения (i). Отсюда получаем (29), (28) и (30). Ограниченность на $(-\infty, t_1]$ матричных операторов $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и их производных следует из (29) и (28) и ограниченности $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, их производных и ограниченности e^{-ph} .

Представления (31)–(32) доказываются по индукции с учетом определяющих и алгебраических свойств (4) оператора запаздывания e^{-ph} и используют гладкость матриц системы (1).

Для доказательства асимптотической аппроксимации (27) k -го порядка запишем (35) в виде

$$\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, \mu, e^{-ph}) + \mu^{k+1} R^k(t, \mu, e^{-ph}), \quad (36)$$

и докажем ограниченность остаточного члена R^k . Подставляя (36) в уравнение (25), получаем дифференциальное уравнение для остаточного члена R^k . Например, для $k = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu \dot{R}^1 = A_4 R^1 - \dot{\mathbf{L}}^0 - \mathbf{L}^0(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{L}^0) + \\ + \mu(\mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 R^1 - R^1 \mathbf{A}_1 + R^1 \mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 + \mu R^1 \mathbf{A}_2 R^1), \end{aligned} \quad (37)$$

откуда следует интегральное уравнение для R^1 .

Далее, используя принцип сжимающих отображений, устанавливаем существование единственного ограниченного на T решения R^1 уравнения (37), что доказывает аппроксимацию (27) для \mathbf{L} . Из непрерывности и ограниченности правой части (37) следует непрерывная дифференцируемость R^1 и ограниченность $\mu \dot{R}^1$, что доказывает справедливость оценки (27). Из представления (36) для \mathbf{L} и доказанной выше ограниченности производных правой части следует непрерывная дифференцируемость \mathbf{L} на $(-\infty, t_1]$ и ограниченность ее производной.

Аналогично с использованием (35), (26), (29), (4) доказываются существование и представление решения $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ уравнения Сильвестра (26) в виде формального степенного ряда по параметру μ с коэффициентами, являющимися полиномами по оператору запаздывания с требуемыми свойствами и оценками. При этом решение уравнения (26) ищем в виде формального степенного ряда по μ с коэффициентами, являющимися полиномами от оператора запаздывания e^{-ph} :

$$\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} H_j^m(t) e^{-jph}. \quad (38)$$

Теорема 1 доказана. \square

Подставляя (30) в (25), (26), группируя и приравнявая члены при одинаковых степенях μ и e^{-ph} , убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Следствие 1. Компоненты L_j^m , $j = \overline{0, m}$, H_j^m , $j = \overline{0, m+1}$, $m = 0, 1, \dots$, из (35), (38) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{L}_j^{m-1}(t) = A_4(t) L_j^m(t) - \sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1}(t) A_{1,j-s}(t-sh) + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k(t) A_{2r}(t-sh) L_{j-s-r}^{m-k-1}(t-r+s)h, \quad m = 1, 2, \dots, j = \overline{0, m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4(t)L_0^0(t) - A_3(t) &= 0, \\
 -\dot{H}_j^{m-1}(t) &= H_j^m(t)A_4(t-jh) - \sum_{s=0}^1 A_{1s}(t)H_{j-s}^{m-1}(t-sh) + \\
 &+ \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{s=0}^{m-1} A_{2k}(t)L_s^{i-1}(t-kh)H_{j-k-s}^{m-i}(t-(s+k)h) + \\
 &+ \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m H_k^{n-1}(t)L_s^{m-n}(t-kh)A_{2,j-k-s}(t-(s+k)h),
 \end{aligned}$$

$$H_0^0(t)A_4(t) = A_{20}(t), \quad H_1^0(t)A_4(t-h) = A_{21}(t).$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ в группе \mathcal{G} существует преобразование Ляпунова вида $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которое преобразует систему \mathbf{A}_μ (см. (1)) в систему из $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ с блочно-диагональной матрицей

$$\mathbf{A}_{\xi\eta} = \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}), \mu^{-1} \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \}, \quad (39)$$

полностью разделяя быструю и медленную динамики:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K} - \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{A}_{\xi\eta}(t, \mu, e^{-ph}).$$

Доказательство. Так как матричные операторы $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и их производные ограничены на $(-\infty, t_1]$, то из вида (22) оператора $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ и (23) обратного оператора $\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})$ следует ограниченность на $(-\infty, t_1]$ оператора $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$, обратного к нему $\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})$ и его производной $\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})$:

$$\|\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \alpha_1, \quad \|\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \alpha_2, \quad \|\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \beta.$$

Отсюда имеем

$$\sup_{t \in (-\infty, t_1]} \left(\|\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})\| + \|\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})\| + \|\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})\| \right) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta,$$

откуда следует, что преобразование (22) является преобразованием Ляпунова. \square

Следствие 3. Для любой системы \mathbf{A}_μ (см. (1)) из Σ_∞ при выполнении условий теоремы 1 для всех достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ в орбите относительно группы невырожденных преобразований \mathcal{G} имеется система с блочно-диагональной матрицей $\mathbf{A}_{\xi\eta} \in \Sigma_\infty$ вида (39), где $\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_2 \times n_2}$ представимы в виде асимптотических рядов по параметру μ . При этом преобразование $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$, приводящее систему (11) к системе с блочно-диагональной матрицей (39), имеет вид (22), где \mathbf{L} , \mathbf{H} представимы в виде асимптотических рядов (27) по параметру μ .

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует такое $\mu^* > 0$, что в результате замены переменных (20) с $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22), (25), (26)) для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ система (1) преобразуется в алгебраически и асимптотически эквивалентную систему из множества $\Sigma_{\xi\eta} \subset \tilde{\Sigma}_\infty$ с разделенными движениями вида

$$\Sigma_{\xi\eta} : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t), & \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{\eta}(t) = \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph})\eta(t), & \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \end{cases} \quad t \in T, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) &\triangleq \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}), \\
 \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) &\triangleq \mathbf{A}_4(t) + \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})\mathbf{A}_2(t, e^{-ph}).
 \end{aligned} \quad (41)$$

При этом зависящие от параметра μ и оператора запаздывания e^{-ph} матричные операторы из (40) ограничены на $(-\infty, t_1]$ и могут быть представлены в виде асимптотических рядов по малому параметру μ :

$$\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathbf{A}_\xi^m(t, e^{-ph}), \quad \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathbf{A}_\eta^m(t, e^{-ph}), \quad (42)$$

где

$$\mathbf{A}_\xi^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{A}_{\xi j}^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{A}_\eta^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^m \mathbf{A}_{\eta j}^m(t) e^{-jph}, \quad (43)$$

и матричные функции $\mathbf{A}_{\xi j}^m(t)$, $\mathbf{A}_{\eta j}^m(t)$ вычисляются итеративно по матричным функциям системы (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi j}^0(t) &= \mathbf{A}_{1j}(t) - \mathbf{A}_{2j}(t) \mathbf{L}_0^0(t - jh), & j &= 0, 1; \\ \mathbf{A}_{\xi j}^m(t) &= - \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) \mathbf{L}_{j-i}^m(t - ih), & m &\geq 1, \quad j = \overline{0, m+1}, \\ \mathbf{A}_{\eta 0}^0(t) &= \mathbf{A}_4(t), \quad \mathbf{A}_{\eta j}^0(t) = 0, & j &\neq 0, \\ \mathbf{A}_{\eta j}^m(t) &= \sum_{i=0}^1 \mathbf{L}_{j-i}^{m-1}(t) \mathbf{A}_{2i}(t - (j-i)h), & m &\geq 1, \quad j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство (40) следует из (24) с учетом (25), (26). Алгебраическая эквивалентность исходной и преобразованной систем вытекает из утверждения 3. Из (24)–(26) следует, что невырожденная замена переменных (22) преобразует систему (1) в расщепленную систему (40). Так как матричные операторы \mathbf{A}_μ (см. (10)) и $\mathbf{A}_{\xi\eta}$ (см. (19)) лежат в одной орбите действия группы \mathcal{G} на множестве $\mathcal{O}_{\mu\infty}$, то они кинематически подобны, а значит, системы (1) и (40) асимптотически эквивалентны (см. [7, 8]).

Выражения из (41) получаются непосредственно из (19) с учетом (10), (22), (23). Доказательство представления (42) для $\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})$ получим из (41), (26) с учетом (35), (38) и определяющих и алгебраических свойств оператора запаздывания. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^1 \mathbf{A}_{1j}(t) e^{-jph} - \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) e^{-iph} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m \mathbf{L}_j^m(t) e^{-jph} = \\ &= \mu^0 \sum_{j=0}^1 (\mathbf{A}_{1j}(t) - \mathbf{A}_{2j}(t) \mathbf{L}_0^0(t - jh)) e^{-jph} - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) \mathbf{L}_{j-i}^m(t - ih) e^{-jph}, \end{aligned}$$

откуда справедливы выражения (44) для $\mathbf{A}_{\xi j}^m(t)$. Аналогичным образом доказываются выражения (44) для $\mathbf{A}_{\eta j}^m(t)$.

Ограниченность матричных операторов (41) следует из ограниченности операторных матриц из правой части (41) с учетом теоремы 1. Теорема 2 доказана. \square

7. Аппроксимации расщепляющего преобразования и расщепленной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. При любом целом неотрицательном k рассмотрим в \mathcal{O}_k совокупность \mathcal{G}_k невырожденных при каждом $t \in T$ операторов $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливы включения $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1}$.

Наряду с расщепляющим преобразованием $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)) для любого $k = 1, 2, \dots$ определим действующие на множестве $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ его асимптотические аппроксимации — операторы

$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}_{2k-1}$ вида

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) \\ -\sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) \sum_{n=0}^{k-1} \mu^n \mathbf{H}^n(t, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$ определены в (28):

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \in R_{2k-1, 2k-1}[\mu, z], \quad z = e^{-ph}, \quad R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Утверждение 5. Для любого целого $k \geq 1$ оператор $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (45) является унимодулярным и обратимым для всех $\mu > 0$ и $t \in T$. При этом справедливо представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{[k]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) &= \\ &= \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \sum_{n=0}^{k-1} \mu^n \mathbf{H}^n(t, e^{-ph}) & \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & -\mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) \\ \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & & E_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Доказательство. Поскольку $\det \mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$ для всех $k \geq 1$, матрица $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ унимодулярна. Так как для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, этим доказано первая часть утверждения. Представление (46) доказывается непосредственным вычислением. \square

Для любого $k = 1, 2, \dots$ действие оператора преобразования $\mathbf{K}^{[k]}$ (см. (45)) на оператор \mathbf{A}_μ системы (11) определим согласно (19) с заменой \mathbf{G} на $\mathbf{K}^{[k]}$:

$$\mathbf{K}^{[k]} * \mathbf{A}_\mu = (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K}^{[k]} - (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \dot{\mathbf{K}}^{[k]}. \quad (47)$$

В дальнейшем нам понадобится следующее представление преобразования $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)), вытекающее из (45) и (28):

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k-1} K_j^{[k]}(t, \mu) e^{-jph}, \quad K_j^{[k]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} K_{j11}^{[k]}(t, \mu) & K_{j12}^{[k]}(t, \mu) \\ K_{j21}^{[k]}(t, \mu) & K_{j22}^{[k]}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где $K_{jrs}^{[k]}(t, \mu)$ — $(n_s \times n_r)$ -матричные нестационарные операторы, $s = 1, 2$, $r = 1, 2$. В частности, для $k = 1, 2$ имеем:

$$\begin{aligned} K_{j11}^{[k]}(t, \mu) &= \delta_{0j} E_{n_1}, \quad K_{j12}^{[k]}(t, \mu) = \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad K_{j21}^{[k]}(t, \mu) = -\sum_{m=j}^{k-1} \mu^m L_j^m(t), \\ K_{j22}^{[k]}(t, \mu) &= \delta_{0j} E_{n_2} - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=n+j-m}^{\min\{n, j\}} L_i^n(t) H_{j-i}^{m-n-1}(t - ih) - \\ &\quad - \delta_{2k} \mu^3 \sum_{i=\max\{j-2, 0\}}^1 L_i^1(t) H_{j-i}^1(t - ih), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (49)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Из (48), (49) следует

$$\begin{aligned} K_0^{[1]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \quad K_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & O(\mu) \\ 0 & O(\mu) \end{pmatrix}, \quad K_0^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \\ K_1^{[2]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} 0 & O(\mu) \\ O(\mu) & O(\mu) \end{pmatrix}, \quad K_2^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & O(\mu^2) \\ 0 & O(\mu^2) \end{pmatrix}, \quad K_3^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & O(\mu^3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Следствие 4. *Справедливо представление*

$$(\mathbf{K}^{[k]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k-1} \bar{K}_j^{[k]}(t, \mu) e^{-jph}, \quad \bar{K}_j^{[k]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{K}_{j11}^{[k]}(t, \mu) & \bar{K}_{j12}^{[k]}(t, \mu) \\ \bar{K}_{j21}^{[k]}(t, \mu) & \bar{K}_{j22}^{[k]}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где $\bar{K}_j^{[k]}(t, \mu)$ выражены через (28).

В частности, для $k = 1, 2$ верно

$$\begin{aligned} \bar{K}_{j11}^{[k]}(t, \mu) = \delta_{0j} E_{n_1} - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m \sum_{n=0}^1 \sum_{i=n+j-m}^{\min\{n, j\}} H_{j-i}^{m-n-1}(t) L_i^n(t - (j-i)h) - \\ - k\mu^3 \sum_{i=\max\{j-2, 0\}}^1 H_{j-i}^1(t) L_i^1(t - (j-i)h), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{j12}^{[k]}(t, \mu) = - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad \bar{K}_{j21}^{[k]}(t, \mu) = \sum_{m=j}^{k-1} \mu^m L_j^m(t), \\ \bar{K}_{j22}^{[k]}(t, \mu) = \delta_{0j} E_{n_2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Из (51) и (52) следует

$$\begin{aligned} \bar{K}_0^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu) & O(\mu) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_0^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \\ \bar{K}_1^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_2^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu^2) & O(\mu^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_3^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu^3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

Утверждение 6. *В общем случае для $k = 1, 2, \dots$ преобразование $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)) системы (11) приводит лишь к аппроксимативной декомпозиции в следующем смысле: блочная матрица преобразованной системы, полученной в результате преобразования (45), имеет диагональные блоки, являющиеся $O(\mu)$ -возмущением диагональных блоков \mathbf{A}_ξ , \mathbf{A}_η матрицы (39) расщепленной системы (40) и внедиагональные матричные блоки, элементы которых имеют порядок малости не менее $O(\mu)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $k = 1$ (для $k > 1$ доказательство проводится аналогично). Имеем из (45):

$$\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \\ -\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$(\mathbf{K}^{[1]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & -\mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \\ \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

Подставим в (47) значение $k = 1$, оператор \mathbf{A}_μ (см. (7)), а также (54) и (55) (для сокращения записей аргументы (t, e^{-ph}) опускаем):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]} * \mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{L}^0 & -\mu \mathbf{H}^0 \\ \mathbf{L}^0 & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mu^{-1} \mathbf{A}_3 & \mu^{-1} \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0 \\ -\mathbf{L}^0 & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0 \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{L}^0 & -\mu \mathbf{H}^0 \\ \mathbf{L}^0 & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n_1} \times n_1 & \mu \dot{\mathbf{H}}^0 \\ -\dot{\mathbf{L}}^0 & -\mu \dot{\mathbf{L}}^0 \mathbf{H}^0 - \mu \mathbf{L}^0 \dot{\mathbf{H}}^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (56)$$

Выполняя операции над матрицами с учетом (30), (31), (33), (32), (34) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]} * \mathbf{A}_\mu = \text{diag} \{ E_{n_1}, \mu^{-1} E_{n_2} \} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1 & \mu (\mathbf{H}^1 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 + \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1) \mathbf{H}^0 \\ -\mu \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1 & \mathbf{A}_4 + \mu^2 (\mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 + \mu \mathbf{L}^0 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0) \mathbf{H}^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

Сравнение равенства (57) с (40), (41) с учетом ограниченности $\mathbf{L}^m, \mathbf{H}^m$ завершает доказательство утверждения. \square

Из сравнения (57) с представлением матриц вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3) вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 5. *Диагональные блоки матрицы преобразованной системы, полученной в результате преобразования $\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph})$, являются $O(\mu)$ -возмущением матриц вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3), а элементы внедиагональных матричных блоков матрицы преобразованной системы имеют порядок малости не менее $O(\mu)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и матрицы системы (1) дифференцируемы достаточное число раз. Тогда для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ существует такое $\mu^* > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ расщепленная система (40) асимптотически аппроксимируются с точностью до $O(\mu^{k+1})$ системой*

$$\dot{\xi}^k(t) = \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} A_{\xi j}^m(t) \xi^k(t - jh), \quad t \in T, \quad (58)$$

$$\frac{d}{d\tau} \eta^k(\tau) = \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^m \tilde{A}_{\eta j}^m(\tau) \eta^k(\tau - j\tilde{h}), \quad \tau \in T_\mu, \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{\mu}, \quad (59)$$

где $\xi^k \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\eta^k \in \mathbb{R}^{n_2}$, матричные функции в (58)–(59) рассчитываются по формулам (44) и

$$\tilde{A}_{\eta j}^m(\tau) = \sum_{r=j}^m \frac{\tau^{m-r}}{(m-r)!} A_{\eta j}^{r(m-r)}(t_0). \quad (60)$$

Доказательство. Прежде всего из (42), (43) имеем представление расщепленной системы (40):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} A_{\xi j}^m(t) \xi(t - jh), \\ \mu \dot{\eta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(t) \eta(t - jh). \end{cases} \quad (61)$$

Из ограниченности операторов \mathbf{L}, \mathbf{H} (см. (22) и (19)) следует ограниченность матриц (41) системы (40). Правая часть системы (58) получается путем исключения членов порядка выше $O(\mu^k)$ из правой части первой системы (61).

Чтобы получить представление (59), перепишем вторую подсистему (61) в быстрой («растянутой») шкале времени $\tau = (t - t_0)/\mu$:

$$\frac{d}{d\tau} \eta(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) \eta(\tau - j\tilde{h}). \quad (62)$$

Введем новую функцию $\tilde{\eta}(\tau) = \eta(\mu\tau + t_0)$, $\tau \in T_\mu$. Тогда из (62) получаем

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\eta}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) \tilde{\eta}(\tau - j\tilde{h}). \quad (63)$$

В предположении достаточной гладкости матричных функций $A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0)$ представим их в виде степенных рядов по μ :

$$A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \frac{\tau^r}{r!} A_{\eta j}^{m(r)}(t_0). \quad (64)$$

Подставим разложения (64) в (63) и выполним преобразования. С учетом ограниченности матричных функций $A_{\eta j}^m(t)$, исключая в выражениях получившейся системы члены, порядок малости которых выше $O(\mu^k)$, получаем представление (59). Теорема 3 доказана. \square

Замечание 1. Требования на гладкость матриц системы (1) в теореме 3 таковы, чтобы обеспечить существование производных матриц $A_{nj}^{m(r)}(t)$ до нужного порядка.

Из (48)–(53) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7. В условиях леммы 1 для достаточно малых $\mu > 0$ верно асимптотическое представление

$$(\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K}^{[k]} - (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \dot{\mathbf{K}}^{[k]} = \mathbf{A}_{\xi\eta}(t, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k)$$

и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left(\bar{\mathbf{K}}_j^{[k]} \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}_0(t - jh) + \bar{\mathbf{K}}_{j-1}^{[k]} \mathbf{A}_1(t - (j-1)h) + \dot{\bar{\mathbf{K}}}_j^{[k]} \right) \mathbf{K}_{i-j}^{[k]}(t - jh) = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k) & O(\mu^k) \\ O(\mu^k) & \tilde{\mathbf{A}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k) \end{pmatrix} \triangleq \mathcal{M} \mathbf{A}_{\xi\eta}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\mathbf{A}_{\xi\eta}^{[k]} = \mathcal{M}^{-1} \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi^{[k]}, \mathbf{A}_\eta^{[k]} \}.$$

Из (45) с учетом (30) и утверждения 5 получаем следующее утверждение.

Следствие 6. В отличие от преобразования \mathbf{K} (см. (22)), которое является преобразованием с бесконечным запаздыванием (см. (35), (38)), при любых фиксированных $k = 1, 2, \dots$ преобразование $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)) является преобразованием с конечным запаздыванием и принадлежит классу невырожденных преобразований \mathcal{R}_2 (см. [25]).

Известно (см. [25]), что преобразования этого класса сохраняют управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость системы.

Замечание 2. В общем случае асимптотические приближения $\mathbf{K}^{(k)}(t, \mu, e^{-ph})$ порядка $O(\mu^k)$ расщепляющего преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которые получаются, если в представление (22) подставить асимптотические ряды (27) после необходимых алгебраических преобразований отбросить в матричных блоках члены порядка выше $O(\mu^k)$, не будут являться унимодулярными.

Для подтверждения рассмотрим асимптотическое приближение первого порядка $\mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph})$ преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которое получается, если в представление (22) подставить асимптотические ряды (27) и отбросить в матричных блоках члены порядка выше $O(\mu)$:

$$\mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0 \\ -\mathbf{L}^0 - \mu \mathbf{L}^1 & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0 \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $n_1 = n_2 = 1$. Тогда $\det \mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph}) = 1 + m^2 \mathbf{L}^1(t, \mu, e^{-ph}) \neq 1$ при $\mathbf{L}^1(t, \mu, e^{-ph}) \neq 0$, что подтверждает справедливость замечания.

Утверждение 8. Для любого $k \geq 1$ при условии достаточной гладкости и ограниченности производных матриц системы (1) преобразования $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (45) являются преобразованиями Ляпунова.

Доказательство. При $k = 1$ из (30)–(34), непрерывной дифференцируемости и ограниченности матриц исходной системы следует существование непрерывной производной элементов матрицы $\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph})$, ограниченность их и их производных. Для $k > 1$ это следует при условии большей гладкости и ограниченности матриц исходной системы. Кроме того, для любого $k \geq 1$ из утверждения 5 имеем $\det \mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$. Таким образом, для рассматриваемых преобразований (45) выполнены все требования, и они являются преобразованиями Ляпунова. \square

8. Примеры. Продемонстрируем на примерах построение асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования (45) и расщепленной системы (58)–(59).

Пример 2. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -tx(t) + x(t-h) - \sin(t)y(t) + y(t-h), & x \in \mathbb{R}, \\ \mu\dot{y}(t) = -x(t) - y(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [0, 10]. \end{cases} \quad (66)$$

Выпишем параметры систем (1), (66):

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 10, \\ A_{10} = (-t), \quad A_{11} = (1), \quad A_{20} = (-\sin(t)), \quad A_{21} = (1), \quad A_3 = (-1), \quad A_4 = (-1), \\ A_0(t) = \begin{pmatrix} -t & -\sin(t) \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} -t + e^{-ph} & -\sin(t) + e^{-ph} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} -t + e^{-ph} & -\sin(t) + e^{-ph} \\ -1/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для системы (66) выполнены условия теоремы 1. Согласно (29) рассчитываем

$$\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) = 1, \quad \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) = \sin(t) - e^{-ph}.$$

Согласно (48), (46) получаем

$$\begin{aligned} K_0^{[1]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu \sin(t) \\ -1 & 1 - \mu \sin(t) \end{pmatrix}, \quad K_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & \mu(\sin(t) - e^{-ph}) \\ -1 & 1 - \mu(\sin(t) - e^{-ph}) \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{K}^{[1]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 - \mu(\sin(t) - e^{-ph}) & -\mu(\sin(t) - e^{-ph}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Система (66) удовлетворяет условиям теоремы 3. Асимптотическая аппроксимация первого порядка совпадает с вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3), которые для системы (66) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = (-t + \sin(t))x_s(t), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = -y_f(\tau), & \tau \in \left[0, \frac{10}{\mu}\right]. \end{cases}$$

Пример 3. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -tx(t) + x(t-h) + y(t-h), & x \in \mathbb{R}, \\ \mu\dot{y}(t) = -x(t) - y(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [0, 5h]. \end{cases} \quad (67)$$

Параметры системы (1), (67):

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 5h, \\ A_{10} = (-t), \quad A_{11} = (1), \quad A_{20} = 0, \quad A_{21} = (1), \quad A_3 = (-1), \quad A_4 = (-1). \end{aligned}$$

Для системы (67) выполнены условия теоремы 1. Согласно (31) рассчитываем

$$\begin{aligned} L_0^0(t) = 1, \quad H_0^0(t) = 0, \quad H_1^0(t) = -1, \quad L_0^1(t) = t, \\ L_1^1(t) = 0, \quad H_0^1(t) = 0, \quad H_1^1(t) = -t, \quad H_2^1(t) = -1, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Согласно (48), (46) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu e^{-ph} \\ -1 - t\mu & 1 + \mu e^{-ph} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{K}^{[1]})^{(-1)}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} 1 + \mu e^{-ph} & \mu e^{-ph} \\ 1 + t\mu & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}^{[2]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu e^{-ph} - \mu^2 e^{-2ph} - t\mu^2 e^{-ph} \\ -1 - t\mu & 1 + \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + 2te^{-ph}) + \mu^3(te^{-2ph} + t^2e^{-ph}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{[2]})^{(-1)}(t, \mu, e^{-ph}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + 2te^{-ph}) + \mu^3(te^{-2ph} + t^2e^{-ph}) & \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + te^{-ph}) \\ 1 + t\mu & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Система (67) удовлетворяет условиям теоремы 3. Асимптотическая аппроксимация первого порядка совпадает с вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3) для системы (67) и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = -t x_s(t), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) = -y_f(\tau), & \tau \in \left[0, \frac{5h}{\mu}\right]. \end{cases} \quad (68)$$

Заметим, что в отличие от исходной системы (67) ее вырожденная система и система погранслоя (68) являются системами без запаздывания.

Система асимптотической аппроксимации второго порядка (58), (59) расщепленной системы для (67) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}^{[2]}(t) = -t\xi^{[2]}(t) - \mu(t-h)\xi^{[2]}(t-h), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau} \eta^{[2]}(\tau) = -\eta^{[2]}(\tau) + \mu\eta^{[2]}(\tau - \frac{h}{\mu}), & \tau \in \left[0, \frac{5h}{\mu}\right]. \end{cases}$$

9. Заключение. Разработанный метод декомпозиции по темпам изменения переменных линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием использует алгебраический подход представления динамической системы с запаздыванием как системы над кольцом полиномов от оператора запаздывания, технику погружения системы в семейство систем в расширенном пространстве состояний над кольцом формальных степенных рядов, нелокальную замену переменных и асимптотические методы.

В результате применения к системе (1) построенного преобразования Ляпунова (22) получается полностью расщепленная по темпам изменения переменных система с бесконечным запаздыванием с «затухающей» памятью (40), (42), которая алгебраически и асимптотически эквивалентна исходной системе (1) в расширенном пространстве состояний. При этом расщепленные подсистемы (40), в отличие от исходной системы (1), имеют регулярно зависящую от параметра правую часть (42), и могут рассматриваться как регулярные возмущения не зависящих от малого параметра вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3).

Построенное преобразование (22), (27)–(29) и его асимптотические аппроксимации (45) могут использоваться для анализа устойчивости, управляемости, наблюдаемости системы (1), асимптотических характеристик её решений. Декомпозиция позволяет получать условия структурных свойств системы при всех достаточно малых значениях параметра из аналогичных условий для связанных с ней не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности — вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3), разрабатывать робастные законы управления и наблюдения.

Итерационные схемы (31)–(34) можно использовать для расчета асимптотических аппроксимаций (45) любого порядка компонент расщепляющего преобразования (22), (27) и матриц (41) преобразованной системы (40), построения систем (58), (59) с разделенными по темпам изменения переменным, асимптотически аппроксимирующих двухтемповую систему (1).

Полученные результаты без принципиальных изменений распространяются на системы вида (1) со многими соизмеримыми запаздываниями. Исследование связи между решениями исходной системы (1) и преобразованных систем (40), (58)–(59) является предметом дальнейших исследований автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абгарян К. А.* Расщепление сингулярно возмущенной многотемповой системы// Изв. АН АрмССРю — 1979. — 14, № 5. — С. 327–337.
2. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
3. *Астровский А. И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. — Минск: МИУ, 2007.
4. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем// Автомат. телемех. — 1998. — № 7. — С. 3–13.
5. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. — Минск: Беларуская навука, 2013.
6. *Астровский А. И., Гайшун И. В.* Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 3. — С. 370–379.
7. *Барabanов Е. А.* Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2014. — № 30. — С. 42–63.
8. *Богданов Ю. С.* Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах// Диффер. уравн. — 1965. — 1, № 6. — С. 707–716.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике// в кн.: Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колеб.. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — 1. — С. 93–154.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
11. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
12. *Воропаева Н. В., Соболев В. А.* Декомпозиция линейно-квадратичной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными// Автомат. телемех. — 2006. — № 8. — С. 3–11.
13. *Воропаева Н. В., Соболев В. А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. — М.: Физматлит, 2009.
14. *Гайшун И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 1999.
15. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления// Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
16. *Калинин А. И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. — Минск: Экоперспектива, 2000.
17. *Калман П., Фалб М., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. *Кириллова Ф. М., Марченко В. М.* Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздыванием. — Минск: Изд-во Ин-та математики АН БССР, 1978.
19. *Копейкина Т. Б.* Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1989. — 25, № 9. — С. 1508–1518.
20. *Курина Г. А.* О поведении множеств достижимости линейных матрично сингулярно возмущенных систем// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1995. — 211. — С. 316–325.
21. *Курина Г. А.* О расщеплении линейных систем, не разрешенных относительно производной// Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 4. — С. 26–33.
22. *Курина Г. А., Калашиникова М. А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными// Автомат. телемех. — 2022. — № 11. — С. 3–61.
23. *Мазаник С. А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. — Минск: БГУ, 2008.
24. *Марченко В. М.* Преобразования систем с запаздывающим аргументом// Диффер. уравн. — 1977. — 12, № 10. — С. 1882–1884.
25. *Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж.* Реализация динамических систем в шкалах систем с последствием: I. Реализуемость// Диффер. уравн. — 2006. — 42, № 11. — С. 1515–1523.
26. *Осипова О. В., Черевко І. М.* Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем// Буковин. мат. ж. — 2013. — 1, № 3-4. — С. 114–118.
27. *Ситник С. М., Шшиклина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

28. *Соболев В. А., Щепаккина Е. А.* Метод декомпозиции в задачах управления манипуляционными роботами// *Мат. XVI Междунар. науч. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*. — М.: Ин-т пробл. управл. им. В. А. Трапезникова РАН, 2022. — С. 410–413.
29. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. — М.: Наука, 1988.
30. *Хартковский В. Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. — Гродно, 2022.
31. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
32. *Цехан О. Б.* Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром// *Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне*. — 2017. — 7, № 1. — С. 50–61.
33. *Цехан О. Б.* Достаточные условия спектральной управляемости на основе декомпозиции линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием// *Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне*. — 2017. — 7, № 3. — С. 51–65.
34. *Цехан О. Б.* Декомпозиция сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы на основе невырожденного преобразования// *Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз.* — 2021. — 190. — С. 130–143.
35. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием// *Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне*. — 2024. — 14, № 1. — С. 37–47.
36. *Abed E.* Decomposition and stability for multiparameter singular perturbation problems// *IEEE Trans. Automat. Control*. — 1986. — 31, № 10. — P. 925–934.
37. *Califano C., Moog C. H.* Canonical forms of time-delay systems// *Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (December 10-13, 2012, Maui, Hawaii, USA), 2012*. — P. 3862–3867.
38. *Chang K.* Singular perturbations of a general boundary value problem// *SIAM J. Math. Anal.* — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.
39. *Cherevko I. M., Osypova O.* Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems// *Miskolc Math. Notes*. — 2015. — 16, № 2. — P. 729–745.
40. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. — Cham: Birkhäuser, 2014.
41. *Fridman E.* Decoupling transformation of singularly-perturbed systems with small delays and its applications// *Z. Angew. Math. Mech. Berlin* — 1996. — 76. — P. 201–204.
42. *Fridman E.* Exact slow-fast decomposition of the nonlinear singularly perturbed optimal control problem// *Systems Control Lett.* — 2000. — 40. — P. 121–131.
43. *Gajic Z., Shen X.* Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems. — London: Springer, 1993.
44. *Glizer V. Y.* Stabilizability conditions for one class of linear singularly perturbed differential-difference systems// *Proc. 2019 IEEE 15th Int. Conf. on Control and Automation (ICCA) (July 16-19, 2019, Edinburgh, Scotland), 2019*. — P. 1167–1172.
45. *Glizer V. Y.* Controllability of Singularly Perturbed Linear Time Delay Systems. — Cham: Birkhäuser, 2021.
46. *Glizer V. Y., Feigin Y., Fridman E., Margaliot M.* A new approach to exact slow-fast decomposition of singularly perturbed linear systems with small delays// *Proc. 53rd IEEE Conf. on Decision and Control (December 15-17, 2014, Los Angeles, California, USA), 2014*. — P. 451–456.
47. *Glizer V. Y., Fridman E., Feigin Y.* A Novel approach to exact slow-fast decomposition of linear singularly perturbed systems with small delays// *SIAM J. Control Optim.* — 2017. — 55, № 1. — P. 236–274.
48. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1999.
49. *Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu Desineni S.* Discrete singularly perturbed control problems (a survey)// *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms*. — 2017. — 24. — P. 335–370.
50. *Ladde G. S., Siljak D. D.* Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales// *Automatica*. — 1983. — 19, № 4. — P. 385–394.
51. *Magalhaes L. T.* Invariant manifolds for singularly perturbed linear functional differential equations// *J. Differ. Equations*. — 1984. — 54, № 3. — P. 310–345.

52. *Mitropol'skii Yu. A., Fodchuk V. I. Klevchuk I. I.* Integral manifolds, stability, and bifurcation of solutions of singularly perturbed functional-differential equations// *Ukr. Mat. Zh.* — 1986. — 38, № 3. — P. 335–340.
53. *Naidu D. S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview// *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms.* — 2002. — № 9. — P. 233–278.
54. *Naligama C. A., Tsekhan O. B.* Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation// *Vesn. Yanka Kupala State Univ. Grodno. Ser. 2. Math. Phys. Inform. Comput. Technol. Control.* — 2021. — 11, № 3. — P. 27–36.
55. *Pawluszewicz E., Tsekhan O.* Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: a decomposition approach// *Int. J. Control.* — 2021. — 95, № 9. — P. 2406–2419.
56. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results// *IEEE Acc.* — 2018. — 6, № 1. — P. 35457–35491.
57. *Perestyuk M. O., Cherevko I. M.* Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations// *Nonlin. Oscil.* — 2001. — 4, № 3. — P. 345–353.
58. *Perestyuk N., Cherevko I. M.* Investigation of the integral manifolds of singularly perturbed functional differential equations// *Miskolc Math. Notes.* — 2002. — 3, № 1. — P. 47–58.
59. *Phillips R. G.* The equivalence of time-scale decomposition techniques used in the analysis and design of linear systems// *Int. J. Control.* — 1983. — 37, № 6. — P. 1239–1257.
60. *Prljaca N., Gajic Z.* General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 2008. — 53, № 5. — P. 1303–1305.
61. *Sobolev V. A.* Integral manifolds, stability and decomposition of singularly perturbed systems in Banach space// *Acta Sci. Math.* — 1987. — 51, № 3-4. — P. 491–500.
62. *Shimjith S. R., Tiwari A. P., Bandyopadhyay B.* Modeling and Control of a Large Nuclear Reactor: A three-time-scale Approach. — Berlin: Springer, 2013.
63. *Strygin V. V., Sharuda D. V.* Asymptotic expansion of a solution of stiff systems of delay differential equations// *IFAC Proc. Vol.* — 2000. — 33, № 23. — P. 287–289.
64. *Tsekhan O. B.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation// *Axioms.* — 2019. — 8. — P. 1–19. — 71.
65. *Tsekhan O., Pawluszewicz E.* Slow-fast decomposition of singularly perturbed system with delay on time scales// *Proc. ICCS'2019 20th Int. Carpath. Control Conf. (May 26–29, 2019, Krakow-Wieliczka), 2019.* — P. 1–5.
66. *Tsekhan O.* Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay// in: *Dynamic Control and Optimization (Tchemisova T. V., Torres D. F. M., Plakhov A. Y., eds.).* — Cham: Springer, 2021. — P. 77–97.
67. *Yang X., Zhu J. J.* Chang transformation for decoupling of singularly perturbed linear slowly time-varying systems// *Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (December 10-13, 2012, Maui, Hawaii, USA), 2012.* — P. 5755–5760.
68. *Yang X., Zhu J. J.* A generalization of Chang transformation for linear time-varying systems// *Proc. 49th IEEE Conf. on Decision and Control (December 15-17, 2010, Atlanta, GA, USA), 2010.* — P. 6863–6869.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Цехан Ольга Борисовна (Tsekhan Olga Borisovna)

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь (Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus)

E-mail: tsekhan@grsu.by



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 72–88
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-72-88

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ.

I. СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2024 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены примеры интегрируемых однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION.

I. THIRD-ORDER SYSTEMS

© 2024 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the third order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of two-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

1. Примеры интегрирования систем третьего порядка	73
1.1. Введение	73
1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой	74
1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил	77
1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	80
1.5. Системы со знакопеременной диссипацией	80
Список литературы	84

1. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1.1. Введение. Как известно (см. [14, 15, 83], нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [1, 25, 81]).

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [26, 37, 68]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в указанных работах акцент был сделан на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полный набор первых интегралов для систем не существует, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые подставляются в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (квазискоростей) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять, учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии, называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии, — разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов; это говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же такие множества имеются, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией определенного знака. Следствием этого является тот факт, что система обладает хотя бы одним первым интегралом с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннюю и внешнюю части. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, тогда как внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. [8, 9, 19]).

В данном разделе 1 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем третьего порядка, в которых может быть выделена система с одной степенью свободы на своем двумерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

1.2. Некоторые примеры из плоскопараллельной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой. Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. [8, 19]). Если (v, α) — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр пластины), Ω — значение его угловой скорости, I , m — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина; см. [8, 19]), при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma > 0$, $v > 0$. Первые два уравнения (1.2.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости \mathbb{E}^2 в проекциях на систему координат Dx_1x_2 , связанную с телом. При этом Dx_1 — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс C симметричного тела, а Dx_2 — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение (1.2.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента.

Таким образом, фазовым пространством системы (1.2.1) третьего порядка является прямое произведение $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathfrak{so}(2)$ части двумерного цилиндра на алгебру Ли $\mathfrak{so}(2)$.

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы \mathbf{T} , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (\mathbf{V}_C — скорость центра масс, см. также [35, 40, 43])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (1.2.2)$$

то в системе (1.2.1) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$, $\sigma = DC$. Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (1.2.3)$$

Случай (1.2.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы

третьего порядка (1.2.1). Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2.$$

Систему (1.2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] &= \frac{1}{m} \left[T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2 \right] \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[\frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha &= \frac{1}{m} \left[s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 \right] \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I} y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Введя далее новые фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_1 v \omega, \quad \langle \rangle = n_1 v \langle \rangle', \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const},$$

приведем систему (1.2.4) к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.5)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{1}{I n_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\ &\quad + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[\frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha. \quad (1.2.8)$$

Видно, что в системе третьего порядка (1.2.5), (1.2.7) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (1.2.7), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре. В частности, при выполнении условия (1.2.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

Система (1.2.5), (1.2.7) содержит динамические уравнения движения твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, n_1 \omega) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad \Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha, \quad (1.2.9)$$

$$\alpha' = -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha, \quad \omega' = -\omega \Psi(\alpha, \omega). \quad (1.2.10)$$

1.2.1. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \quad (1.2.11)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла α). Тогда благодаря условиям (1.2.2), (1.2.11) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.2.5), (1.2.7)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.12)$$

$$\alpha' = -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b \omega^2 \sin \alpha, \quad (1.2.13)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b \omega^3 \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b \omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Безразмерный параметр b и постоянную n_1 выберем следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (1.2.12), (1.2.13) может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 1.1 (см. [10, 82]). *Система (1.2.12), (1.2.13) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.*

Здесь необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

1.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть $x = (x_{1N}, x_{2N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину, $Q = (Q_1, Q_2)$ — компоненты силы \mathbf{S} воздействия среды, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$ от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно (см. [8]).

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, R_2)$ — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции R от угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Здесь (h_1, h_2) — некоторые положительные параметры (см. [8]). Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} = x_N \equiv 0$, имеем $x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1\Omega/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) допустим равенство $Q_2 = A \sin \alpha$, $A > 0$, а динамические функции s и y_N примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N \left(\alpha, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha - h \frac{\Omega}{v}, \quad A, B, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \quad (1.2.15)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Тогда, благодаря условиям (1.2.2), (1.2.15) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.2.5), (1.2.7)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.2.16)$$

$$\alpha' = -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha - bH_1\omega \cos^2 \alpha, \quad (1.2.17)$$

$$\omega' = \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + bH_1\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1\omega \cos \alpha,$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -b\omega^2 \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1\omega \sin \alpha \cos \alpha.$$

Безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 выберем следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/I$, $H_1 = Bh/In_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (1.2.16), (1.2.17) также может быть рассмотрена на части фазового трехмерного цилиндра $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

Теорема 1.2. Система (1.2.16), (1.2.17) обладает полным набором первых интегралов (один из которых является аналитической функцией, а второй — трансцендентной функцией фазовых переменных), выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

1.3. Системы при отсутствии внешнего поля сил. Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot{z} &= d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot{\alpha} &= g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z ($z = Zv$), перепишем систему (1.3.1) в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \quad (1.3.2)$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \quad Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z); \quad (1.3.3)$$

при этом уравнение (1.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (1.3.3) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой *усеченной* системы, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0.$$

Тогда система (1.3.2), (1.3.3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \quad (1.3.4)$$

Для точной интегрируемости усеченной системы (1.3.2), (1.3.3) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (1.3.4).

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (1.3.2), (1.3.3) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)f_1(\alpha), \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_1(\alpha)}, \quad (1.3.5)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha)Z + b_0Z^2\delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \quad (1.3.6)$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $f_1(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ — некоторые гладкие функции. Будем рассматривать систему (1.3.5), (1.3.6) как систему *при отсутствии внешнего поля сил*.

Система (1.3.5), (1.3.6) имеет более общий вид, чем система (1.2.9), (1.2.10), взятая из динамики твердого тела. В частности, они совпадают при $Z = \omega$, $b_0 = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$.

1.3.1. Полный набор гладких первых интегралов.

Предложение 1.1. Система (1.3.5), (1.3.6) имеет два гладких (автономных) первых интеграла

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z; \alpha) &= v^2(1 + 2b_0Z\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \\ \Phi_1(v; Z) &= vZ = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

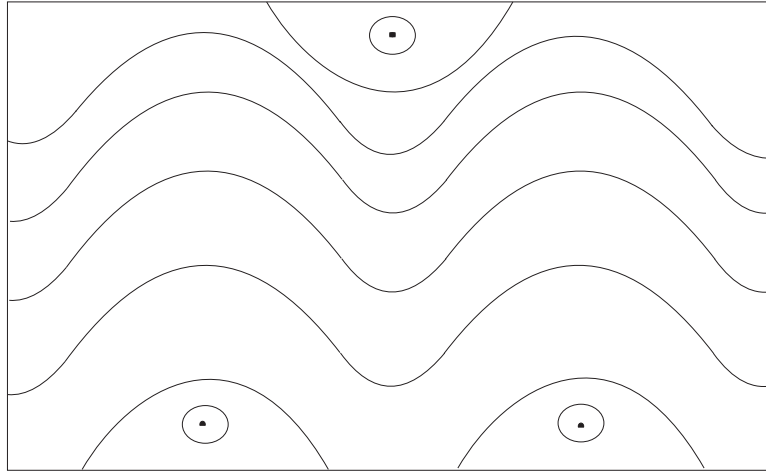


Рис. 1. Поле направлений для фазового портрета системы (1.3.9).

Доказательство. Чтобы убедиться в верности предложения 1.1, достаточно продифференцировать функции Φ_0 и Φ_1 в силу системы (1.3.5), (1.3.6). \square

Другими словами, независимая подсистема (1.3.6) на многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный (см. [13, 16]) по Z (автономный) первый интеграл вида

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 + 2b_0 Z \Delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const}, \quad (1.3.8)$$

который не имеет существенно особых точек. В силу этого подсистема (1.3.6) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака. Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (1.3.5), (1.3.6) не нарушает консервативности системы.

1.3.2. Некоторые фазовые портреты. 1. Приведем фазовый портрет системы (1.3.6), для начала слегка преобразовав ее. Правая часть обращается в нуль при $Z = 0$. Таким образом, вся ось абсцисс $\{(\alpha, Z) \in \mathbb{R}^2 : Z = 0\}$ состоит из неизолированных положений равновесия системы (1.3.6).

Несколько изменим правую часть за счет ее сокращения на величину Z (изменив тем самым скорость движения вдоль фазовых траекторий). Таким образом, фазовые характеристики остались на своем месте, при этом ось абсцисс перестала быть «сотканной» из неизолированных положений равновесия. Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = f_1(\alpha) + b_0 Z \delta(\alpha), \quad Z' = b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha). \quad (1.3.9)$$

Для функций $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$ поле направлений для фазового портрета системы (1.3.9) представлено на рис. 1. Здесь по горизонтали изменяется переменная α , а по вертикали — переменная Z .

1.3.3. Инвариантные дифференциальные формы. Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала фазового объема) для интегрируемости системы (1.3.5), (1.3.6).

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, двух) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно (см. [2, 14]), не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что

также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

Для начала сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Система (1.3.5), (1.3.6) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (1.3.10)$$

$$\alpha' = Z + b_0Z^2\Delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.3.11)$$

Для поиска функции $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет искомую инвариантную внешнюю дифференциальную форму

$$\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \quad (1.3.12)$$

подсчитаем дивергенцию векторного поля $w(v; \alpha, Z)$ системы (1.3.10), (1.3.11) в евклидовых координатах:

$$\operatorname{div} w(v; \alpha, Z) = 3b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда составная система уравнений характеристик для поиска решения линейного уравнения

$$\operatorname{div} [\rho(v; \alpha, Z)w(v; \alpha, Z)] = 0 \quad (1.3.13)$$

в частных производных будет состоять из системы (1.3.10), (1.3.11) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -3b_0Z^2\tilde{\Delta}(\alpha)\rho. \quad (1.3.14)$$

Как отмечалось, система (1.3.5), (1.3.6) (а поэтому и (1.3.10), (1.3.11)) имеет два гладких первых интеграла (1.3.7). Для получения дополнительного первого интеграла составной системы уравнений характеристик нетрудно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{dZ} = \frac{-3\rho}{Z}, \quad (1.3.15)$$

что немедленно дает необходимый первый интеграл:

$$\Phi_\rho(\rho; Z) = \rho Z^3 = C_\rho = \operatorname{const}. \quad (1.3.16)$$

Теперь нетрудно найти общее решение уравнения (1.3.13):

$$\rho = \frac{\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]}{Z^3}, \quad (1.3.17)$$

и убедиться, что функции

$$\rho_1(Z) = \frac{1}{Z^3}, \quad \rho_2(v) = v^3 \quad (1.3.18)$$

являются примерами функции $\rho(v; \alpha, Z)$, определяющей инвариантную внешнюю дифференциальную форму фазового объема (1.3.12) для системы (1.3.10), (1.3.11). Здесь $\mathcal{F}_0[\Phi_0, \Phi_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Φ_0, Φ_1 — два независимых первых интеграла (1.3.7).

Заметим, что все найденные в разделе 1.3.3 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (1.3.10), (1.3.11) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (1.3.5), (1.3.6). Для этого все найденные формы нужно поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

1.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (1.3.10), (1.3.11) (лишь в уравнение на Z') внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (1.4.1)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.4.2)$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (это действительно имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля); консервативность подтвердилась бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (1.4.1), (1.4.2) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \quad \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha), \quad (1.4.3)$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого (во всем фазовом пространстве) первого интеграла система (1.4.1), (1.4.2), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств; см. предложение 1.2, а также [23, 27]).

Предложение 1.2. *Если $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, то система (1.4.1), (1.4.2) имеет два независимых первых интеграла (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий):*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2 \left(1 + b_0 Z \Delta(\alpha) + \frac{b_0}{2} (Z^2 - \Delta^2(\alpha)) \ln \left| \frac{Z + \Delta(\alpha)}{Z - \Delta(\alpha)} \right| \right) = C_0 = \text{const}, \quad (1.4.4)$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 - \Delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}. \quad (1.4.5)$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости предложения 1.2, достаточно продифференцировать функции (1.4.4) и (1.4.5) в силу системы (1.4.1), (1.4.2) при условии $F(\alpha) = \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$. \square

Более того, из вида первого интеграла (1.4.4) ясно, что притягивающие и отталкивающие предельные множества системы (1.4.1), (1.4.2) могут быть найдены из системы недифференциальных равенств $Z = 0$, $\Delta(\alpha) = 0$. В данном случае первый интеграл (1.4.5) является частным случаем интеграла (1.4.3).

1.5. Системы со знакопеременной диссипацией. Модифицируем далее систему (1.4.1), (1.4.2), где будут присутствовать уже два ключевых параметра $b_0 \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Таким образом, будем рассматривать следующую систему:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha) \Delta(\alpha), \quad (1.5.1)$$

$$\alpha' = Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \quad (1.5.2)$$

$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \quad (1.5.3)$$

где $\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей (внутреннего) силового поля содержат параметр b_0 , а неконсервативной составляющей (внешнего) поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (1.5.1), (1.5.2) фактически является «образом» следующей системы при замене $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\Delta}(\alpha) f_1(\alpha) + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \quad (1.5.4)$$

$$\alpha' = f_1(\alpha) Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha) \bar{f}(\alpha) f_1(\alpha), \quad (1.5.5)$$

$$Z' = F(\alpha) f_1(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \quad (1.5.6)$$

Выше мы ввели подобное поле (см. раздел 1.4), добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (1.4.1), (1.4.2), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность наблюдается при дополнительном условии $b_0 = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b_0 > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ приняла вид (1.5.1), (1.5.2). Как будет видно далее, только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (1.5.4), (1.5.5) имеет более общий вид, чем система (1.2.12), (1.2.13), взятая из динамики твердого тела, и, в частности, при $Z = \omega$, $b_0 = -b_1 = b$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $f_1(\alpha) \equiv -1$ они совпадают.

1.5.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы.

Теорема 1.3. *Если выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то система (1.5.1), (1.5.2) обладает полным набором из двух независимых первых интегралов: одного гладкого и одного, вообще говоря, трансцендентного, т.е. имеющего существенно особые точки. Кроме того, она обладает двумя инвариантными внешними дифференциальными формами, независимыми между собой, но зависимыми с первыми интегралами.*

Доказательство. Действительно, пусть выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$; тогда

$$F(\alpha)\bar{f}(\alpha) = \lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \quad \frac{d}{d\alpha} [F(\alpha)\bar{f}(\alpha)] = \lambda\tilde{\Delta}(\alpha)(\mu - 3\Delta^2(\alpha)).$$

Напомним, что в процессе исследования системы (1.3.5), (1.3.6) (при переходе к системе (1.3.10), (1.3.11)) была сделана замена независимой переменной: $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$. Это значит, что инвариантные внешние дифференциальные формы (1.3.12) (например, $\rho_1(Z) = 1/Z^3$, $\rho_2(v) = v^3$), найденные для системы (1.3.10), (1.3.11), позволяют выписать инвариантные дифференциальные формы, например,

$$\rho_1(\alpha, Z) = \frac{1}{f_1(\alpha)Z^3}, \quad \rho_2(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_1(\alpha)} \quad (1.5.7)$$

для системы (1.3.5), (1.3.6).

Более того, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; \alpha, Z)$ дивергенции векторного поля $W_1(v; \alpha, Z)$ первоначальной системы есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; \alpha, Z)W_1(v; \alpha, Z)$ преобразованной системы после замены $\rho(v; \alpha, Z)d/dt = d/d\tau$ независимой переменной t в первоначальной системе.

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $w_1(v; \alpha, Z)$ системы (1.5.1), (1.5.2) со знакопеременной диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил). Имеем:

$$\operatorname{div} [v^3 w_1(v; \alpha, Z)] = v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда составная система уравнений характеристик для поиска решения линейного уравнения

$$\operatorname{div} [\rho(v; \alpha, Z) w_1(v; \alpha, Z)] = 0 \quad (1.5.8)$$

в частных производных будет состоять из системы (1.5.1), (1.5.2) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (1.5.9)$$

Системе (1.5.1), (1.5.2) можно поставить в соответствие уравнения

$$\frac{dZ}{d\alpha} = \frac{\lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_0 Z^3 \tilde{\Delta}(\alpha) - b_1 \lambda Z \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha)}{Z + b_0 Z^2 \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))}$$

или

$$\frac{dZ}{d\Delta} = \frac{\lambda\Delta + b_0Z^3 - b_1\lambda Z\Delta^2}{Z + b_0Z^2\Delta + b_1\lambda\Delta(\mu - \Delta^2)}, \quad (1.5.10)$$

а также

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-b_1\lambda\mu\tilde{\Delta}(\alpha)\rho}{Z + b_0Z^2\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))},$$

или

$$\frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-b_1\lambda\mu\rho}{Z + b_0Z^2\Delta + b_1\lambda\Delta(\mu - \Delta^2)}. \quad (1.5.11)$$

Введя новую однородную переменную u , $Z = u\Delta$, уравнениям (1.5.10), (1.5.11) можно поставить в соответствие следующие соотношения: сначала

$$\Delta \frac{du}{d\Delta} + u = \frac{\lambda + b_0u^3\Delta^2 - b_1\lambda u\Delta^2}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)},$$

а затем

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du}{d\Delta} &= \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} &= \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u + b_0u^2\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Первое уравнение из (1.5.12) (приводящееся к линейному неоднородному) позволяет выписать первый интеграл (вообще говоря, с существенно особыми точками) независимой системы (1.5.2) (а значит, и для независимой системы (1.5.5)). Действительно, справедливо следующее уравнение Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du} = \frac{(u + b_1\lambda\mu)\Delta + (b_0u^2 - b_1\lambda)\Delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}, \quad (1.5.13)$$

которое заменой $p = 1/\Delta^2$ приводится к линейному неоднородному:

$$\frac{dp}{du} = \frac{2(u + b_1\lambda\mu)p + 2(b_0u^2 - b_1\lambda)}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}. \quad (1.5.14)$$

Последнее уравнение имеет линейный по p первый интеграл (вообще говоря, с существенно особыми точками) следующего вида:

$$\begin{aligned} p\Psi_0(u) - \int \varphi(u)\Psi_0(u)du &= C = \text{const}, \\ \Psi_0(u) &= \exp\left\{-\int \frac{2(u + b_1\lambda\mu)du}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}\right\}, \quad \varphi(u) = \frac{2(b_0u^2 - b_1\lambda)}{u^2 + b_1\lambda\mu u - \lambda}. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Тогда полученный первый интеграл независимой системы (1.5.2) в первоначальных переменных имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_1(Z; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{Z}{\Delta(\alpha)}\right) = C_1 = \text{const}. \quad (1.5.16)$$

У системы (1.5.1), (1.5.2) имеется также гладкий первый интеграл следующего вида (для простоты при $b_0 = -b_1$):

$$\Theta_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 + 2b_0Z\Delta(\alpha) - b_0^2\mu Z^2) = C_0 = \text{const}. \quad (1.5.17)$$

Второе уравнение из (1.5.12), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, из уравнений (1.5.12) следует, что справедливо соотношение

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}, \quad (1.5.18)$$

откуда получаем еще одно инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu \int \frac{du}{\lambda - b_1\lambda\mu u - u^2}\right\} = C_\rho = \text{const}. \quad (1.5.19)$$

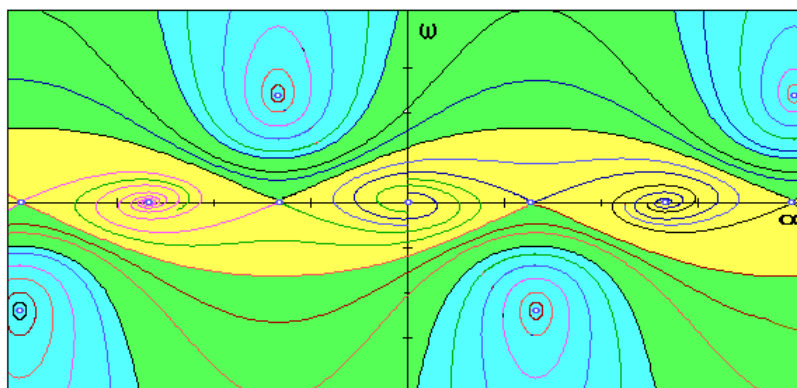


Рис. 2. Относительно грубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

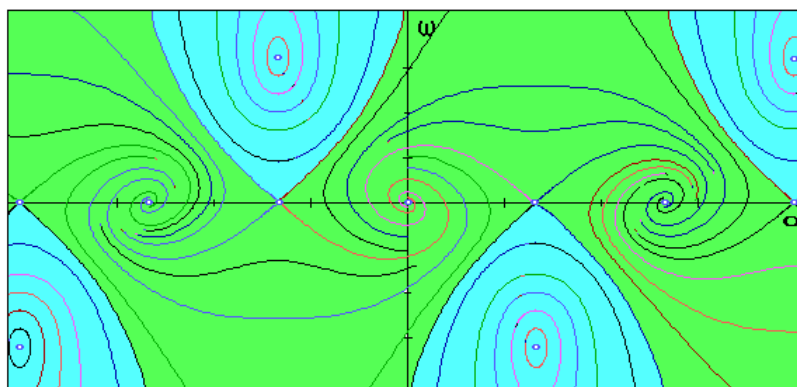


Рис. 3. Относительно негрубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

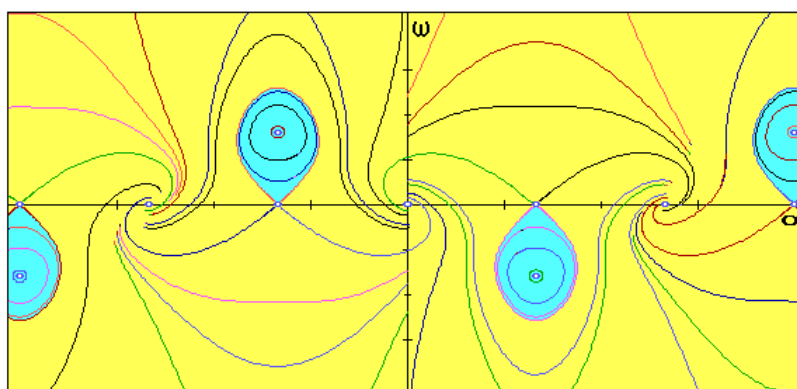


Рис. 4. Относительно грубый портрет системы со знакопеременной диссипацией.

Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.5.8) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \mathcal{F} [\Theta_0, \Theta_1], \quad (1.5.20)$$

где $\mathcal{F} [\Theta_0, \Theta_1]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов; при этом Θ_0, Θ_1 — два первых интеграла (1.5.17), (1.5.16) соответственно.

В частности, в качестве двух функционально независимых решений линейного уравнения (1.5.8) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(v; Z; \alpha) = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \Theta_0(v; Z; \alpha), \quad (1.5.21)$$

$$\rho_2(Z; \alpha) = \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} \cdot \Theta_1(Z; \alpha), \quad (1.5.22)$$

где $u = Z/\Delta(\alpha)$. Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема для системы (1.5.1), (1.5.2) является следующая форма:

$$\rho(v; \alpha, Z) dv \wedge d\alpha \wedge dZ = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du}{\lambda - b_1 \lambda \mu u - u^2} \right\} dv \wedge d\alpha \wedge dZ, \quad u = \frac{Z}{\Delta(\alpha)}. \quad \square$$

Заметим, что все найденные в разделе 1.5.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (1.5.1), (1.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (1.5.4), (1.5.5). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_1(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

1.5.2. Некоторые фазовые портреты. 2. Приведем фазовые портреты системы (1.5.5), которая получена из системы (1.5.2) и в которой возвращена независимая переменная t (ранее была произведена ее замена $d/dt = f_1(\alpha)d/d\tau$, см. выше; штрих для обозначения производной сохранен). При этом три различных топологических типа портретов приводятся для функций $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $f_1(\alpha) \equiv -1$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$, $\mu = 1$. Эти три типа фазовых портретов системы (1.5.5) представлены на рис. 2–4 ($\omega \leftrightarrow Z$, см. также [69, 84]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в \mathbb{R}^n // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в \mathbb{R}^n // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.

14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.

40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.

62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. *Шамолин М. В.* Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.

81. *Шамолин М. В.* Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (*Vasilyev V.*, ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

On strong solutions of a B -elliptic boundary-value problem and its difference approximation (<i>O. P. Barabash</i>)	3
On functioning of resource networks (<i>I. M. Erusalimskiy, H. N. Abdulrahman, V. A. Skorokhodov, V. A. Babintsev</i>)	13
A contribution of the generalized Bochner technique to the geometry of complete minimal submanifolds (<i>S. E. Stepanov, I. I. Tsyganok</i>)	22
Structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator of six-electron systems in the Hubbard model. Fourth triplet state (<i>S. M. Tashpulatov</i>)	31
Splitting transformation for a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay in the equation for the slow variable (<i>O. B. Tsekhan</i>)	49
Invariants of homogeneous dynamic systems of arbitrary odd order with dissipation. I. Third-order systems (<i>M. V. Shamolin</i>)	72

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНТИ РАН)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович