ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 238 (2025). С. 24–35
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-24-35

УДК 519.1

АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПАРАМЕТРАМ

© 2025 г. **А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН**

Аннотация. Продемонстрированы подходы к перечислениюю различных типов объектов: с ограничениями, помеченных и непомеченных. Разработана алгоритмическая схема построения геометричесческих интерпретаций семейств комбинаторных чисел. Рассмотрены вопросы перечисления плоских и неплоских деревьев по различным параметрам.

***Ключевые слова*:** дерево, плоское дерево, решеточный путь, алгоритм перечисления.

ALGORITHMS FOR ENUMERATION OF LATTICE PATHS WITH CONSTRAINTS AND ROOT TREES BY VARIOUS PARAMETERS

© 2025 **A. A. BALAGURA, O. V. KUZMIN**

Abstract. Approaches to enumerating various types of objects are demonstrated: with restrictions, marked, and unmarked. An algorithmic scheme for constructing geometric interpretations of families of combinatorial numbers has been developed. The issues of enumerating flat and non-flat trees according to various parameters are considered.

***Keywords and phrases*:** tree, plane trees, lattice path, enumeration algorithm.

***AMS Subject Classification*:** 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

1. Введение. Существует множество подходов к перечислению, которые зависят от особенностей перечисляемых объектов (см. [3]). В работе рассматриваются вопросы перечисления решеточных путей и деревьев, представляющих собой объекты разных типов: с ограничениями, помеченных и непомеченных.

В п. 2 рассматривается перечисление объектов с ограничениями — подмножества решеточных путей. Вводятся основные определения изучаемых решеточных путей. Приводится алгоритмическая схема постороения перечислительных интерепретаций решеточных путей, соответствующих семейству комбинаторных чисел.

В п. 3 рассматривается перечисление помеченных объектов — подмножества помеченных корневых деревьев. Вводятся основные понятия для рассматриваемого подмножества деревьев, доказывается теорема о перечислении с весами и приводятся следствия из нее: явный вид и свойства обобщенных расщепленных чисел Шредера, алгоритм построения полного разбиения множества.

В п. 4 построены алгоритмы кодирования и декодирования подмножества непомеченных плоских корневых деревьев. Кодирование осуществляется неубывающими кортежами с присвоением меток внутренним вершинам дерева. Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев, который позволяет свести задачу о подсчете мощности множества деверьев к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей. Подсчитана мощность рассматриваемого множества деревьев.

2. Решеточные пути. Многие комбинаторные задачи могут быть выражены в терминах перечисления решеточных путей.

Конечным неотрицательным решеточным путем L в пространстве E^2 называют последовательность $L = (v_1, \dots, v_k)$, где $v_i(x_i, y_i) \in \mathbb{N}_0^2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $v_{i+1} - v_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$. Пусть $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$; тогда L называют решеточным путем типа $[a, b]$, если он проходит a от к b. Следуя [7], рассматриваем не все возможные пути на решетке, а только те, которые не проходят через определенное множество «запрещенных» точек плоскости. Пусть числа φ_n определяются рекуррентной формулой

$$\varphi_{n+2} = k_1\varphi_{n+1} + k_2\varphi_n,$$

где φ_0, φ_1, k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$.

Определим операцию сдвига точки $M(x, y)$ на вектор $N(\alpha_x, \alpha_y)$: $M \otimes N = (x + \alpha_x, y + \alpha_y)$. Сдвиг множества — сдвиг всех его точек.

Обозначим через $[a_n, b_n]$ тип решеточных путей:

$$a_n = (0; Y_n), \quad b_n = (0; X_n), \quad X_n = X(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1), \quad Y_n = Y(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1);$$

$Z_n = Z(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1)$ — множество запрещенных точек. Путь, проходящий хотя бы через одну точку из множества Z_n, назовем запрещенным; все остальные — допустимыми. Пусть Λ — множество всех допустимых решеточных путей типа $[a_n, b_n]$ при заданном Z_n.

Лемма 1 (о произведении). *Пусть для всех $k \in \mathbb{N}$, $O(0, y)$, $A(x_1, y_1)$ выполняются условия*

(i) $A_1(x_1+1, y_1-k+1)$, $Z = \Big\{(x_1, y_1+1),\ (x_1+1, y_1+1),\ (x_1+1, y_1-k),\ (x_1-1, y_1-1),\ \dots,\ (x_1-1, y_1-k-1)\Big\}$ *или*

(ii) $A_1(x_1+k-1, y_1-1)$, $Z = \Big\{(x_1, y_1+1),\ \dots,\ (x_1+k-1, y_1+1),\ (x_1+k, y_1),\ (x_1-1, y_1-2)\Big\}$.

Тогда

$$\big|\Lambda[O, A_1]\big| = k\big|\Lambda[O, A]\big|.$$

Лемма 2 (о сумме). *Пусть $O(0, y), A(x_1, y_1), B(x_1+1, y_1+1), C(x_1+1, y_1)$. Тогда*

$$\big|L[O, C]\big| = \big|L[O, A]\big| + \big|L[O, B]\big|.$$

Лемма 3 (о запрещении всех внутренних точек в прямоугольнике). *Пусть для всех a, b, x, $y \in \mathbb{N}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_1+a, y_1)$, $D(x_1+a, y_1-b)$ выполнены условия*

$$P = \Big\{(x, y) : (x_1, y_1) \leqslant (x, y_1) \leqslant (x_1+a, y_1),\ (x_1, y_1-b) \leqslant (x_1, y) \leqslant (x_1, y_1)\Big\},$$
$$Z = \Big\{(x_1, y_1+1),\ \dots,\ (x_1+k-1, y_1+1),\ (x_1+k, y_1),\ (x_1-1, y_1-2)\Big\},$$
$$\big|\Lambda[O, A_1]\big| = k\big|\Lambda[O, A]\big|, \quad \big|\Lambda[O, (x, y_1)]\big| = \big|\Lambda[O, (x_1, y)]\big| = 0,$$
$$\tilde{P} = \Big\{(x, y) : x_1 \leqslant x \leqslant x_1+a,\ y_1-b \leqslant y \leqslant y_1\Big\}.$$

Тогда

$$\big|\Lambda[O, (x, y)]\big| = 0$$

для всех $x, y \in \tilde{P}$.

Лемма 4 (о переносе множества решеточных путей). *Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\big|\Lambda[A, B]\big| = m$. Тогда $\big|\Lambda[A \otimes N, B \otimes N]\big| = m$ при $Z \otimes N$.*

Лемма 5 (о числе допустимых путей при ограничениях множеством $C = C(k_1, k_2)$, $k_1 \leqslant k_2$)**.** *Пусть для всех k_1, k_2, a, b, x_1, y_1 выполнены условия*

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \leqslant k_2, \quad O(0, Y), \quad A(x_1, y_1), \quad D(x_1+1, y_1-k-1),$$
$$M(x_1+1, y_1-k_2+1), \quad F(x_1+k_1+2, 0),$$
$$\bigl|\Lambda[O, D]\bigr| = b, \quad \bigl|\Lambda[O, A]\bigr| = a,$$
$$Z = (x_1+2, Y-k_2-1), \quad \dots, \quad (x_1+k_1+1, Y-k_2-1), \quad (x_1+2, Y-k_2-2), \quad \dots,$$
$$(x_1+2, Y-k_1-1), \quad (x_1+k_1+1, Y-k_1-2), \quad (x_1+2, Y-1), \quad \dots,$$
$$(x_1+2, Y-k_2+1), \quad (x_1+2, Y-k_1-1), \quad (x_1, Y), \quad (x_1+1, Y).$$

Тогда

$$\bigl|\Lambda[O, F]\bigr| = k_2\bigl|\Lambda[O, A]\bigr| + k_1\bigl|\Lambda[O, D]\bigr| = k_2 a + k_1 b.$$

Лемма 6 (о числе допустимых путей при ограничениях множеством C, $k_1 \geqslant k_2$)**.** *Пусть для всех k_1, k_2, a, b, x_1, y_1 выполнены условия*

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geqslant k_2, \quad O(0, Y), \quad A(x_1, y_1), \quad D(x_1+k_1+1, y_1-1),$$
$$M(x_1+k_2-1, y_1-1), \quad F(x_1+k_1+2, 0),$$
$$\bigl|\Lambda[O, D]\bigr| = b, \quad \bigl|\Lambda[O, A]\bigr| = a,$$
$$Z = (x_1, Y-2), \quad \dots, (x_1+k_2-2, Y-2), \quad (x_1+k_2, Y-2), \quad \dots, (x_1+k_1, Y-2),$$
$$(x_1+k_2, Y-3), \quad \dots, \quad (x_1+k_2, Y-k_1-1), \quad (x_1+k_1+1, Y-k_1-1).$$

Тогда

$$\bigl|\Lambda[O, F]\bigr| = k_2\bigl|\Lambda[O, A]\bigr| + k_1\bigl|\Lambda[O, D]\bigr| = k_2 a + k_1 b.$$

Лемма 7 (о множестве начальных точек при $k_1 \geqslant k_2$, $\varphi_0 \leqslant \varphi_1$)**.** *Пусть для всех k_1, k_2, φ_0, φ_1, x_1, y_1 выполнены условия*

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geqslant k_2, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi_1, \quad O(0, k_1+2), \quad F(\phi_1+3, 0), \quad Z = A_1.$$

Тогда

$$\bigl|\Lambda[O, F]\bigr| = \varphi_2.$$

Лемма 8 (о множестве начальных точек при $k_1 \geqslant k_2$, $\varphi_0 > \varphi_1$)**.** *Пусть для всех k_1, k_2, φ_0, φ_1, x_1, y_1 выполнены условия*

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geqslant k_2, \quad \varphi_0 > \varphi_1, \quad O(0, 5), \quad F(\phi_0+k_1+1, 0), \quad Z = A.$$

Тогда

$$\bigl|\Lambda[O, F]\bigr| = \varphi_2.$$

Пусть $A = A(n, \varphi_0, \varphi_1)$ — множество начальных точек; $B = B(k_1, k_2)$, $C = C(k_1, k_2)$, $D = D(k_1, k_2)$, $F = F(k_1, k_2)$ — множества основных точек; $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_i = (n, \varphi_0, \varphi_1)$, $i = 1, 2,$ — вектор сдвига по начальным точкам; $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $\delta_i = \delta_i(k_1, k_2)$, $i = 1, 2,$ — вектор сдвига основных точек; $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ — множество коэффициентов сдвига основных точек.

Построено правило 1 нахождения A, B, C, D, F, H, δ, σ.

Алгоритм 1. Вход алгоритма: φ_0, φ_1, k_1, k_2.

(i) Строим A, B, C, D, F, H, δ, σ по правилу 1.

(ii) Находим числа X_n, Y_n по правилу 1.

(iii) Строим множество запрещенных точек: $Z_n = \{A,\ B \otimes \sigma \otimes \delta,\ C \otimes \sigma \otimes \delta,\ \dots,\ C \otimes \sigma \otimes \alpha_1\delta,\ B \otimes \sigma \otimes \delta,\ \dots,\ B \otimes \sigma \otimes \alpha_2\delta,\ D \otimes \sigma \otimes \delta,\ \dots,\ D \otimes \sigma \otimes \alpha_3\delta,\ F \otimes \sigma \otimes \delta,\ \dots,\ F \otimes \sigma \otimes \alpha_4\delta\}$.

Выход алгоритма: a_n, b_n, Z_n.

Идея алгоритма 1 состоит в том, что множества по правилу 1 (см. [6]) строятся один раз, а далее сдвигаются на построенные векторы в зависимости от n. На основе лемм 1–8 доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $[a_n, b_n]$ и Z_n построены в соответствии с алгоритмом* 1. *Тогда*

$$\big|\Lambda[a_n, b_n]\big| = \varphi_n.$$

3. Перечисление помеченных корневых деревьев. Нам понадобятся следующие определения. Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d есть множество вершин, одна из которых называется корнем дерева d, а оставшиеся вершины разбиты на $m \geqslant 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие преемников, называются концевыми вершинами. Вершины, имеющие преемники, называют внутренними вершинами.

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами $1, 2, \ldots, n$. Повторим следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными (см. [7]). Пометим числом $n+1$ такую вершину v, что

(a) вершина v не помечена, а все ее преемники помечены и
(b) среди всех не помеченных вершин, все преемники которых помечены, v является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой.

Полученное дерево называется помеченным.

Пусть $n \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $D(n)$ множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин; через $D(n,k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин, через $D(n,k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Стандартной формой корневого дерева назовем такое его изображение, при котором слева направо не убывают количество внутренних вершин от корня до каждой концевой вершины и количество концевых вершин каждой из внутренних вершин имеющих одного ближайшего предка. Далее будем предполагать, что рассматриваемые деревья записаны в стандартной форме.

Обозначим через π_n — множество всех n-перестановок и через π_n^k — множество перестановок $\pi \in \pi_n$, имеющих в точности k циклов. Сопоставим каждому дереву $d \in D(n,k)$ перестановку $\pi(d) \in \pi_n^k$ по следующему правилу.

Правило 1. Пусть $(p_1^i, \ldots, p_j^i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, — последовательность всех концевых вершин дерева d (записанных в порядке появления), у которых первым предком после корня является i-й преемник корня $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$ или эта вершина сама является i-м преемником корня $(j=1)$. Тогда $\pi(d) = (p_1^1, \ldots, p_{i_1}^1) \ldots (p_1^k, \ldots, p_{i_k}^k)$, где $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m = n$.

Для $k \geqslant 2$ дерево d назовем k-перестановочным, если сопоставленная ему по правилу 1 перестановка $\pi(d)$ имеет в точности k циклов.

Сопоставим каждому дереву $D \in D(n)$ перестановку $\pi(D) \in \pi_n$ по следующему правилу.

Правило 2. Пусть $(p_1, \ldots, p_n)$ — последовательность всех концевых вершин дерева D, записанных в порядке появления. Тогда $\pi(D) = (p_1, \ldots, p_n)$.

Перестановку $\pi(D) = (p_1, \ldots, p_n)$ назовем перестановкой дерева D.

Пусть $g_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. На рассматриваемом множестве деревьев введем весовые функции по следующим правилам.

Правило 3. Положим $g_i g_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников; g_1^{-1} — вес вершины дерева, не имеющей преемников.

Для $d \in D(n,k)$ считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для $D \in D(n)$ — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Введем следующие обозначения. Для $D \in D(n)$ обозначим: $v(n)$ — количество всех вершин в дереве D, не считая корня, $w(n)$ — количество внутренних вершин в дереве D, не считая корня,

$D_i(n)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, — множество всех деревьев $D \in D(n)$ у которых в точности i внутренних вершин, не считая корня, $\pi(D_i(n)) = \{\pi(D) : D \in D_i(n)\}$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

Введем для $d \in D(n,k)$ следующие обозначения: $v(n,k)$ — количество вершин в дереве d, не считая корня; $w(n,k)$ — количество внутренних вершин в дереве d,не считая корня; $D_i(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, — множество всех деревьев $d \in D(n)$, у которых в точности i внутренних вершин, не считая корня и k преемников корня; $\pi(D_i(n,k)) = \{\pi(d) : d \in D_i(n,k)\}$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$.

Обозначим через $g(A)$ вес множества A, через $g(a)$ — вес a, $a \in A$, $\mathbf{n} = \{1,2,\dots,n\}$. Нам понадобятся следующие известные результаты (см., например, [2,3,7]). -полиномы имеют явный вид

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k}\left[(k-1)!g_1^{2n-k}\right]^{-1} \sum_{2n-2k,\ n-k} (-1)^{r_1} r_1!(2n-k-r_1-1)! \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i}[r_i!(i!)^{r_i}]^{-1},$$

$n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, а суммирование ведется по всем разбиениям n на k слагаемых и $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, соответственно. Дополнительно полагают $B_{n,n}(g) = g_1^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Лемма 9. *Число всех разбиений* $\mathbf{n}$ *на* k *непустых блоков равно*

$$S(n,k) = n!\sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left[r_i!(i!)^{r_i}\right]^{-1},$$

где $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Лемма 10. *Число всех перестановок* $\pi \in \pi_n$*, имеющих в точности* k *циклов, равно*

$$\left|s(n,k)\right| = n!\sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left[r_i!(i)^{r_i}\right]^{-1},$$

где $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть весовая функция определяется правилом 3. В [1] найдена интерпретация -полиномов, которую дает следующая теорема.

Теорема 2. *Для* $n,k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *суммарный вес всех различных* k*-перестановочных* n*-деревьев* d *равен* $(-1)^{n-k}B_{n,k}(g)$. *Суммарный вес всех* n*-деревьев* D*, имеющих различные перестановки, равен* $(-1)^{n-1}B_{n,1}(g)$.

Доказательство. Докажем, что $\left|D(n)\right| = S_{n1}$. Рассмотрим множество $D(n)$; пусть $D \in D(n)$. По определению $D(n)$, каждое дерево D имеет в точности n концевых вершин и любая внутренняя вершина рассматриваемых деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда $w(n) \in \{n-2,\, n-3,\, \dots,\, 0\}$, $w(n) = v(n) - n$ и $v(n) \in \{2n-2,\, 2n-3,\, \dots,\, n\}$. Поскольку

$$D(n) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n), \quad D_i(n) \cap D_j(n) = \varnothing, \quad i \neq j,$$

то

$$\left|D(n)\right| = \sum_{i=0}^{n-2} \left|D_i(n)\right|.$$

Рассмотрим $D \in D_{n-2-i}(n)$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$. Тогда $v(n) = 2n-2-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$. Из определения $D(n)$ следует что $\left|D_{n-2-i}(n)\right|$ — число всех разбиений $\mathbf{2n-2-i}$ на $n-i-1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины один, т.е. $r_1 = 0$. Разбиение множества $\mathbf{2n-2}$ на $n-1$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2-i}$ на $n-i-1$ блоков, у которых $r_1 = 0$, добавлением i блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n-2-m, \tag{1}$$

где m — число внутренних вершин дерева D. Тогда с учетом леммы 9 имеем

$$\bigl|D(n)\bigr| = \sum_{i=0}^{n-2} \bigl|D_{n-2-i}(n)\bigr| = \sum_{i=0}^{n-2} \sideset{}{'}\sum_{\substack{2n-2\\ n-1}} (2n-2-i)! \prod_{i=2}^{n} \bigl[r_i!(i!)^{r_i}\bigr]^{-1}, \tag{2}$$

где $n \geqslant 2$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$, а внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям $2n-2$ на $(n-1)$ слагаемых, у которых $r_1 = i$. Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-2$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-2$; тогда (2) равно

$$\sum_{\substack{2n-2\\ n-1}} (2n-2-r_1)! \prod_{i=2}^{n} \bigl[r_i!(i!)^{r_i}\bigr]^{-1} = S_{n1}, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

Докажем, что $\bigl|D(n,k)\bigr| = S_{nk}$. Рассмотрим множество $D(n,k)$; пусть $d \in D(n,k)$. По определению $D(n,k)$, каждое дерево d имеет в точности n концевых вершин, k преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$w(n,k) \in \bigl\{n-k,\ n-k-1,\ \ldots,\ 0\bigr\}, \quad w(n,k) = v(n,k)-n, \quad v(n,k) \in \bigl\{2n-k,\ 2n-k-1,\ \ldots,\ n\bigr\}.$$

Поскольку

$$D(n,k) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n,k), \quad D_i(n,k) \cap D_j(n,k) = \varnothing, \quad i \neq j,$$

то

$$\bigl|D(n,k)\bigr| = \sum_{i=0}^{n-k} \bigl|D_i(n,k)\bigr|.$$

Рассмотрим $d \in D_{n-k-i}(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Тогда $v(n,k) = 2n-k-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Из определения $D(n,k)$ следует, что $\bigl|D_{n-k-i}(n,k)\bigr|$ — число всех разбиений $\mathbf{2n-k-i}$ на $n-k-i+1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины 1, т.е. $r_1 = 0$ и блок разбиения, содержащий элемент с максимальной меткой, имеет длину k. Поскольку элемент с максимальной меткой фиксирован, исключим его из рассмотрения. Рассмотрим число всех разбиений $\mathbf{2n-k-1-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $r_1 = 0$ и хотя бы один блок разбиения имеет длину $k-1$. Для блока длины $k-1$ существует в точности $(k-1)!$ способов записи. Согласно лемме 10, для каждого разбиения остального множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которого $r_1 = 0$, существует в точности $\prod\limits_{i=2}^{n-k+1} \bigl[r_i!(i!)^{r_i}\bigr]^{-1}$ способов записи, где $(0, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ — тип разбиения. Разбиение множества $\mathbf{2n-2k}$ на $n-k$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $r_1 = 0$, добавлением i блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n-k-m, \tag{4}$$

где m — число внутренних вершин дерева d. Тогда имеем

$$\bigl|D(n,k)\bigr| = \sum_{i=0}^{n-k} \bigl|D_{n-k-i}(n,k)\bigr| = \sum_{i=0}^{n-k} \sideset{}{''}\sum_{\substack{2n-2k\\ n-k}} \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \bigl[r_i!(i!)^{r_i}\bigr]^{-1}, \tag{5}$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$, $i \leqslant n-k$, а внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, у которых $r_1 = i$. Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-k$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-k$; тогда (5) равно

$$\sum_{\substack{2n-2k\\ n-k}} \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \bigl[r_i!(i!)^{r_i}\bigr]^{-1} = S_{nk}, \quad n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{6}$$

Зададим вес на множестве $D(n)$ по правилу 3. Каждый тип разбиения $(r_1, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ числа $2n-2$ на $n-1$ слагаемых задает подмножество множества $D_{n-2-r_1}(n)$; следовательно, для всех $D \in D_i(n)$

$$g(D) = \left[g_1^{2n-1-r_1}\right]^{-1} \prod_{i=2}^{n} g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому $D \in D(n)$ перестановку $\pi \in \pi_n$ по правилу 2.

Зададим вес на множестве $D(n,k)$ по правилу 3. Каждый тип разбиения $(r_1, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ числа $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых задает подмножество множества $D_{n-k-r_1}(n,k)$; следовательно, для всех $d \in D_i(n,k)$

$$g(d) = \left[g_1^{2n-k-r_1}\right]^{-1} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому $d \in D(n,k)$ перестановку $\pi \in \pi_n^k$ по правилу 1. Заметим, что число всех различных n-перестановок, имеющих в точности k циклов, равно $\left|s(n,k)\right|$.

По построению множеств $D(n)$ и $D(n,k)$

$$\pi_n \supseteq \pi(D_{n-2}(n)) \supseteq \pi(D_{n-1}(n)) \supseteq \dots \supseteq \pi(D_0(n)),$$
$$\pi_n^k \supseteq \pi(D_{n-k}(n,k)) \supseteq \pi(D_{n-k-1}(n,k)) \supseteq \dots \supseteq \pi(D_0(n,k)),$$

если d_1 (D_1) возможно получить из d_2 (D_2) соединением двух соседних внутренних вершин (или для $D_1, D_2 \in D(n)$ соседних внутренней вершины и корня) в каждом из рассматриваемых деревьев или только в одном, то $\pi(d_1) = \pi(d_2)$ $(\pi(D_1) = \pi(D_2))$.

Применяя метод включения исключения получим, что вес всех n-деревьев, имеющих различные перестановки, равен

$$\sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} g(D_m(n)).$$

С учетом правила 3 и формул (1), (3) последнее выражение равно

$$\left[g_1^{2n-1}\right]^{-1} \sum_{\substack{2n-2\\ n-1}} (-1)^{r_1} r_1!(2n-2-r_1)! \prod_{i=1}^{n} g_i^{r_i} \left[r_i!(i!)^{r_i}\right]^{-1} = (-1)^{n-1} B_{n1}(g).$$

Вес всех различных k-перестановочных n-деревьев равен

$$\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} g(D_m(n,k)).$$

С учетом правила 3 и формул (4), (6) последнее выражение равно

$$\left[(k-1)! g_1^{2n-k}\right]^{-1} \sum_{\substack{2n-2k,\\ n-k}} (-1)^{r_1} r_1! \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} \left[r_i!(i!)^{r_i}\right]^{-1} = (-1)^{n-k} B_{nk}(g).$$

Теорема доказана. □

В [2] введены расщепленные числа Шредера второго рода K_{nm}, которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по параметру m — количеству внутренних вершин.

Введем обобщения этих чисел — расщепленные обобщенные числа Шредера K_{nmk}, которые определяют число корневых деревьев с n концевыми вершинами по количеству m внутренних вершин и количеству k преемников корня.

Применим формулу (2) теоремы 2.

Следствие 1. *Для чисел K_{nm} справедливо соотношение*

$$K_{nm} = {\sum_{\substack{2n-2\\ n-1}}}' (n+m)! \prod_{i=2}^{n} \left[r_i!(i!)^{r_i}\right]^{-1}, \quad n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2,$$

где суммирование ведется по всем таким разбиениям $(2n-2)$ *на* $n-1$ *слагаемых, у которых* $r_1 = n-2-m$.

Применим формулу (5) теоремы 2.

Следствие 2. *Для чисел* K_{nm} *справедливо соотношение*

$$K_{nmk} = \sum_{\substack{2n-2k \\ n-k}}' \frac{(n+m-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \left[r_i!(i!)^{r_i}\right]^{-1}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n, \quad m \leqslant n-k,$$

где суммирование ведется по всем таким разбиениям $2n-2k$ *на* $n-k$ *слагаемых, у которых* $r_1 = n-k-m$.

Применим формулы (3), (6) теоремы 2.

Следствие 3. *Для чисел* S_{nk} *справедливо соотношение*

$$S_{nk} = \sum_{m=0}^{n-k} K_{nmk}, \quad k \geqslant 2.$$

Положим в теореме 2 $g_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$.

Следствие 4. *Для чисел* $s(n,k)$ *справедливы соотношения*

$$\left|s(n,1)\right| = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} K_{nm},$$

$$\left|s(n,k)\right| = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} K_{nmk}, \quad 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Получен следующий алгоритм, который позволяет строить по разбиению β множества $\mathbf{2m}$ на m, $m = n-1$ блоков, полное разбиение α множества $\mathbf{n}$.

Алгоритм 2. Вход алгоритма: разбиение β.

(i) Из разбиения β уберем все r_1 блоков длины 1;
(ii) отмечаем корень дерева;
(iii) элементы блока, содержащего максимальную метку, делаем преемниками корня; длину этого блока обозначим k;
(iv) элементы блока i делаем преемниками концевой вершины с меткой j (каждому элементу блока соответствует отдельная вершина с меткой этого элемента), если и только если:
   (a) j — максимальная метка из всех меток концевых вершин изображенного дерева;
   (b) блок i содержит максимальную метку из всех меток в блоках.

   Повторяем третий шаг для всех оставшися блоков.

Выход алгоритма: k, разбиение α.

4. Перечисление плоских корневых непомеченных деревьев. Остановимся на перечислении множества плоских деревьев. В рамках рассматриваемого подхода приводятся результаты перечисления подмножества непомеченных корневых плоских деревьев (см. [4]). Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев. Предложенные алгоритмы позволили доказать существование взаимно однозначного соответствия между изучаемым множеством деревьев и множеством неубывающих кортежей.

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, \ldots, i_n)$ (см. [2]).

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Положим

$$I(a_1, \ldots, a_n) = \Big\{ (i_1, \ldots, i_n) \;\Big|\; i_j \leqslant a_j,\ i_j \leqslant i_{j+1},\ 1 \leqslant j \leqslant n \Big\};$$

множество I назовем множеством неубывающих кортежей, $X(a_1, \ldots, a_n) = \left|I(a_1, \ldots, a_n)\right|$.

Обозначим через $\bar{D}(n,k)$ множество непомеченных плоских корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин, через $\bar{D}(n,k,r_1,\dots,r_n)$ — множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$, имеющих в точности r_i вершин степени i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку в рассматриваемых деревьях важен порядок внутренних вершин, чтобы его зафиксировать, будем придерживаться известного способа обхода дерева по следующему правилу (см. [7]).

Правило 4. Будем обходить дерево в соответствии с df-порядком, т.е. в глубину, начиная от корня, совершая обход слева направо.

Назовем типом дерева $d \in \bar{D}(n,k)$ последовательность $(n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)})$ степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева по правилу 4. Обозначим через $\tilde{D}(n,k,n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)})$ множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$ типа $(n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)})$.

Опишем способ кодирования деревьев неубывающими кортежами.

Алгоритм 3. Вход алгоритма: диаграмма дерева $d \in \bar{D}(n,k)$.

(i) Обходим дерево по правилу 4. Пусть $v_1,\dots,v_{w(n,k)}$ — последовательность обхода его внутренних вершин (за исключением корня).

(ii) Для всех внутренних вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, считаем число $c(v_i)$ концевых вершин пройденных до внутренней вершины v_i;

(iii) кодируем вершину v_i: $a_i := c(v_i)+1$.

Выход алгоритма: код дерева $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$.

Отметим, что из алгоритма 3 следует, что код дерева является неубывающим кортежем длины $w(n,k)$.

Для описания алгоритма декодирования зададим дерево в виде графа $T = \langle V,R\rangle$, где V — множство вершин, R — множество ребер. Множество V считаем упорядоченным в соответствии с порядком обхода вершин дерева по правилу 1.

Алгоритм 4. Вход алгоритма: код дерева $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$, тип дерева $(n_1,\dots,n_{w(n,k)})$. Пусть $V=\{v_0\}$, R — пустое множество.

(i) Строим все k преемников корня: добавляем вершины $v_1,\dots,v_k$ в V, ребра (v_0,v_1), …, (v_0,v_k) — в R.

(ii) Для $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, обходя по правилу 1 построенное дерево, отсчитываем a_i концевых вершин;

(iii) строим n_i преемников у a_i-й вершины: добавляем элементы $v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}$, …, $v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1}$ после a_i-й вершины в V,

(iv) переобозначаем a_i-ю вершину через w_{a_i},

(v) добавляем элементы $\left(w_{a_i},v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}\right)$, …, $\left(w_{a_i},v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1}\right)$ в R.

Выход алгоритма: дерево $T \in \bar{D}(n,k)$, $T=\langle V,R\rangle$.

Введем обозначение для множества всех возможных значений i-й метки деревьев из рассматриваемого множества:

$$A_i = \Big\{a_i:\ d \in \bar{D}\big(n,k,n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)}\big)\Big\},\quad 1 \leqslant i \leqslant w(n,k).$$

Далее для идентификации принадлежности типов деревьев (и соответственно композиций), к которым относятся множества меток внутренних вершин, будут введены дополнительные индексы.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant n-k-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i$. Введем следующие обозначения: если ${}^in^j = \left({}^in^j_1,\ {}^in^j_2,\dots,\ {}^in^j_{n-k}\right)$ — некоторая композиция; тогда ${}^iA^j_1,\dots,{}^iA^j_{n-k}$ — множества меток деревьев типа $\left({}^in^j_1,\ {}^in^j_2,\dots,\ {}^in^j_{n-k}\right)$, где ${}^iA^j_t$ — множество возможных меток t-й вершины дерева $1 \leqslant t \leqslant n-k$.

Опишем алгоритм построения кодов деревьев всего множества $\bar{D}(n,k)$, который позволяет построить все множество деревьев (по кодам по алгоритму 4) и свести задачу о подсчете мощности множества $\bar{D}(n,k)$ к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей.

Алгоритм 5. Вход алгоритма: n, k.

(i) Пусть ${}^0n_1^0 = \cdots = {}^0n_{n-k}^0 = 2$, ${}^0A_p^0 = \{1, \dots, k+p-1\}$, $1 \leqslant p \leqslant n-k$.

(ii) Для i от 1 до $(n-k-1)$

$$ {}^in_1^0 = \cdots = {}^in_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^in_{n-k-i}^0 = i+2, \quad {}^in_{n-k-i+1}^0 = \cdots = {}^in_{n-k}^0 = 1, $$
$$ {}^iA_1^0 = \{1, 2, \dots, k\}, \quad {}^iA_2^0 = \{1, 2, \dots, k+1\}, \quad \dots, \quad {}^iA_{n-k-i}^0 = \{1, 2, \dots, n-i-1\}. $$

(iii) Пока $n_1 \neq i+2$, выполняем для j от 1 до $(n-k-i)$:

$$ {}^in_1^j := {}^in_1^{j-1}, \quad \dots, \quad {}^in_{n-k-i-j-1}^j := {}^in_{n-k-i-j-1}^{j-1}, \quad {}^in_{n-k-i-j}^j := {}^in_{n-k-i-j}^{j-1} + 1, $$
$$ {}^in_{n-k-i-j+1}^j := {}^in_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1, \quad {}^in_{n-k-i-j+2}^j := \cdots := {}^in_{n-k}^j := 1. $$

Для m от 1 до $(n-k-i)$ и $m \neq n-k-i-j+1$

$$ {}^iA_m^j := {}^iA_m^{j-1}, \quad {}^iA_{n-k-i-j+1}^j := {}^iA_{n-k-i-j+1}^{j-1} \cup \left\{ \left| {}^iA_{n-k-i-j+1}^{j-1} \right| + 1 \right\}. $$

Выход алгоритма: все типы ${}^in^j$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, $0 \leqslant j \leqslant n-k-i$, деревьев из множества $\bar{D}(n,k)$, множества меток ${}^iA_1^j$, ${}^iA_2^j$, …, ${}^iA_{n-k-i}^j$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $d \in \bar{D}(n,k,n_1,\dots,n_t)$, $2 \leqslant t \leqslant n-k$, а дереву d типа $(n_1,\dots,n_t)$ соответствует композиция $\left({}^in_1^j, \dots, {}^in_t^j\right)$ и множества меток ${}^iA_1^j$, ${}^iA_2^j$, …, ${}^iA_t^j$, которые получены по алгоритму 3. Введем обозначение $a_s = \left|{}^iA_s^j\right|$, $1 \leqslant s \leqslant t$.

Теорема 3. $\left|\bar{D}(n,k,n_1,n_2,n_t)\right| = X(a_1,\dots,a_t)$.

Доказательство. Докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\bar{D}(n,k,n_1,n_2,\dots,n_t)$ и $I(a_1,\dots,a_t)$, где построение по дереву его кода осуществляется по алгоритму 3, построение по коду дерева — по алгоритму 4, параметры $a_1,\dots,a_t$ определяются по алгоритму 5.

Пусть $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$ — код некоторого дерева из множества $\bar{D}(n,k,n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)})$, построенный по алгоритму 3. Построим по этому коду дерево $d = \langle V, R\rangle$ согласно алгоритму 4. Докажем, что код дерева d, построенный по алгоритму 3, есть $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$. Выберем в множестве V внутренние вершины $w_{a_1}, w_{a_2}, \dots, w_{a_{w(n,k)}}$. Согласно алгоритму 4 у вершины w_{a_i} число концевых вершин до нее при обходе по правилу 4 равно $a_i - 1$; тогда значение метки вершины w_{a_i} равно a_i, а код дерева d имеет вид $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$. Таким образом, коды совпадают. Аналогично, если $a_1,\dots,a_{w(n,k)}$ — код некоторого дерева $d_1 \in \bar{D}(n,k,n_1,n_2,\dots,n_{w(n,k)})$, построенный по алгоритму 3, то построенное по коду дерево d_2 совпадает с d_1.

Прежде чем перейти к алгоритму 3, докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех различных типов деревьев из $\bar{D}(n,k)$ и множеством всех композиций $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых.

Согласно определениям $d \in D(n,k)$ и $d \in \bar{D}(n,k)$ число внутренних и концевых вершин у соответствующих деревьев совпадают. По определению $\bar{D}(n,k)$, каждое дерево d имеет в точности n концевых вершин, k преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$ w(n,k) \in \left\{n-k,\ n-k-1,\ \dots,\ 0\right\}, \quad w(n,k) = v(n,k) - n, \quad v(n,k) \in \left\{2n-k,\ 2n-k-1,\ \dots,\ n\right\}. $$

Рассмотрим $d \in \bar{D}_{n-k-i}(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Тогда $v(n,k) = 2n-k-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Из определения $\bar{D}(n,k)$ следует, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех различных типов деревьев из $\bar{D}(n,k)$ и множеством всех композиций $2n-k-i$ на $n-k-i$ слагаемых, у которых нет слагаемых, равных 1. Очевидно, что композиция $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых получится из композиции $2n-2-i$ на $n-k-i$ слагаемых, у которых нет единичных слагаемых, добавлением i слагаемых, равных 1.

Докажем, что построение всех типов деревьев из множества $\bar{D}(n,k)$ и множества меток их внутренних вершин может быть выполнено по алгоритму 5.

Рассмотрим композицию $(2, 2, \dots, 2)$. Согласно [1] деревья этого типа имеют максимальное число внутренних вершин, т.е. $w(n, k) = n-k$, число концевых вершин равно n. Построим множества ${}^0A_1^0, \dots, {}^0A_{n-k}^0$. Поскольку у d имеется k преемников корня, первая внутренняя вершина при обходе может встретиться в качестве любого из k преемников корня и ${}^0A_1^0 = \{1, \dots, k\}$, причем $a_1 = 1$ соответствует дереву $((((\dots(u_1, u_2)u_3)u_4)\dots)u_n)$, а $a_1 = k$ — дереву $(u_1(u_2(\dots(u_{n-1}, u_n))\dots))$.

Построим множество ${}^0A_i$, $2 \leqslant i \leqslant n-k$. Если i-я вершина встречается в качестве первого преемника первого преемника корня, тогда ее метка 1, максимальное значение равно $k+i-1$ и соответствует способу расстановки скобок $(u_1, u_2, \dots, (u_i(u_{i-1}), \dots))$. Значит,

$$ {}^0A_i^0 = \{1, \dots, k+i-1\}. $$

Рассмотрим теперь композиции $(2, \dots, 2, 3, 1)$, $(2, \dots, 2, 4, 1, 1)$, $\dots$, $(2, n-k, 1, \dots, 1)$, $(n-k+1, 1, \dots, 1)$. В (6) все композиции $\left({}^in_1^0,\ {}^in_2^0,\ \dots,\ {}^in_{n-k}^0\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n-k-1$, получаются по формулам

$$ {}^in_1^0 = \dots = {}^in_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^in_{n-k-i}^0 = i+2, \quad {}^in_{n-k-i+1}^0 = \dots = {}^in_{n-k}^0 = 1. $$

Согласно [1] число внутренних вершин в дереве типа $(2, \dots, 2, i+2, 1, \dots, 1)$ равно $n-k-i$. Опишем способ построения множеств меток для деревьев типа $(2, 2, \dots, 2, 3, 1)$ из $(2, 2, \dots, 2)$. Число внутренних вершин равно $n-k-1$. Построим множества ${}^0A_i^1$, $1 \leqslant i \leqslant n-k-1$. Степени первых $n-k-2$ вершин в этих типах совпадают; значит, согласно алгоритму 1 множества меток ${}^0A_i^1 = {}^0A_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant n-k-2$. Последняя $(n-k-1)$-я вершина имеет степень 3, но поскольку она последняя, согласно правилу 2, ее степень не влияет на ее значение и значения других меток и ${}^1A_{n-k-1}^1 = {}^0A_{n-k-1}^0$.

Пусть ${}^{i-3}A_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i+3$ — множества меток девевьев типа $(2, \dots, 2, i-1, 1, \dots, 1)$. Построим множества меток для деревьев типа $(2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$. Степени первых $n-k-i+1$ вершин совпадают; значит, согласно правилу кодирования множества меток заключаем, что ${}^{i-2}A_j^1 = {}^{i-3}A_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i+1$, также совпадают. Последняя $(n-k-i+2)$-я вершина имеет степень i, но поскольку она последняя, согласно правилу кодирования ее степень не влияет на ее значение метки и значение ${}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 = {}^{i-3}A_{n-k-i+2}^0$. Таким образом, доказано, что множества меток задаются следующими формулами:

$$ {}^iA_1^0 = \{1, 2, \dots, k\}, \quad {}^iA_2^0 = \{1, 2, \dots, k+1\}, \quad \dots, \quad {}^iA_{n-k-i}^0 = \{1, 2, \dots, n-i-1\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-k-1. $$

Пусть теперь дерево имеет i внутренних вершин. Начальными композициями считаем композиции вида $(2, 2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$. Построим из них все остальные композиции. Будем прибавлять по 1 слева направо к следующему слагаемому, пока не получим композицию $(i, 2, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$. Это построение соответствует следующим рекуррентным формулам $(1 \leqslant j \leqslant n-k-i)$:

$$ {}^in_1^j := {}^in_1^{j-1}, \quad \dots, \quad {}^in_{n-k-i-j-1}^j := {}^in_{n-k-i-j-1}^{j-1}, \quad {}^in_{n-k-i-j}^j := {}^in_{n-k-i-j}^{j-1} + 1, $$
$$ {}^in_{n-k-i-j+1}^j := {}^in_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1, \quad {}^in_{n-k-i-j+2}^j := \dots := {}^in_{n-k}^j := 1. $$

Опишем способ построения множества меток из начальной композиции для всех последующих. Для $(2, 2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$ множества ${}^{i-2}A_j^0$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i+2$, уже построены и ${}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 = \{1, 2, \dots, n-i+1\}$. Увеличим на единицу $(n-k-i+1)$-е слагаемое и уменьшим на единицу $(n-k-i+2)$-е слагаемое; получим новую композицию $(2, 2, \dots, 2, 3, i-1, 1, \dots, 1)$, множества меток которой останется прежним, кроме ${}^iA_{n-k-i+2}^1$, в которое добавится элемент $(n-k-i+1)$. Согласно правилу кодирования описанное изменение увеличит на 1 максимальную степень предпоследней вершины (при обходе по правилу 1), а все остальные степени вершин и соответственно их множества меток останутся без изменения. Тогда

$$ {}^{i-2}A_j^1 = {}^{i-2}A_j^0, \quad {}^{i-2}A_{n-k-i+2}^1 = {}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 \cup \left\{\left|{}^iA_{n-k-i+2}^0\right| + 1\right\}. $$

Предположим, что для композиции $\left({}^in_1^j,\ {}^in_2^j,\ \dots,\ {}^in_{n-k}^j\right)$ множества меток ${}^0A_1^j$, ${}^0A_2^j$, $\dots$, ${}^0A_{n-k}^j$ построены. Увеличим $(n-k-i-j)$-е слагаемое на 1 и уменьшим $(n-k-i-j+1)$-е слагаемое на 1; получим новую композицию $({}^0n_1^{j+1}, {}^0n_2^{j+1}, \dots, {}^0n_{n-k}^{j+1})$, множества меток которой останется прежним, кроме ${}^iA^j_{n-k-i+2}$, куда добавится еще элемент $(n-k-i+1)$. Тогда

$${}^iA^j_m = {}^iA^{j-1}_m, \quad {}^iA^j_{n-k-i-j+1} = {}^iA^{j-1}_{n-k-i-j+1} \cup \Big\{\big|{}^iA^{j-1}_{n-k-i-j+1}\big| + 1\Big\}.$$

Таким образом, обоснован способ построения множества меток для $\bar{D}(n,k)$, который соответствует алгоритму 5. Теорема доказана. □

Замечание. Взаимно однозначное соответствие между множествами $\bar{D}$ и I имеет место только при заданных параметрах $(n, k, n_1, \dots, n_{n-k})$. Так, даже в рамках одного разбиения, но разных композициях, существуют различные деревья, имеющие один и тот же код.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балагура А. А., Кузьмин О. В.* Перечислительные свойства комбинаторных полиномов// Дискр. анал. исслед. опер. — 2011. — *18*, № 1. — С. 3—14.
2. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979.
4. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*, № 1. — 012027.
5. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
6. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
7. *Stanley R.* Enumerated Combinatorics. Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, 2005.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Балагура Анна Александровна (Balagura Anna Aleksandrovna)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: quzminov@mail.ru