



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 236 (2024). С. 49–71
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-236-49-71

УДК 517.928, 517.929

РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УРАВНЕНИИ МЕДЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2024 г. О. Б. ЦЕХАН

Аннотация. Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием в уравнении для медленных переменных на основе алгебраического подхода — погружения системы с запаздыванием в семейство систем с расширенным пространством состояний — и нелокальной замены переменных разработан метод декомпозиции по темпам изменения переменных. Доказано существование и построена асимптотика преобразования Ляпунова, обобщающего на системы с запаздыванием расщепляющее преобразование Чанга и осуществляющего полную декомпозицию двухтемповой системы с постоянным запаздыванием на две независимые подсистемы меньших размеров, чем исходная: отдельно по быстрой и медленной переменным. Доказано, что расщепленная система алгебраически и асимптотически эквивалентна исходной системе в расширенном пространстве состояний. Построена асимптотика и исследовано действие асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, нестационарная система, запаздывание, расщепляющее преобразование, асимптотическая аппроксимация.

SPLITTING TRANSFORMATION FOR A LINEAR NONSTATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH CONSTANT DELAY IN THE EQUATION FOR THE SLOW VARIABLE

© 2024 О. В. TSEKHAN

ABSTRACT. A method of splitting with respect to rates in change of variables is developed for a linear nonstationary singularly perturbed system with constant delay in the equation for slow variables. The splitting method is based on an algebraic approach, namely, the immersion of the system with delay into a family of systems with an extended state space, and a nonlocal change of variables. The existence is proved and the asymptotics of the Lyapunov transformation is constructed, which generalizes the splitting Chang transformation to systems with delay and performs a complete splitting of a two-rate system with constant delay into two independent subsystems of lower dimensions than the original system: separately for the fast and slow variables. We prove that the split system is algebraically and asymptotically equivalent to the original system in the extended state space. The asymptotics is constructed and the action of asymptotic approximations of the splitting transform is examined.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, nonstationary system, delay, splitting transformation, asymptotic approximation.

AMS Subject Classification: 34K06, 34K17, 34K26, 41A60

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

1. Введение. Сингулярно возмущенные системы с малым параметром при производной являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных (см. [11, 15, 22, 45, 49, 53] и ссылки в них).

В математической теории управления при решении задач анализа и синтеза для сингулярно возмущенных систем возникают проблемы, обусловленные их многотемповостью. Например, это проблемы, связанные с высокой размерностью и вычислительной жесткостью моделей в форме дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, с зависимостью от параметра условий наличия структурных свойств, а также законов управления и наблюдения такими системами.

Исследование системы может упроститься, если она с помощью некоторого оператора преобразования может быть приведена к более простой форме (см. [14, 27]). Для многотемповых систем такого упрощения можно достичь, если имеется возможность представить систему в форме с разделенными по темпам переменными, т.е. расщепить (декомпозировать) многотемповую систему на независимые подсистемы в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Проблема применения декомпозиционного подхода заключается в том, чтобы установить условия на параметры исходной системы, при которых возможна точная или асимптотическая декомпозиция сингулярно возмущенной системы и связанных с ней объектов, построить соответствующие преобразования и исследовать их асимптотику и действие.

Для сингулярно возмущенной системы декомпозицию можно реализовать на основе метода пограничных функций А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова (см. [10]), метода интегральных многообразий Н. И. Боголюбова и Ю. А. Митропольского (см. [9]), с помощью невырожденной замены переменных Чанга (см. [38]).

Метод погранфункций позволяет выполнять декомпозицию сингулярно возмущенных систем на основе описания движений с различными темпами в разных масштабах времени и асимптотического разложения разделенных по темпам переменных. О применении метода погранфункций для решения задач теории управления сингулярно возмущенными системами см., например, [11, 15, 16, 53] и ссылки там. Метод погранфункций для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием развивается в [63].

Метод интегральных многообразий реализует геометрический подход к декомпозиции. Он основан на существовании интегральных многообразий медленных и быстрых движений (см. [29]), в силу чего фазовое пространство конечномерных двухтемповых систем может быть разложено в прямую сумму двух интегральных многообразий. Асимптотические методы, основанные на технике интегральных многообразий, развивались и применялись к сингулярно возмущенным системам управления в [28, 29, 40, 41, 44–47, 61, 63]. В алгебраической форме подход к декомпозиции сингулярно возмущенной системы, основанный на методе интегральных многообразий, эквивалентен построению такого преобразования вектора состояний, что в терминах нового вектора состояния динамика быстрых и медленных движений описывается независимыми друг от друга подсистемами, а матрица сингулярно возмущенной системы преобразуется к квазиреугольному и блочно-диагональному виду. При этом и само преобразование, и матрицы расщепленной системы могут быть представлены в виде асимптотических разложений по малому параметру. Взаимосвязь между некоторыми подходами к декомпозиции линейных разнотемповых систем обсуждалась в [59].

В настоящей работе используется алгебраический подход к декомпозиции сингулярно возмущенных систем с помощью расщепляющего преобразования. Впервые невырожденное линейное расщепляющее преобразование для нестационарной линейной сингулярно возмущенной системы без запаздывания было предложено Чангом [38] и далее использовалось и развивалось в многочисленных исследованиях (см. [1, 12, 13, 20, 21, 26, 28, 29, 36, 38, 39, 42, 43, 48, 50, 57, 60–62, 67, 68] и ссылки там).

Наличие запаздывания отражает объективное свойство инерционности систем, так или иначе присущее любым реальным процессам, и приводит к моделям, описываемым функционально-

дифференциальными уравнениями (см. [31]). Современные исследования по системам с запаздываниями изложены в [30, 40, 45, 56, 60]. Сингулярно возмущенные системы с запаздыванием с точки зрения декомпозиции изучены гораздо слабее. Присутствие запаздывания в модели определяет особенности и принципиальные трудности разработки методов декомпозиции, что связано с бесконечномерностью пространства состояний систем с запаздыванием.

В отличие от систем без запаздывания, класс преобразований для систем с запаздыванием включает функциональные (нелокальные по времени) преобразования. Вопросы построения преобразований для систем с запаздыванием изучались в [18, 24, 25, 37]. Вопросы исследования различных групп преобразований для нестационарных линейных систем изучались в [3, 4, 6, 14]. Свойства операторов сдвига исследовались в [2].

Для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием расщепляющее преобразование строилось в основном в случае малого запаздывания (см. [41, 46, 52, 57, 58]). Вопросы построения и анализа расщепляющего преобразования для систем с немалым (фиксированным) запаздыванием менее изучены.

Наличие «немалого» запаздывания в модели вносит особенности и принципиальные сложности как в разработку методов декомпозиции, так и в его результаты. Так, например, локальная замена переменных из преобразования Чанга (см. [38]) при применении ее к сингулярно возмущенной системе с постоянным запаздыванием приводит лишь к частичной декомпозиции системы (см. [51]); функциональные преобразования систем с запаздыванием могут привести к изменению пространства решений (см. [18, 24, 25]); получение оценок значений параметра, при которой справедливы аппроксимации, требует оценок для функциональных матриц; аппроксимации более высокого порядка (например, второго порядка для решений сингулярно возмущенных систем без запаздывания из [48]) не переносятся напрямую на сингулярно возмущенные системы с запаздыванием из-за нелокального характера преобразований, выполняющих точную декомпозицию таких систем.

Для стационарных сингулярно возмущенных систем с немалым запаздыванием расщепляющие преобразования строились в [19, 44, 45, 47, 51]. Замена переменных в [19] приводит к изменению оператора системы, асимптотический анализ преобразования не производился. В [44, 45] на основе асимптотической декомпозиции строятся аппроксимирующие подсистемы первого порядка (медленная и быстрая); расщепляющее преобразование не строится. Для нестационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием в обеих переменных расщепляющее преобразование ранее не строилось.

В связи с этим возникают задачи построения и обоснования преобразования Ляпунова, обобщающего преобразование Чанга на случай линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием, получения аппроксимаций расщепляющего преобразования, расщепленной системы и решения исходной системы. Инвариантами преобразования Ляпунова являются характеристическая матрица системы, структурные свойства управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости системы (см. [25]), класс системы (см. [5]), многие асимптотические характеристики решений линейных систем (см. [23, с. 3]).

Ранее в работах автора [33, 34, 54, 64–66] построено невырожденное расщепляющее преобразование, обобщающее преобразование Чанга на линейные стационарные, нестационарные сингулярно возмущенные функционально-дифференциальные системы с конечным запаздыванием (как поточечным, так и распределенным) только в медленных переменных, стационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием на шкалах для D- и R-моделей. Доказывается оценка для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

В настоящей работе, развивающей предыдущие работы автора, разрабатывается расщепляющее преобразование для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы, содержащей постоянное запаздывание в медленной и быстрой переменных состояниях в уравнении медленной переменной. Используется погружение системы в семейство систем с запаздыванием в

расширенном пространстве состояний, что позволяет расширить класс возможных замен переменных. Операторный подход и представление оператора правой части системы в кольце формальных степенных рядов позволяют применять алгебраическую технику работы с матрицами над кольцом формальных степенных рядов, алгебраические свойства оператора запаздывания.

В работе используются следующие обозначения.

$\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — векторное пространство n -мерных векторов с элементами из $\mathbb{R}$;

$\mathbb{R}^{k \times s}$ — множество $(k \times s)$ -матриц с элементами из $\mathbb{R}$;

$C(T; \mathbb{R})$ — кольцо непрерывных на T вещественных функций;

$PC(T; \mathbb{R}^n)$ — пространство n -вектор функций, кусочно непрерывных на T ;

$\bar{C}(T; \mathbb{R}^n)$ — пространство n -вектор функций, ограниченных и непрерывных на T ;

$C^1(T; \mathbb{R}^{k \times s})$ — множество непрерывно дифференцируемых $(k \times s)$ -матричнозначных функций;

$R[\mu, z]$ — кольцо всех полиномов от μ, z над кольцом R ;

$R[z]$ — кольцо всех полиномов от z над кольцом R ;

$R_j[z]$ — кольцо полиномов степени не выше j от z над кольцом R ;

$R_{ij}[\mu, z]$ — кольцо полиномов от двух переменных: переменной μ (степени не выше i) и z (степени не выше j) над кольцом R ;

$R[[\mu, z]]$ — кольцо формальных степенных рядов от двух переменных μ, z над кольцом R ;

E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица.

2. Исследуемая система. Постановка задач. Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с постоянным запаздыванием по состоянию:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{10}(t)x(t) + A_{11}(t)x(t-h) + A_{20}(t)y(t) + A_{21}(t)y(t-h), \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad t \in T \triangleq [t_0, t_1]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $h = \text{const} > 0$ — запаздывание, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — матричные функции подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими (точная гладкость указана ниже).

Далее запись $f(\cdot)$ означает реализацию заданной на T функции $f(t)$ аргумента t , $t \in T$, рассматриваемую как единое целое (элемент некоторого пространства функций, например, $C(T; \mathbb{R})$).

При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ под *состоянием* системы (1) в момент времени $t \in T$ понимаем n -вектор функции

$$z_t(\cdot, \mu) \triangleq (x(\tau, \mu), y(\tau, \mu), \tau \in [t-h, t]) \in PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n).$$

Таким образом, пространство состояний системы (1) — это $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$.

С системой (1) связаны не зависящие от параметра μ вырожденная система и система погранслоя, которые формально получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$ (см. [35]).

Пусть $A_3(t)$, $A_4(t)$ продолжены влево на $T_h \triangleq [t_0-h, t_0]$. Тогда для вырожденной системы при справедливо представление

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_{s0}(t)x_s(t) + A_{s1}(t)x_s(t-h), & x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \in T, \\ A_{sj}(t) =: A_{1j}(t) - A_{2j}(t)A_4^{-1}(t-jh)A_3(t-jh), & j = 0, 1, \quad t \in T. \end{cases} \quad (2)$$

Вырожденная система (2) представляет собой n_1 -мерную нестационарную систему с запаздыванием в состоянии.

Система погранслоя, соответствующая (1), может быть получена, если рассмотреть систему (1) в «растянутой» шкале времени: $\tau = (t - t_0)/\mu$, и положить $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) = A_4(t_0)y_f(\tau), & \tau \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \\ y_f(\tau) = y(t_0 + \mu\tau), & y_f \in \mathbb{R}^{n_2}. \end{cases} \quad (3)$$

Система погранслоя (3) является стационарной системой размерности n_2 без запаздывания.

Далее будет установлена связь между исходной системой (1), ее вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3).

Постановка задач. Для системы (1) построить и обосновать преобразование Ляпунова, обобщающее расщепляющее преобразование Чанга (см. [38]) на систему (1) и при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ осуществляющее полную декомпозицию исходной двухтемповой системы на две независимые подсистемы меньших размеров, чем исходная: отдельно по быстрой и медленной переменным. Построить асимптотику и исследовать действие асимптотических аппроксимаций преобразования, установить связь между матрицами исходной системы и асимптотическими аппроксимациями матриц расщепленной системы.

3. Операторная форма представления линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Представим правую часть системы (1) в операторной форме. Для этого на множестве дифференцируемых функций введем оператор дифференцирования $p \triangleq d/dt$ и для заданного $h \in (0, +\infty)$ на множестве ограниченных функций — оператор чистого запаздывания e^{-ph} :

$$\begin{aligned} e^{-ph}x(t) &= x(t-h), \quad e^{-jph}x(t) = x(t-jh), \\ e^{-ph}f(x)x(t) &= f(t-h)e^{-ph}x(t) = f(t-h)x(t-h). \end{aligned} \quad (4)$$

Корректность представления оператора чистого запаздывания в экспоненциальной форме доказана в [55, утверждение 2.5].

Обозначим через $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph})$, $i = 1, 2$, ограниченные на T функциональные операторы

$$\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) : PC([t-h, t]; \mathbb{R}^{n_i}) \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}, \quad \mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Ограниченность на T операторов (5) следует из ограниченности на T матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, и ограниченности оператора запаздывания e^{-ph} на множестве ограниченных функций (см. [2]). Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t), \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad t \in T. \end{cases} \quad (6)$$

Определим блочную матрицу

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

и представим ее в виде

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t)e^{-ph}, \quad (8)$$

где

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_{10}(t) & A_{20}(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Класс блочных $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathbf{A}(t, e^{-ph})$ вида (8), (9) обозначим через $\mathcal{A}_h$.

Введем обозначение $\mathcal{M} = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$ и по параметрам системы (1) определим согласно (6)–(9) блочный $(n \times n)$ -оператор правой части системы (1):

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ \mu^{-1} A_3(t) & \mu^{-1} A_4(t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Множество операторов $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (10) обозначим $\mathcal{A}_\mu$.

Положим $n = n_1 + n_2$ и $z' = (x', y')'$, где $'$ — символ транспонирования. С учетом введенного оператора (10) и представления (6) систему (1) можно записать в виде

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})z(t), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Отождествим систему (11) с матричным оператором $\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{A}_\mu$. Совокупность всех таких операторов с непрерывными на T компонентами (т.е. систем вида (11), (10), (5) с пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$) обозначим Σ_h .

4. Расширение пространства состояний и погружение линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием в семейство. Построим преобразование, выполняющее полную декомпозицию системы (1) на независимые подсистемы по темпам изменения переменных. Одним из способов построения операторов преобразования для систем дифференциальных уравнений является определение замены переменных.

В общем случае точечной заменой переменных нельзя привести линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с запаздыванием к системе с разделенными движениями в том же функциональном пространстве состояний. Это эквивалентно утверждению, что преобразованиями из класса операторов без запаздывания нельзя в общем случае добиться полного расщепления системы с запаздыванием. Продемонстрируем это на примере.

Пример 1. Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с запаздыванием вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x(t-h) + y(t-h), \\ \mu \dot{y}(t) = -x(t) - y(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (12)$$

оператор правой части которой имеет вид

$$A_\mu = \begin{pmatrix} -1 + e^{-ph} & e^{-ph} \\ -1/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Будем искать невырожденную матрицу преобразований в виде

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}, \quad g_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (14)$$

Применим преобразование (14) к системе (13) (см. [5, с. 42]). Тогда преобразованная матрица системы имеет вид

$$G * A_\mu = \frac{1}{\mu(-g_2g_3 + g_1g_4)} \times \\ \times \begin{pmatrix} g_1(g_2 - \mu(1 - e^{-ph})g_4) + g_3(g_2 + g_4\mu e^{-ph}) & g_2^2 + g_4^2\mu e^{-ph} + g_2g_4(1 - \mu(1 - e^{-ph})) \\ -g_1^2 - g_3^2\mu e^{-ph} - g_1g_3(1 - \mu(1 - e^{-ph})) & -g_1(g_2 + g_4) + \mu g_3(g_2 - e^{-ph}(g_2 + g_4)) \end{pmatrix}.$$

Чтобы система расщеплялась, матрица преобразованной системы должна быть диагональной. Это равносильно тому, что при любых μ и z система уравнений

$$\begin{cases} g_2(g_2 + g_4) + g_4(g_4 + g_2)\mu z - g_2g_4\mu = 0, \\ -g_1(g_1 + g_3) - g_3(g_3 + g_1)\mu z + g_1g_3\mu = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно g_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Легко видеть, что это возможно только при $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 0$, что невозможно для невырожденной матрицы преобразований G .

Вместе с тем, для систем с запаздыванием естественно рассматривать классы преобразований, порождаемые нелокальными заменами переменных, включающими запаздывание (см. [25, $\mathcal{R}_1$ – $\mathcal{R}_4$]). Однако можно показать, что в общем случае преобразованиями из того же класса, что и оператор системы, т.е. преобразованиями с конечным запаздыванием, тоже нельзя добиться полного расщепления.

Утверждение 1. *Существуют такие линейные нестационарные сингулярно возмущенные системы с запаздыванием, что преобразованием с конечным запаздыванием нельзя добиться полного расщепления по темпам.*

Для построения оператора преобразования, выполняющего полное расщепление системы (1) по темпам изменения переменных, погрузим пространство состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$ системы (1) в пространство $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ и будем искать оператор преобразования, порождаемый нелокальной заменой переменных в расширенном пространстве состояний.

Опишем процесс погружения.

Предположения.

- (i) Корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения $\det(\lambda E_{n_2} - A_4(t)) = 0$ матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < -2\gamma < 0$ для всех $t \in T$, $\gamma = \operatorname{const} > 0$;
- (ii) $\|A_4(t)\| \leq c_2$ для всех $t \in T$;
- (iii) $\|\dot{A}_4(t)\| \leq \beta$ для всех $t \in T$.

Предположения (i)–(iii) гарантируют, что любая система из семейства быстрых подсистем, связанных с (1), асимптотически устойчива (см. [35]). При этом из (i) следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$.

Погрузим класс $\mathcal{A}_h$ операторов (7) в класс $\mathcal{O}_h$ нестационарных $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathcal{O}_h(t, e^{-ph})$, $t \in T$, вида

$$\mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t)e^{-ph}, \quad t \in T,$$

где $A_i(t) \in \bar{C}(T; \mathbb{R}^{n \times n})$ — произвольные $(n \times n)$ -матричные функции, непрерывные и ограниченные на T . Таким образом, $\mathcal{O}_h$ — это подмножество кольца $R^{n \times n}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = \bar{C}(T, \mathbb{R})$, $(n \times n)$ -матричных операторов $\mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_h$ с непрерывными ограниченными на T элементами из кольца $\bar{C}(T; \mathbb{R})[z]$, $z = e^{-ph}$.

Наряду с $\mathcal{O}_h$ определим также класс $\mathcal{O}_\mu$ зависящих от параметра нестационарных $(n \times n)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_\mu(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{O}_h(t, e^{-ph}), \quad \mathcal{O}_h(t, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_h. \quad (15)$$

Тогда определенное выше множество $\mathcal{A}_\mu$ является подклассом класса $\mathcal{O}_\mu$, состоящим из зависящих от параметра блочных $(n \times n)$ -матричных операторов вида (10), (5).

Продолжим с $T = [t_0, t_1]$ на $(-\infty, t_1]$ матричные функции $A_k(t)$, $k = 1, 2, 3, 4$, так, что они ограничены, непрерывно дифференцируемы и $A_4(t)$ удовлетворяет предположению (i) для любого $t \in (-\infty, t_1]$. Сохраним для них прежние обозначения.

Погрузим класс операторов $\mathcal{O}_\mu$, содержащий оператор $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ правой части системы (11), в семейство классов $\mathcal{O}_{\mu k}$, $k = 1, 2, \dots$, определенное следующим образом.

Для произвольных целых k , s , $q > 0$ определим класс $\mathcal{O}_k^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = M_0(t, \mu) + M_1(t, \mu)e^{-ph} + \dots + M_k(t, \mu)e^{-kph}, \quad t \in T, \quad (16)$$

где

$$M_j(t, \mu) = \sum_{m=j}^k \mu^m M_j^m(t), \quad j = 0, \dots, k,$$

$M_j^m(t)$, $m = 0, 1, \dots, j$, — заданные $(s \times q)$ -матричные функции с ограниченными на $[t_0 - kh, t_0] \cup T$ элементами из кольца $\bar{C}([t - kh, t]; \mathbb{R})[\mu, z]$, $z = e^{-ph}$; область определения и область значений суть

$$D(\mathcal{O}_k^{s \times q}) = PC([t - kh, t_1]; \mathbb{R}^s), \quad \operatorname{Im}(\mathcal{O}_k^{s \times q}) = \mathbb{R}^q.$$

Аналогично (15) определим для $k = 1, 2, \dots$ классы $\mathcal{O}_{\mu k}^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов вида

$$\mathcal{O}_{\mu k}^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \cdot \mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}), \quad \mathcal{O}_k^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}_k^{s \times q}. \quad (17)$$

При $k = 1$, $s = q = n$ имеем $\mathcal{O}_1^{n \times n} = \mathcal{O}_h$, $\mathcal{O}_{\mu 1}^{n \times n} = \mathcal{O}_\mu$.

Введем также группу $\mathcal{O}_\infty^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных операторов

$$\mathcal{O}_\infty^{s \times q}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}, \quad t \in T,$$

с ограниченными на $(-\infty, t_1]$ элементами из кольца $\bar{C}((-\infty, t_1]; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$, действующих из $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^s)$ в $\mathbb{R}^q$, и класс $\mathcal{O}_{\mu\infty}^{s \times q}$ зависящих от параметра нестационарных $(s \times q)$ -матричных

операторов $O_\mu(t, \mu, e^{-ph})$ вида

$$O_{\mu\infty}^{s\times q}(t, \mu, e^{-ph}) = M^{-1} \cdot O_\infty^{s\times q}(t, e^{-ph}), \quad O_\infty^{s\times q}(t, e^{-ph}) \in O_\infty^{s\times q};$$

область определения $D(O_\infty^{s\times q}) = PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^s)$ и область значений $\text{Im}(O_k^{s\times q}) = \mathbb{R}^q$. При $s = q = n$ верхние индексы $n \times n$ в обозначениях операторов и их классов будем опускать, например, $O_{\mu\infty}^{n\times n}(t, \mu, e^{-ph}) = O_{\mu\infty}(t, \mu, e^{-ph})$, $O_{\mu\infty}^{n\times n} = O_{\mu\infty}$.

В классах O_k , $k = 1, 2, \dots$, $O_{\mu\infty}$, O_∞ операторов (16), (17) выделим подклассы A_k , $k = 1, 2, \dots$, $A_{\mu\infty}$, A_∞ операторов вида (16), (17), для которых $M_0(t)$, $M_1(t)$ имеют вид (9) и $M_j(t) \equiv 0$, $t \in T$, $j \geq 2$.

Таким образом, на расширенном пространстве состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ определены последовательности вложенных классов операторов такие что

$$\begin{aligned} A_h &\subset O_h \subset \dots \subset O_{(k-1)} \subset O_k \subset \dots \subset O_\infty, \\ A_\mu &\subset O_\mu \subset \dots \subset O_{\mu(k-1)} \subset O_{\mu k} \subset \dots \subset O_{\mu\infty}, \\ A_\mu &\subset A_{\mu 2} \subset \dots \subset A_{\mu(k-1)} \subset A_{\mu k} \subset \dots \subset A_{\mu\infty}, \\ A_{k-1} &\subset A_k \subset O_k, \quad A_\infty \subset O_\infty, \quad A_{\mu k} \subset O_{\mu k}, \quad A_{\mu\infty} \subset O_{\mu\infty}. \end{aligned} \tag{18}$$

Множество Σ_h систем (11) можно охарактеризовать как множество систем с оператором правой части $A_\mu \in A_\mu$ и пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$. Наряду с Σ_h введем также множества систем с пространством состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$: множество Σ_∞ систем вида (11), где вместо оператора A_μ используется оператор $A_{\mu\infty} \in A_{\mu\infty}$, и множество $\tilde{\Sigma}_\infty$ систем вида (11), где вместо оператора A_μ используется оператор $O_{\mu\infty} \in O_{\mu\infty}$: $\Sigma_\infty \subset \tilde{\Sigma}_\infty$.

Таким образом определено погружение множества Σ_h систем (11) в множество $\tilde{\Sigma}_\infty$ систем вида (11) в расширенном пространстве состояний $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^n)$ с оператором $A_{\mu\infty} \in A_{\mu\infty}$ вида (10), в котором элементы матричных блоков $A_{i0}(t)$, $A_{i1}(t)$, $i = \overline{1, 2}$, $A_j(t)$, $j = \overline{3, 4}$, являются функциональными матрицами с элементами из кольца $C(T; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$: $\Sigma_h \subset \Sigma_\infty$.

5. Нелокальная замена переменных и преобразование линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Для системы из Σ_∞ с оператором правой части из $A_{\mu\infty}$ построим расщепляющее преобразование. Рассмотрим в O_∞ подмножество $\mathcal{G}$ нестационарных $(n \times n)$ -матричных невырожденных при каждом $t \in (-\infty, t_1]$ унимодулярных операторов $G(t, \mu, e^{-ph})$ с элементами из кольца $\bar{C}^1(T; \mathbb{R})[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$. Определим произведение $G^1(\mu, e^{-ph}) \cdot G^2(\mu, e^{-ph})(t)$ двух элементов $G^1(t, \mu, e^{-ph})$ и $G^2(t, \mu, e^{-ph})$ поточечно на T , т.е.

$$(G^1(\mu, e^{-ph}) \cdot G^2(\mu, e^{-ph}))(t) = G^1(t, \mu, e^{-ph}) \cdot G^2(t, \mu, e^{-ph}).$$

С целью сокращения записей аргументы (t, μ, e^{-ph}) у операторов далее иногда будем опускать.

Утверждение 2. Совокупность $\mathcal{G}$ является группой относительно введенной операции умножения.

Доказательство. Для доказательства надо проверить выполнение трех аксиом:

- (а) Для всяких трех элементов G^1 , G^2 , G^3 верно равенство $(G^1 \cdot G^2)G^3 = G^1(G^2 \cdot G^3)$.
- (б) Существует такой элемент $I \in \mathcal{G}$, называемый единицей, что $I \cdot G = G \cdot I$ для любого $G \in \mathcal{G}$.
- (в) Всякий элемент $G \in \mathcal{G}$ имеет обратный $G^{-1} \in \mathcal{G}$, для которого $GG^{-1} = G^{-1}G = I$.

Из правил умножения матриц и свойств кольца формальных степенных рядов (коммутативное кольцо с единицей) следует выполнение первых двух аксиом. В качестве I берем единичную матрицу: $I = E_n$. Поскольку для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, с учетом невырожденности $G(t, \mu, e^{-ph})$ при всех $t \in (-\infty, t_1]$, преобразование (22) невырожденное, откуда следует выполнение требований аксиомы (в). $\square$

Группу $\mathcal{G}$ можно рассматривать как группу обратимых линейных нелокальных преобразований. Определим действие $GO_{\mu\infty} \mapsto G * O_{\mu\infty}$ группы $\mathcal{G}$ операторов преобразования на множестве

$\mathcal{O}_{\mu\infty}$ следующим (сплетающим) равенством:

$$\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{O}_{\mu\infty} \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}} \triangleq \mathbf{O}_{\xi\eta} \in \mathcal{O}_{\mu\infty} \quad (19)$$

для любых $\mathbf{O}_{\mu\infty} \in \mathcal{O}_{\mu\infty}$, $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}$. Всякое преобразование $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}$ индуцирует определенное на пространстве $PC((-\infty, t]; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ нелокальное (по времени) преобразование переменных состояния системы из $\tilde{\Sigma}_{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \in (-\infty, t_1], \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in (-\infty, t_1]. \quad (21)$$

Тем самым соотношение (19) определяет действие группы $\mathcal{G}$ на множестве систем $\tilde{\Sigma}_{\infty}$, которое является преобразованием системы с оператором $\mathbf{O}_{\mu\infty}$, в систему с оператором $\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty} = \mathbf{O}_{\xi\eta}$. Это действие разбивает множество всех систем $\tilde{\Sigma}_{\infty}$ на *орбиты*. Для фиксированной системы $\mathbf{O}_{\mu\infty} \in \tilde{\Sigma}_{\infty}$ подмножество $\mathcal{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}$ множества $\mathcal{O}^{n \times n}$, состоящее из всех $\mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}$, когда $\mathbf{G}$ пробегает $\mathcal{G}$, называется *орбитой* системы относительно группы $\mathcal{G}$.

Две системы $\mathbf{O}_{\mu\infty}^1$ и $\mathbf{O}_{\mu\infty}^2$, лежащие в одной орбите, называются *алгебраически эквивалентными* (см. [17, с. 357]). Необходимым и достаточным условием эквивалентности является выполнение равенства $\mathbf{O}_{\mu\infty}^1 = \mathbf{G} * \mathbf{O}_{\mu\infty}^2$ при каком либо $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$.

Определим оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ вида

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \\ -\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_2 \times n_1}$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_1 \times n_2}$ — операторные матрицы подходящих размеров:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}), \\ \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}), \\ \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) &\in R[[\mu, z]], & R &= C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n \times n}); \end{aligned}$$

здесь $z = e^{-ph}$.

Утверждение 3. Оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)) унимодулярный и обратимый и определяет преобразование при всех $\mu > 0$, всех $t \in T$ и любых матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{H}$. При этом справедливо представление

$$\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & -\mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \\ \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Доказательство. Несложно проверить, что $\det \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$ для всех $\mu > 0$, $t \in T$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}$, что согласно определению подтверждает унимодулярность матрицы преобразования. Поскольку для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, то преобразование (22) невырождено. Непосредственным вычислением устанавливается (23). Из невырожденности следует, что преобразование (22), (23) является преобразованием подобия для любого значения μ , для любых матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{H}$ (т.е. принадлежит классу преобразований $\mathcal{R}_2$ при $c = 1$, $k = 0$; см. [25]). $\square$

Утверждение 4. Для любых матричных операторов $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ и $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ принадлежит группе $\mathcal{G}$ (см. (22)).

Чтобы переменные в преобразованной системе (19) были разделены по темпам — отдельно по медленным и быстрым переменным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\mathbf{O}_{\xi\eta}$ (см. (19)) имела блочно-диагональный вид. Выясним условия на оператор (22), при которых это верно для системы из $\mathcal{A}_{\mu\infty} \subset \mathcal{O}_{\mu\infty}$. Для этого получим уравнения, которым должны удовлетворять матричные операторы $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ из оператора преобразования (22).

Продифференцируем (21) в силу системы (1) и выполним замену переменных (20) с $\mathbf{G} = \mathbf{K}$ (см. (22)). В результате система (1) преобразуется в эквивалентную систему

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \left[\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L} - \mathbf{H}(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \right] \xi(t) + \\ &\quad + \left[\mu(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}) \mathbf{H} - \mathbf{H}(\mathbf{A}_4 + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2) - \mu \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{A}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \mu \mathbf{H}(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{H} \right] \eta(t), \\ \mu \dot{\eta}(t) &= \left[\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}} \right] \xi(t) + \\ &\quad + \left[\mathbf{A}_4 + \mu(\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \mathbf{L} + \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_1 - \mu \mathbf{L} \mathbf{A}_2 \mathbf{L} + \mu \dot{\mathbf{L}}) \mathbf{H} \right] \eta(t), \quad t \in (-\infty, t_1].\end{aligned}\quad (24)$$

Чтобы медленные и быстрые переменные состояния системы (24) были полностью разделены, матричные операторы $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ выбираются из условия равенства нулю в системе (24) коэффициентов при медленных переменных ξ в уравнении для быстрых переменных η и наоборот. Тогда матричные операторы $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$ и $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ должны удовлетворять для всех $t \in (-\infty, t_1]$ следующим матричным операторным дифференциальным уравнениям Риккати:

$$\begin{aligned}\mu \dot{\mathbf{L}}(t, \mu, e^{-ph}) &= \mathbf{A}_4(t) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) - \mathbf{A}_3(t) - \\ &\quad - \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \right), \quad t \in (-\infty, t_1],\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}-\mu \dot{\mathbf{H}}(t, \mu, e^{-ph}) &= \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{A}_4(t) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) + \mu \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) - \\ &\quad - \mu \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) \right) \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}), \quad t \in (-\infty, t_1].\end{aligned}\quad (26)$$

Таким образом, разрешимость уравнений (25), (26) определяет возможность расщепления системы (1), а вид решений системы (25), (26) — класс расщепляющих преобразований (22).

6. Асимптотика оператора преобразования и расщепленная линейная нестационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием. Обозначим через $O(\mu)$ вектор-функцию $f(t, \mu)$ на $[a, b]$ (размерность ясна из контекста), компоненты которой $f_i(t, \mu)$ таковы, что для каждого $t \in [a, b]$ существуют такие константы $\mu^* > 0$, $c > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ верно неравенство $\|f_i(t, \mu)\| \leq c\mu$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Следующее утверждение устанавливает условия разрешимости уравнений (25), (26), а также асимптотику операторов преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)).

Теорема 1. Пусть элементы матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на $(-\infty, t_1]$, а также предположения (i)–(iii). Тогда существует такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ существуют ограниченные непрерывно дифференцируемые (с ограниченными производными) непрерывно зависящие от μ матричные функции $\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})$, $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$, удовлетворяющие дифференциальным матричным уравнениям (25), (26).

Более того, если элементы матричных функций $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, непрерывно дифференцируемы k раз на $(-\infty, t_1]$, $k = 1, 2, \dots$, то при $t \in (-\infty, t_1]$ для $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}$ верны асимптотические представления

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) + O(\mu^k), \\ \mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{i=0}^{k-1} \mu^i \mathbf{H}^i(t, e^{-ph}) + O(\mu^k),\end{aligned}\quad (27)$$

где члены асимптотических рядов (27) находятся по итерационной схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{m+1}(t, e^{-ph}) &= A_4^{-1}(t) \left(\mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^m \mathbf{L}^{m-j}(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^j(t, e^{-ph}) + \dot{\mathbf{L}}^m(t, e^{-ph}) \right), \\ \mathbf{H}^{m+1}(t, e^{-ph}) &= \left(\mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \sum_{i=0}^m \mathbf{L}^i(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^{m-i}(t, e^{-ph}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^m \mathbf{H}^i(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^{m-i}(t, e^{-ph}) \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) - \dot{\mathbf{H}}^m(t, e^{-ph}) \right) A_4^{-1}(t), \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) = A_4^{-1}(t) \mathbf{A}_3(t), \quad \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) = \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) A_4^{-1}(t). \quad (29)$$

Кроме того, для любого целого $m \geq 0$ матричные функции $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$ из (28), (29) могут быть представлены в виде конечных сумм:

$$\mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^m L_j^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{m+1} H_j^m(t) e^{-jph}, \quad (30)$$

где $L_j^m(t)$, $H_j^m(t)$, $L^m(t, z) \in R_m[z]$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1})$, $H^m(t, z) \in R_{m+1}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n_1 \times n_2})$, вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} L_j^m(t) &= A_4^{-1}(t) \left(\sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1}(t) A_{1,j-s}(t - sh) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k(t) A_{2r}(t - sh) L_{j-s-r}^{m-k-1}(t - (r+s)h) + \dot{L}_j^{m-1}(t) \right), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_j^m(t) &= \left(\sum_{s=0}^1 A_{1s}(t) H_{j-s}^{m-1}(t - sh) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{s=0}^{m-1} A_{2k}(t) L_s^{i-1}(t - kh) H_{j-k-s}^{m-i}(t - (s+k)h) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m H_k^{n-1}(t) L_s^{m-n}(t - kh) A_{2,j-k-s}(t - (s+k)h) - \dot{H}_j^{m-1}(t) \right) A_4^{-1}(t - jh), \quad (32) \end{aligned}$$

$$H_j^m(t) \equiv 0, \quad \text{если } j < 0 \text{ или } m < 0 \text{ или } j > m + 1,$$

с начальными условиями

$$L_0^0(t) = A_4^{-1}(t) \mathbf{A}_3(t), \quad L_j^m(t) = 0, \quad \text{если } j < 0 \text{ или } m < 0 \text{ или } j > m, \quad (33)$$

$$H_0^0(t) = A_{20}(t) A_4^{-1}(t), \quad H_1^0(t) = A_{21}(t) A_4^{-1}(t - h). \quad (34)$$

Доказательство. Представление системы $\mathbf{A}_\mu \in \Sigma_h$ в операторном виде (11) как системы, определенной над $\mathcal{A}_h = R^{n \times n}[z]$, $z = e^{-ph}$, $R = C(T; \mathbb{R})$, и определенное в разделе 5 погружение ее во множество систем над кольцом $\mathcal{O}_\infty = R^{n \times n}[[\mu, z]]$, $z = e^{-ph}$, $R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R})$, позволяет применять для доказательства существования решения $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}$ (см. (27)) схему из [48, с. 212].

Будем искать решение $\mathbf{L}$ уравнения (25) в виде формального степенного ряда по μ с коэффициентами, являющимися полиномами от символа оператора запаздывания e^{-ph} :

$$\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m L_j^m(t) e^{-jph}. \quad (35)$$

Для доказательства (28) подставим представление (35) в уравнение (25). Далее, выполняя преобразования с учетом начальных условий для $L_j^m(t)$ (см. (29)) и определяющих и алгебраических свойств (4) оператора запаздывания и приравнявая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях μ и e^{-ph} , получаем матричные уравнения для нахождения коэффициентов разложения (35), которые решаются последовательно и однозначно в силу справедливости предположения (i). Отсюда получаем (29), (28) и (30). Ограниченность на $(-\infty, t_1]$ матричных операторов $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и их производных следует из (29) и (28) и ограниченности $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, их производных и ограниченности e^{-ph} .

Представления (31)–(32) доказываются по индукции с учетом определяющих и алгебраических свойств (4) оператора запаздывания e^{-ph} и используют гладкость матриц системы (1).

Для доказательства асимптотической аппроксимации (27) k -го порядка запишем (35) в виде

$$\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, \mu, e^{-ph}) + \mu^{k+1} \mathbf{R}^k(t, \mu, e^{-ph}), \quad (36)$$

и докажем ограниченность остаточного члена $\mathbf{R}^k$. Подставляя (36) в уравнение (25), получаем дифференциальное уравнение для остаточного члена $\mathbf{R}^k$. Например, для $k = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu \dot{\mathbf{R}}^1 = & A_4 \mathbf{R}^1 - \dot{\mathbf{L}}^0 - \mathbf{L}^0 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{L}^0) + \\ & + \mu (\mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 \mathbf{R}^1 - \mathbf{R}^1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^1 \mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 + \mu \mathbf{R}^1 \mathbf{A}_2 \mathbf{R}^1), \end{aligned} \quad (37)$$

откуда следует интегральное уравнение для $\mathbf{R}^1$.

Далее, используя принцип сжимающих отображений, устанавливаем существование единственного ограниченного на T решения $\mathbf{R}^1$ уравнения (37), что доказывает аппроксимацию (27) для $\mathbf{L}$. Из непрерывности и ограниченности правой части (37) следует непрерывная дифференцируемость $\mathbf{R}^1$ и ограниченность $\mu \dot{\mathbf{R}}^1$, что доказывает справедливость оценки (27). Из представления (36) для $\mathbf{L}$ и доказанной выше ограниченности производных правой части следует непрерывная дифференцируемость $\mathbf{L}$ на $(-\infty, t_1]$ и ограниченность ее производной.

Аналогично с использованием (35), (26), (29), (4) доказывается существование и представление решения $\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph})$ уравнения Сильвестра (26) в виде формального степенного ряда по параметру μ с коэффициентами, являющимися полиномами по оператору запаздывания с требуемыми свойствами и оценками. При этом решение уравнения (26) ищем в виде формального степенного ряда по μ с коэффициентами, являющимися полиномами от оператора запаздывания e^{-ph} :

$$\mathbf{H}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} H_j^m(t) e^{-jph}. \quad (38)$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Подставляя (30) в (25), (26), группируя и приравнявая члены при одинаковых степенях μ и e^{-ph} , убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Следствие 1. Компоненты L_j^m , $j = \overline{0, m}$, H_j^m , $j = \overline{0, m+1}$, $m = 0, 1, \dots$, из (35), (38) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{L}_j^{m-1}(t) = & A_4(t) L_j^m(t) - \sum_{s=j-1}^j L_s^{m-1}(t) A_{1,j-s}(t - sh) + \\ & + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^k \sum_{r=0}^1 L_s^k(t) A_{2r}(t - sh) L_{j-s-r}^{m-k-1}(t - r + s)h, \quad m = 1, 2, \dots, j = \overline{0, m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_4(t)L_0^0(t) - A_3(t) &= 0, \\
 -\dot{H}_j^{m-1}(t) &= H_j^m(t)A_4(t-jh) - \sum_{s=0}^1 A_{1s}(t)H_{j-s}^{m-1}(t-sh) + \\
 &+ \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^m \sum_{s=0}^{m-1} A_{2k}(t)L_s^{i-1}(t-kh)H_{j-k-s}^{m-i}(t-(s+k)h) + \\
 &+ \sum_{n=1}^m \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^m H_k^{n-1}(t)L_s^{m-n}(t-kh)A_{2,j-k-s}(t-(s+k)h), \\
 H_0^0(t)A_4(t) &= A_{20}(t), \quad H_1^0(t)A_4(t-h) = A_{21}(t).
 \end{aligned}$$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 1 для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ в группе $\mathcal{G}$ существует преобразование Ляпунова вида $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которое преобразует систему $\mathbf{A}_\mu$ (см. (1)) в систему из $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ с блочно-диагональной матрицей

$$\mathbf{A}_{\xi\eta} = \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}), \mu^{-1} \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \}, \quad (39)$$

полностью разделяя быструю и медленную динамику:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K} - \mathbf{K}^{-1} \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{A}_{\xi\eta}(t, \mu, e^{-ph}).$$

Доказательство. Так как матричные операторы $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и их производные ограничены на $(-\infty, t_1]$, то из вида (22) оператора $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ и (23) обратного оператора $\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})$ следует ограниченность на $(-\infty, t_1]$ оператора $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$, обратного к нему $\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})$ и его производной $\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})$:

$$\|\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \alpha_1, \quad \|\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \alpha_2, \quad \|\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})\| \leq \beta.$$

Отсюда имеем

$$\sup_{t \in (-\infty, t_1]} \left(\|\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})\| + \|\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})\| + \|\dot{\mathbf{K}}(t, \mu, e^{-ph})\| \right) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta,$$

откуда следует, что преобразование (22) является преобразованием Ляпунова. $\square$

Следствие 3. Для любой системы $\mathbf{A}_\mu$ (см. (1)) из Σ_∞ при выполнении условий теоремы 1 для всех достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ в орбите относительно группы невырожденных преобразований $\mathcal{G}$ имеется система с блочно-диагональной матрицей $\mathbf{A}_{\xi\eta} \in \Sigma_\infty$ вида (39), где $\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{O}^{n_2 \times n_2}$ представимы в виде асимптотических рядов по параметру μ . При этом преобразование $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$, приводящее систему (1) к системе с блочно-диагональной матрицей (39), имеет вид (22), где $\mathbf{L}$, $\mathbf{H}$ представимы в виде асимптотических рядов (27) по параметру μ .

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда существует такое $\mu^* > 0$, что в результате замены переменных (20) с $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22), (25), (26)) для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ система (1) преобразуется в алгебраически и асимптотически эквивалентную систему из множества $\Sigma_{\xi\eta} \subset \tilde{\Sigma}_\infty$ с разделенными движениями вида

$$\Sigma_{\xi\eta} : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t), & \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{\eta}(t) = \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph})\eta(t), & \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \end{cases} \quad t \in T, \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) &\triangleq \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) - \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})\mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph}), \\
 \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) &\triangleq \mathbf{A}_4(t) + \mu \mathbf{L}(t, \mu, e^{-ph})\mathbf{A}_2(t, e^{-ph}).
 \end{aligned} \quad (41)$$

При этом зависящие от параметра μ и оператора запаздывания e^{-ph} матричные операторы из (40) ограничены на $(-\infty, t_1]$ и могут быть представлены в виде асимптотических рядов по малому параметру μ :

$$\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathbf{A}_\xi^m(t, e^{-ph}), \quad \mathbf{A}_\eta(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \mathbf{A}_\eta^m(t, e^{-ph}), \quad (42)$$

где

$$\mathbf{A}_\xi^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{A}_{\xi j}^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{A}_\eta^m(t, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^m \mathbf{A}_{\eta j}^m(t) e^{-jph}, \quad (43)$$

и матричные функции $\mathbf{A}_{\xi j}^m(t)$, $\mathbf{A}_{\eta j}^m(t)$ вычисляются итеративно по матричным функциям системы (1):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi j}^0(t) &= \mathbf{A}_{1j}(t) - \mathbf{A}_{2j}(t) \mathbf{L}_0^0(t - jh), & j &= 0, 1; \\ \mathbf{A}_{\xi j}^m(t) &= - \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) \mathbf{L}_{j-i}^m(t - ih), & m &\geq 1, \quad j = \overline{0, m+1}, \\ \mathbf{A}_{\eta 0}^0(t) &= \mathbf{A}_4(t), \quad \mathbf{A}_{\eta j}^0(t) = 0, & j &\neq 0, \\ \mathbf{A}_{\eta j}^m(t) &= \sum_{i=0}^1 \mathbf{L}_{j-i}^{m-1}(t) \mathbf{A}_{2i}(t - (j-i)h), & m &\geq 1, \quad j = \overline{0, m}, \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство (40) следует из (24) с учетом (25), (26). Алгебраическая эквивалентность исходной и преобразованной систем вытекает из утверждения 3. Из (24)–(26) следует, что невырожденная замена переменных (22) преобразует систему (1) в расщепленную систему (40). Так как матричные операторы $\mathbf{A}_\mu$ (см. (10)) и $\mathbf{A}_{\xi\eta}$ (см. (19)) лежат в одной орбите действия группы $\mathcal{G}$ на множестве $\mathcal{O}_{\mu\infty}$, то они кинематически подобны, а значит, системы (1) и (40) асимптотически эквивалентны (см. [7, 8]).

Выражения из (41) получаются непосредственно из (19) с учетом (10), (22), (23). Доказательство представления (42) для $\mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})$ получим из (41), (26) с учетом (35), (38) и определяющих и алгебраических свойств оператора запаздывания. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) &= \sum_{j=0}^1 \mathbf{A}_{1j}(t) e^{-jph} - \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) e^{-iph} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m \mathbf{L}_j^m(t) e^{-jph} = \\ &= \mu^0 \sum_{j=0}^1 (\mathbf{A}_{1j}(t) - \mathbf{A}_{2j}(t) \mathbf{L}_0^0(t - jh)) e^{-jph} - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} \sum_{i=0}^1 \mathbf{A}_{2i}(t) \mathbf{L}_{j-i}^m(t - ih) e^{-jph}, \end{aligned}$$

откуда справедливы выражения (44) для $\mathbf{A}_{\xi j}^m(t)$. Аналогичным образом доказываются выражения (44) для $\mathbf{A}_{\eta j}^m(t)$.

Ограниченность матричных операторов (41) следует из ограниченности операторных матриц из правой части (41) с учетом теоремы 1. Теорема 2 доказана. $\square$

7. Аппроксимации расщепляющего преобразования и расщепленной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. При любом целом неотрицательном k рассмотрим в $\mathcal{O}_k$ совокупность $\mathcal{G}_k$ невырожденных при каждом $t \in T$ операторов $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ справедливы включения $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1}$.

Наряду с расщепляющим преобразованием $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)) для любого $k = 1, 2, \dots$ определим действующие на множестве $\mathcal{O}_{\mu\infty}$ его асимптотические аппроксимации — операторы

$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \in \mathcal{G}_{2k-1}$ вида

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) \\ -\sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) \sum_{n=0}^{k-1} \mu^n \mathbf{H}^n(t, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $\mathbf{H}^m(t, e^{-ph})$, $\mathbf{L}^m(t, e^{-ph})$ определены в (28):

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \in R_{2k-1, 2k-1}[\mu, z], \quad z = e^{-ph}, \quad R = C((-\infty, t_1]; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Утверждение 5. Для любого целого $k \geq 1$ оператор $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (45) является унимодулярным и обратимым для всех $\mu > 0$ и $t \in T$. При этом справедливо представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{[k]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) &= \\ &= \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \sum_{n=0}^{k-1} \mu^n \mathbf{H}^n(t, e^{-ph}) \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & -\mu \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{H}^m(t, e^{-ph}) \\ \sum_{m=0}^{k-1} \mu^m \mathbf{L}^m(t, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Доказательство. Поскольку $\det \mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$ для всех $k \geq 1$, матрица $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ унимодулярна. Так как для обратимости матрицы над кольцом полиномов необходимо и достаточно, чтобы она была унимодулярна, этим доказано первая часть утверждения. Представление (46) доказывается непосредственным вычислением. $\square$

Для любого $k = 1, 2, \dots$ действие оператора преобразования $\mathbf{K}^{[k]}$ (см. (45)) на оператор $\mathbf{A}_\mu$ системы (11) определим согласно (19) с заменой $\mathbf{G}$ на $\mathbf{K}^{[k]}$:

$$\mathbf{K}^{[k]} * \mathbf{A}_\mu = (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K}^{[k]} - (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \dot{\mathbf{K}}^{[k]}. \quad (47)$$

В дальнейшем нам понадобится следующее представление преобразования $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)), вытекающее из (45) и (28):

$$\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k-1} K_j^{[k]}(t, \mu) e^{-jph}, \quad K_j^{[k]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} K_{j11}^{[k]}(t, \mu) & K_{j12}^{[k]}(t, \mu) \\ K_{j21}^{[k]}(t, \mu) & K_{j22}^{[k]}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где $K_{jrs}^{[k]}(t, \mu) = (n_s \times n_r)$ -матричные нестационарные операторы, $s = 1, 2$, $r = 1, 2$. В частности, для $k = 1, 2$ имеем:

$$\begin{aligned} K_{j11}^{[k]}(t, \mu) &= \delta_{0j} E_{n_1}, \quad K_{j12}^{[k]}(t, \mu) = \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad K_{j21}^{[k]}(t, \mu) = -\sum_{m=j}^{k-1} \mu^m L_j^m(t), \\ K_{j22}^{[k]}(t, \mu) &= \delta_{0j} E_{n_2} - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{i=n+j-m}^{\min\{n, j\}} L_i^n(t) H_{j-i}^{m-n-1}(t - ih) - \\ &\quad - \delta_{2k} \mu^3 \sum_{i=\max\{j-2, 0\}}^1 L_i^1(t) H_{j-i}^1(t - ih), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (49)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Из (48), (49) следует

$$\begin{aligned} K_0^{[1]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \quad K_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & O(\mu) \\ 0 & O(\mu) \end{pmatrix}, \quad K_0^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \\ K_1^{[2]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} 0 & O(\mu) \\ O(\mu) & O(\mu) \end{pmatrix}, \quad K_2^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & O(\mu^2) \\ 0 & O(\mu^2) \end{pmatrix}, \quad K_3^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & O(\mu^3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

Следствие 4. *Справедливо представление*

$$(\mathbf{K}^{[k]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{2k-1} \bar{K}_j^{[k]}(t, \mu) e^{-jph}, \quad \bar{K}_j^{[k]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} \bar{K}_{j11}^{[k]}(t, \mu) & \bar{K}_{j12}^{[k]}(t, \mu) \\ \bar{K}_{j21}^{[k]}(t, \mu) & \bar{K}_{j22}^{[k]}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad (51)$$

где $\bar{K}_j^{[k]}(t, \mu)$ выражены через (28).

В частности, для $k = 1, 2$ верно

$$\begin{aligned} \bar{K}_{j11}^{[k]}(t, \mu) = \delta_{0j} E_{n_1} - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m \sum_{n=0}^1 \sum_{i=n+j-m}^{\min\{n, j\}} H_{j-i}^{m-n-1}(t) L_i^n(t - (j-i)h) - \\ - k\mu^3 \sum_{i=\max\{j-2, 0\}}^1 H_{j-i}^1(t) L_i^1(t - (j-i)h), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{j12}^{[k]}(t, \mu) = - \sum_{m=\max\{1, j\}}^k \mu^m H_j^{m-1}(t), \quad \bar{K}_{j21}^{[k]}(t, \mu) = \sum_{m=j}^{k-1} \mu^m L_j^m(t), \\ \bar{K}_{j22}^{[k]}(t, \mu) = \delta_{0j} E_{n_2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Из (51) и (52) следует

$$\begin{aligned} \bar{K}_0^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu) & O(\mu) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_0^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(1) & O(\mu) \\ O(1) & O(1) \end{pmatrix}, \\ \bar{K}_1^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu) & O(\mu) \\ O(\mu) & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_2^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu^2) & O(\mu^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_3^{[2]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} O(\mu^3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

Утверждение 6. *В общем случае для $k = 1, 2, \dots$ преобразование $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)) системы (11) приводит лишь к аппроксимативной декомпозиции в следующем смысле: блочная матрица преобразованной системы, полученной в результате преобразования (45), имеет диагональные блоки, являющиеся $O(\mu)$ -возмущением диагональных блоков $\mathbf{A}_\xi$, $\mathbf{A}_\eta$ матрицы (39) расщепленной системы (40) и внедиагональные матричные блоки, элементы которых имеют порядок малости не менее $O(\mu)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая $k = 1$ (для $k > 1$ доказательство проводится аналогично). Имеем из (45):

$$\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \\ -\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$$(\mathbf{K}^{[1]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & -\mu \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) \\ \mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

Подставим в (47) значение $k = 1$, оператор $\mathbf{A}_\mu$ (см. (7)), а также (54) и (55) (для сокращения записей аргументы (t, e^{-ph}) опускаем):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]} * \mathbf{A}_\mu = \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{L}^0 & -\mu \mathbf{H}^0 \\ \mathbf{L}^0 & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mu^{-1} \mathbf{A}_3 & \mu^{-1} \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0 \\ -\mathbf{L}^0 & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0 \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{L}^0 & -\mu \mathbf{H}^0 \\ \mathbf{L}^0 & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n_1} \times n_1 & \mu \dot{\mathbf{H}}^0 \\ -\dot{\mathbf{L}}^0 & -\mu \dot{\mathbf{L}}^0 \mathbf{H}^0 - \mu \mathbf{L}^0 \dot{\mathbf{H}}^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (56)$$

Выполняя операции над матрицами с учетом (30), (31), (33), (32), (34) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]} * \mathbf{A}_\mu = \text{diag} \{ E_{n_1}, \mu^{-1} E_{n_2} \} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 - \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1 & \mu (\mathbf{H}^1 \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0 + \mu \mathbf{H}^0 \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1) \mathbf{H}^0 \\ -\mu \mathbf{A}_4 \mathbf{L}^1 & \mathbf{A}_4 + \mu^2 (\mathbf{L}^0 \mathbf{A}_2 + \mu \mathbf{L}^0 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{L}^0) \mathbf{H}^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

Сравнение равенства (57) с (40), (41) с учетом ограниченности $\mathbf{L}^m, \mathbf{H}^m$ завершает доказательство утверждения. $\square$

Из сравнения (57) с представлением матриц вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3) вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 5. *Диагональные блоки матрицы преобразованной системы, полученной в результате преобразования $\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph})$, являются $O(\mu)$ -возмущением матриц вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3), а элементы внедиагональных матричных блоков матрицы преобразованной системы имеют порядок малости не менее $O(\mu)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и матрицы системы (1) дифференцируемы достаточное число раз. Тогда для любых $k = 0, 1, 2, \dots$ существует такое $\mu^* > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ расщепленная система (40) асимптотически аппроксимируются с точностью до $O(\mu^{k+1})$ системой*

$$\dot{\xi}^k(t) = \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} A_{\xi j}^m(t) \xi^k(t - jh), \quad t \in T, \quad (58)$$

$$\frac{d}{d\tau} \eta^k(\tau) = \sum_{m=0}^k \mu^m \sum_{j=0}^m \tilde{A}_{\eta j}^m(\tau) \eta^k(\tau - j\tilde{h}), \quad \tau \in T_\mu, \quad \tau = \frac{t - t_0}{\mu}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{\mu}, \quad (59)$$

где $\xi^k \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\eta^k \in \mathbb{R}^{n_2}$, матричные функции в (58)–(59) рассчитываются по формулам (44) и

$$\tilde{A}_{\eta j}^m(\tau) = \sum_{r=j}^m \frac{\tau^{m-r}}{(m-r)!} A_{\eta j}^{r(m-r)}(t_0). \quad (60)$$

Доказательство. Прежде всего из (42), (43) имеем представление расщепленной системы (40):

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{m+1} A_{\xi j}^m(t) \xi(t - jh), \\ \mu \dot{\eta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(t) \eta(t - jh). \end{cases} \quad (61)$$

Из ограниченности операторов $\mathbf{L}, \mathbf{H}$ (см. (22) и (19)) следует ограниченность матриц (41) системы (40). Правая часть системы (58) получается путем исключения членов порядка выше $O(\mu^k)$ из правой части первой системы (61).

Чтобы получить представление (59), перепишем вторую подсистему (61) в быстрой («растянутой») шкале времени $\tau = (t - t_0)/\mu$:

$$\frac{d}{d\tau} \eta(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) \eta(\tau - j\tilde{h}). \quad (62)$$

Введем новую функцию $\tilde{\eta}(\tau) = \eta(\mu\tau + t_0)$, $\tau \in T_\mu$. Тогда из (62) получаем

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{\eta}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^m A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) \tilde{\eta}(\tau - j\tilde{h}). \quad (63)$$

В предположении достаточной гладкости матричных функций $A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0)$ представим их в виде степенных рядов по μ :

$$A_{\eta j}^m(\mu\tau + t_0) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \frac{\tau^r}{r!} A_{\eta j}^{m(r)}(t_0). \quad (64)$$

Подставим разложения (64) в (63) и выполним преобразования. С учетом ограниченности матричных функций $A_{\eta j}^m(t)$, исключая в выражениях получившейся системы члены, порядок малости которых выше $O(\mu^k)$, получаем представление (59). Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание 1. Требования на гладкость матриц системы (1) в теореме 3 таковы, чтобы обеспечить существование производных матриц $A_{\eta j}^{m(r)}(t)$ до нужного порядка.

Из (48)–(53) вытекает следующее утверждение.

Утверждение 7. В условиях леммы 1 для достаточно малых $\mu > 0$ верно асимптотическое представление

$$(\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{K}^{[k]} - (\mathbf{K}^{[k]})^{-1} \dot{\mathbf{K}}^{[k]} = \mathbf{A}_{\xi\eta}(t, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k)$$

и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left(\bar{\mathbf{K}}_j^{[k]} \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}_0(t - jh) + \bar{\mathbf{K}}_{j-1}^{[k]} \mathbf{A}_1(t - (j-1)h) + \dot{\bar{\mathbf{K}}}_j^{[k]} \right) \mathbf{K}_{i-j}^{[k]}(t - jh) = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k) & O(\mu^k) \\ O(\mu^k) & \tilde{\mathbf{A}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph}) + O(\mu^k) \end{pmatrix} \triangleq \mathcal{M} \mathbf{A}_{\xi\eta}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}), \end{aligned} \quad (65)$$

$$\mathbf{A}_{\xi\eta}^{[k]} = \mathcal{M}^{-1} \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi^{[k]}, \mathbf{A}_\eta^{[k]} \}.$$

Из (45) с учетом (30) и утверждения 5 получаем следующее утверждение.

Следствие 6. В отличие от преобразования $\mathbf{K}$ (см. (22)), которое является преобразованием с бесконечным запаздыванием (см. (35), (38)), при любых фиксированных $k = 1, 2, \dots$ преобразование $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (45)) является преобразованием с конечным запаздыванием и принадлежит классу невырожденных преобразований $\mathcal{R}_2$ (см. [25]).

Известно (см. [25]), что преобразования этого класса сохраняют управляемость, наблюдаемость и стабилизируемость системы.

Замечание 2. В общем случае асимптотические приближения $\mathbf{K}^{(k)}(t, \mu, e^{-ph})$ порядка $O(\mu^k)$ расщепляющего преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которые получаются, если в представление (22) подставить асимптотические ряды (27) после необходимых алгебраических преобразований отбросить в матричных блоках члены порядка выше $O(\mu^k)$, не будут являться унимодулярными.

Для подтверждения рассмотрим асимптотическое приближение первого порядка $\mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph})$ преобразования $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ (см. (22)), которое получается, если в представление (22) подставить асимптотические ряды (27) и отбросить в матричных блоках члены порядка выше $O(\mu)$:

$$\mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{H}^0 \\ -\mathbf{L}^0 - \mu \mathbf{L}^1 & E_{n_2} - \mu \mathbf{L}^0 \mathbf{H}^0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $n_1 = n_2 = 1$. Тогда $\det \mathbf{K}^{(1)}(t, \mu, e^{-ph}) = 1 + m^2 \mathbf{L}^1(t, \mu, e^{-ph}) \neq 1$ при $\mathbf{L}^1(t, \mu, e^{-ph}) \neq 0$, что подтверждает справедливость замечания.

Утверждение 8. Для любого $k \geq 1$ при условии достаточной гладкости и ограниченности производных матриц системы (1) преобразования $\mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph})$ вида (45) являются преобразованиями Ляпунова.

Доказательство. При $k = 1$ из (30)–(34), непрерывной дифференцируемости и ограниченности матриц исходной системы следует существование непрерывной производной элементов матрицы $\mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph})$, ограниченность их и их производных. Для $k > 1$ это следует при условии большей гладкости и ограниченности матриц исходной системы. Кроме того, для любого $k \geq 1$ из утверждения 5 имеем $\det \mathbf{K}^{[k]}(t, \mu, e^{-ph}) \equiv 1$. Таким образом, для рассматриваемых преобразований (45) выполнены все требования, и они являются преобразованиями Ляпунова. $\square$

8. Примеры. Продemonстрируем на примерах построение асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования (45) и расщепленной системы (58)–(59).

Пример 2. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -tx(t) + x(t-h) - \sin(t)y(t) + y(t-h), & x \in \mathbb{R}, \\ \mu \dot{y}(t) = -x(t) - y(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [0, 10]. \end{cases} \quad (66)$$

Выпишем параметры систем (1), (66):

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 10, \\ A_{10} = (-t), \quad A_{11} = (1), \quad A_{20} = (-\sin(t)), \quad A_{21} = (1), \quad A_3 = (-1), \quad A_4 = (-1), \\ A_0(t) = \begin{pmatrix} -t & -\sin(t) \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} -t + e^{-ph} & -\sin(t) + e^{-ph} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_\mu = \begin{pmatrix} -t + e^{-ph} & -\sin(t) + e^{-ph} \\ -1/\mu & -1/\mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для системы (66) выполнены условия теоремы 1. Согласно (29) рассчитываем

$$\mathbf{L}^0(t, e^{-ph}) = 1, \quad \mathbf{H}^0(t, e^{-ph}) = \sin(t) - e^{-ph}.$$

Согласно (48), (46) получаем

$$\begin{aligned} K_0^{[1]}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu \sin(t) \\ -1 & 1 - \mu \sin(t) \end{pmatrix}, \quad K_1^{[1]}(t, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & \mu(\sin(t) - e^{-ph}) \\ -1 & 1 - \mu(\sin(t) - e^{-ph}) \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{K}^{[1]})^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 - \mu(\sin(t) - e^{-ph}) & -\mu(\sin(t) - e^{-ph}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Система (66) удовлетворяет условиям теоремы 3. Асимптотическая аппроксимация первого порядка совпадает с вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3), которые для системы (66) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = (-t + \sin(t))x_s(t), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = -y_f(\tau), & \tau \in \left[0, \frac{10}{\mu}\right]. \end{cases}$$

Пример 3. Пусть система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -tx(t) + x(t-h) + y(t-h), & x \in \mathbb{R}, \\ \mu \dot{y}(t) = -x(t) - y(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [0, 5h]. \end{cases} \quad (67)$$

Параметры системы (1), (67):

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 5h, \\ A_{10} = (-t), \quad A_{11} = (1), \quad A_{20} = 0, \quad A_{21} = (1), \quad A_3 = (-1), \quad A_4 = (-1). \end{aligned}$$

Для системы (67) выполнены условия теоремы 1. Согласно (31) рассчитываем

$$\begin{aligned} L_0^0(t) = 1, \quad H_0^0(t) = 0, \quad H_1^0(t) = -1, \quad L_0^1(t) = t, \\ L_1^1(t) = 0, \quad H_0^1(t) = 0, \quad H_1^1(t) = -t, \quad H_2^1(t) = -1, \quad t \in T. \end{aligned}$$

Согласно (48), (46) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{[1]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu e^{-ph} \\ -1 - t\mu & 1 + \mu e^{-ph} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{K}^{[1]})^{(-1)}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} 1 + \mu e^{-ph} & \mu e^{-ph} \\ 1 + t\mu & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}^{[2]}(t, \mu, e^{-ph}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\mu e^{-ph} - \mu^2 e^{-2ph} - t\mu^2 e^{-ph} \\ -1 - t\mu & 1 + \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + 2te^{-ph}) + \mu^3(te^{-2ph} + t^2e^{-ph}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{K}^{[2]})^{(-1)}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} 1 + \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + 2te^{-ph}) + \mu^3(te^{-2ph} + t^2e^{-ph}) & \mu e^{-ph} + \mu^2(e^{-2ph} + te^{-ph}) \\ 1 + t\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Система (67) удовлетворяет условиям теоремы 3. Асимптотическая аппроксимация первого порядка совпадает с вырожденной системой (2) и системой погранслоя (3) для системы (67) и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = -t x_s(t), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) = -y_f(\tau), & \tau \in \left[0, \frac{5h}{\mu}\right]. \end{cases} \quad (68)$$

Заметим, что в отличие от исходной системы (67) ее вырожденная система и система погранслоя (68) являются системами без запаздывания.

Система асимптотической аппроксимации второго порядка (58), (59) расщепленной системы для (67) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}^{[2]}(t) = -t\xi^{[2]}(t) - \mu(t-h)\xi^{[2]}(t-h), & t \in T, \\ \frac{d}{d\tau} \eta^{[2]}(\tau) = -\eta^{[2]}(\tau) + \mu\eta^{[2]}(\tau - \frac{h}{\mu}), & \tau \in \left[0, \frac{5h}{\mu}\right]. \end{cases}$$

9. Заключение. Разработанный метод декомпозиции по темпам изменения переменных линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием использует алгебраический подход представления динамической системы с запаздыванием как системы над кольцом полиномов от оператора запаздывания, технику погружения системы в семейство систем в расширенном пространстве состояний над кольцом формальных степенных рядов, нелокальную замену переменных и асимптотические методы.

В результате применения к системе (1) построенного преобразования Ляпунова (22) получается полностью расщепленная по темпам изменения переменных система с бесконечным запаздыванием с «затухающей» памятью (40), (42), которая алгебраически и асимптотически эквивалентна исходной системе (1) в расширенном пространстве состояний. При этом расщепленные подсистемы (40), в отличие от исходной системы (1), имеют регулярно зависящую от параметра правую часть (42), и могут рассматриваться как регулярные возмущения не зависящих от малого параметра вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3).

Построенное преобразование (22), (27)–(29) и его асимптотические аппроксимации (45) могут использоваться для анализа устойчивости, управляемости, наблюдаемости системы (1), асимптотических характеристик её решений. Декомпозиция позволяет получать условия структурных свойств системы при всех достаточно малых значениях параметра из аналогичных условий для связанных с ней не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности — вырожденной системы (2) и системы погранслоя (3), разрабатывать робастные законы управления и наблюдения.

Итерационные схемы (31)–(34) можно использовать для расчета асимптотических аппроксимаций (45) любого порядка компонент расщепляющего преобразования (22), (27) и матриц (41) преобразованной системы (40), построения систем (58), (59) с разделенными по темпам изменения переменным, асимптотически аппроксимирующих двухтемповую систему (1).

Полученные результаты без принципиальных изменений распространяются на системы вида (1) со многими соизмеримыми запаздываниями. Исследование связи между решениями исходной системы (1) и преобразованных систем (40), (58)–(59) является предметом дальнейших исследований автора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К. А. Расщепление сингулярно возмущенной многотемповой системы// Изв. АН АрмССРю — 1979. — 14, № 5. — С. 327–337.
2. Антонец А. Б. Линейные функциональные уравнения: Операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
3. Астровский А. И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. — Минск: МИУ, 2007.
4. Астровский А. И., Гайшун И. В. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем// Автомат. телемех. — 1998. — № 7. — С. 3–13.
5. Астровский А. И., Гайшун И. В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. — Минск: Беларуская навука, 2013.
6. Астровский А. И., Гайшун И. В. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 3. — С. 370–379.
7. Барабанов Е. А. Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2014. — № 30. — С. 42–63.
8. Богданов Ю. С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах// Диффер. уравн. — 1965. — 1, № 6. — С. 707–716.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике// в кн.: Тр. Междунар. симп. по нелинейн. колеб.. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — 1. — С. 93–154.
10. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
11. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
12. Ворopaева Н. В., Соболев В. А. Декомпозиция линейно-квадратичной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными// Автомат. телемех. — 2006. — № 8. — С. 3–11.
13. Ворopaева Н. В., Соболев В. А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. — М.: Физматлит, 2009.
14. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 1999.
15. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления// Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
16. Калинин А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. — Минск: Экоперспектива, 2000.
17. Калман П., Фалб М., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздыванием. — Минск: Изд-во Ин-та математики АН БССР, 1978.
19. Копейкина Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1989. — 25, № 9. — С. 1508–1518.
20. Курина Г. А. О поведении множеств достижимости линейных матрично сингулярно возмущенных систем// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1995. — 211. — С. 316–325.
21. Курина Г. А. О расщеплении линейных систем, не разрешенных относительно производной// Изв. вузов. Мат. — 1992. — № 4. — С. 26–33.
22. Курина Г. А., Калашникова М. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными// Автомат. телемех. — 2022. — № 11. — С. 3–61.
23. Мазаник С. А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. — Минск: БГУ, 2008.
24. Марченко В. М. Преобразования систем с запаздывающим аргументом// Диффер. уравн. — 1977. — 12, № 10. — С. 1882–1884.
25. Марченко В. М., Луазо Ж.-Ж. Реализация динамических систем в шкалах систем с последствием: I. Реализуемость// Диффер. уравн. — 2006. — 42, № 11. — С. 1515–1523.
26. Осипова О. В., Черевко И. М. Асимптотична декомпозиція лінійних сингулярно збурених систем// Буковин. мат. ж. — 2013. — 1, № 3-4. — С. 114–118.
27. Ситник С. М., Шишкіна Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

28. *Соболев В. А., Щепаккина Е. А.* Метод декомпозиции в задачах управления манипуляционными роботами// Мат. XVI Междунар. науч. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — М.: Ин-т пробл. управл. им. В. А. Трапезникова РАН, 2022. — С. 410–413.
29. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. — М.: Наука, 1988.
30. *Хартковский В. Е.* Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. — Гродно, 2022.
31. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
32. *Цехан О. Б.* Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром// Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне. — 2017. — 7, № 1. — С. 50–61.
33. *Цехан О. Б.* Достаточные условия спектральной управляемости на основе декомпозиции линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием// Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне. — 2017. — 7, № 3. — С. 51–65.
34. *Цехан О. Б.* Декомпозиция сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы на основе невырожденного преобразования// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 190. — С. 130–143.
35. *Цехан О. Б.* Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием// Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне. — 2024. — 14, № 1. — С. 37–47.
36. *Abed E.* Decomposition and stability for multiparameter singular perturbation problems// IEEE Trans. Automat. Control. — 1986. — 31, № 10. — P. 925–934.
37. *Califano C., Moog C. H.* Canonical forms of time-delay systems// Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (December 10–13, 2012, Maui, Hawaii, USA), 2012. — P. 3862–3867.
38. *Chang K.* Singular perturbations of a general boundary value problem// SIAM J. Math. Anal. — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.
39. *Cherevko I. M., Osypova O.* Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems// Miskolc Math. Notes. — 2015. — 16, № 2. — P. 729–745.
40. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. — Cham: Birkhäuser, 2014.
41. *Fridman E.* Decoupling transformation of singularly-perturbed systems with small delays and its applications// Z. Angew. Math. Mech. Berlin — 1996. — 76. — P. 201–204.
42. *Fridman E.* Exact slow-fast decomposition of the nonlinear singularly perturbed optimal control problem// Systems Control Lett. — 2000. — 40. — P. 121–131.
43. *Gajic Z., Shen X.* Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems. — London: Springer, 1993.
44. *Glizer V. Y.* Stabilizability conditions for one class of linear singularly perturbed differential-difference systems// Proc. 2019 IEEE 15th Int. Conf. on Control and Automation (ICCA) (July 16–19, 2019, Edinburgh, Scotland), 2019. — P. 1167–1172.
45. *Glizer V. Y.* Controllability of Singularly Perturbed Linear Time Delay Systems. — Cham: Birkhäuser, 2021.
46. *Glizer V. Y., Feigin Y., Fridman E., Margaliot M.* A new approach to exact slow-fast decomposition of singularly perturbed linear systems with small delays// Proc. 53rd IEEE Conf. on Decision and Control (December 15–17, 2014, Los Angeles, California, USA), 2014. — P. 451–456.
47. *Glizer V. Y., Fridman E., Feigin Y.* A Novel approach to exact slow-fast decomposition of linear singularly perturbed systems with small delays// SIAM J. Control Optim. — 2017. — 55, № 1. — P. 236–274.
48. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1999.
49. *Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu Desineni S.* Discrete singularly perturbed control problems (a survey)// Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2017. — 24. — P. 335–370.
50. *Ladde G. S., Siljak D. D.* Multiparameter singular perturbations of linear systems with multiple time scales// Automatica. — 1983. — 19, № 4. — P. 385–394.
51. *Magalhaes L. T.* Invariant manifolds for singularly perturbed linear functional differential equations// J. Differ. Equations. — 1984. — 54, № 3. — P. 310–345.

52. *Mitropol'skii Yu. A., Fodchuk V. I. Klevchuk I. I.* Integral manifolds, stability, and bifurcation of solutions of singularly perturbed functional-differential equations// *Ukr. Mat. Zh.* — 1986. — 38, № 3. — P. 335–340.
53. *Naidu D. S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview// *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms.* — 2002. — № 9. — P. 233–278.
54. *Naligama C. A., Tsekhan O. B.* Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation// *Vesn. Yanka Kupala State Univ. Grodno. Ser. 2. Math. Phys. Inform. Comput. Technol. Control.* — 2021. — 11, № 3. — P. 27–36.
55. *Pawlusiewicz E., Tsekhan O.* Stability and stabilisability of the singularly perturbed system with delay on time scales: a decomposition approach// *Int. J. Control.* — 2021. — 95, № 9. — P. 2406–2419.
56. *Pekar L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results// *IEEE Acc.* — 2018. — 6, № 1. — P. 35457–35491.
57. *Perestyuk M. O., Cherevko I. M.* Decomposition of linear singularly perturbed functional differential equations// *Nonlin. Oscil.* — 2001. — 4, № 3. — P. 345–353.
58. *Perestyuk N., Cherevko I. M.* Investigation of the integral manifolds of singularly perturbed functional differential equations// *Miskolc Math. Notes.* — 2002. — 3, № 1. — P. 47–58.
59. *Phillips R. G.* The equivalence of time-scale decomposition techniques used in the analysis and design of linear systems// *Int. J. Control.* — 1983. — 37, № 6. — P. 1239–1257.
60. *Prljaca N., Gajic Z.* General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems// *IEEE Trans. Automat. Control.* — 2008. — 53, № 5. — P. 1303–1305.
61. *Sobolev V. A.* Integral manifolds, stability and decomposition of singularly perturbed systems in Banach space// *Acta Sci. Math.* — 1987. — 51, № 3-4. — P. 491–500.
62. *Shimjith S. R., Tiwari A. P., Bandyopadhyay B.* Modeling and Control of a Large Nuclear Reactor: A three-time-scale Approach. — Berlin: Springer, 2013.
63. *Strygin V. V., Sharuda D. V.* Asymptotic expansion of a solution of stiff systems of delay differential equations// *IFAC Proc. Vol.* — 2000. — 33, № 23. — P. 287–289.
64. *Tsekhan O. B.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation// *Axioms.* — 2019. — 8. — P. 1–19. — 71.
65. *Tsekhan O., Pawlusiewicz E.* Slow-fast decomposition of singularly perturbed system with delay on time scales// *Proc. ICCCT'2019 20th Int. Carpath. Control Conf. (May 26–29, 2019, Krakow-Wieliczka), 2019.* — P. 1–5.
66. *Tsekhan O.* Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay// in: *Dynamic Control and Optimization (Tchemisova T. V., Torres D. F. M., Plakhov A. Y., eds.).* — Cham: Springer, 2021. — P. 77–97.
67. *Yang X., Zhu J. J.* Chang transformation for decoupling of singularly perturbed linear slowly time-varying systems// *Proc. 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (December 10–13, 2012, Maui, Hawaii, USA), 2012.* — P. 5755–5760.
68. *Yang X., Zhu J. J.* A generalization of Chang transformation for linear time-varying systems// *Proc. 49th IEEE Conf. on Decision and Control (December 15–17, 2010, Atlanta, GA, USA), 2010.* — P. 6863–6869.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Цехан Ольга Борисовна (Tsekhan Olga Borisovna)

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь (Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus)

E-mail: tsekhan@grsu.by