



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 10–17
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-10-17

УДК 517.988.67

ЗАДАЧА КОШИ С ПАРАМЕТРОМ, ВОЗМУЩЕННАЯ ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

© 2024 г. Л. Р. Д. ДРЕГЛЯ СИДОРОВ, Н. А. СИДОРОВ

Аннотация. Рассматривается задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом. При любом значении параметра задача имеет тривиальное решение. Получены необходимые и достаточные условия на значения параметра, в окрестности которых существуют нетривиальные решения в классе вещественных непрерывных функций. Указан способ построения таких решений.

Ключевые слова: линейный функционал, точка бифуркации, задача Коши, диаграмма Ньютона, интеграл Стильтьеса.

THE CAUCHY PROBLEM WITH A PARAMETER PERTURBED BY A LINEAR FUNCTIONAL

© 2024 L. R. D. DREGLEA SIDOROV, N. A. SIDOROV

ABSTRACT. In this paper, we consider a Cauchy problem with a parameter perturbed by a linear functional. For any value of the parameter, the problem has a trivial solution. We obtain necessary and sufficient conditions for values of the parameter such that in their neighborhoods nontrivial solutions in the class of real continuous functions exist. A method of constructing such solutions is proposed.

Keywords and phrases: linear functional, bifurcation point, Cauchy problem, Newton diagram, Stieltjes integral.

AMS Subject Classification: 47J15

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = a(t, \lambda)x_\alpha(\lambda) + \sum_{i=l}^{\infty} a_i(t, \lambda)x^i(t, \lambda), & t \in [0, T], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad l \geq 2 \\ x(t, \lambda)|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_l x^l$ сходится равномерно в окрестности нуля, коэффициенты $a(t, \lambda)$, $a_i(t, \lambda)$ — непрерывные по t и достаточно гладкие по λ . Линейный функционал $x_\alpha(\lambda)$, называемый в приложениях *нагрузкой*, определяется интегралами Стильтьеса:

$$x_\alpha(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} x(t, \lambda) d\alpha_i(t), \quad [a_i, b_i] \subset (0, T]. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00161).

Поэтому нагрузка может иметь локальные и интегральные слагаемые. Отметим, что задача Коши (1) при любом λ имеет тривиальное решение $x(t, \lambda) = 0$, $x_\alpha(\lambda) = 0$.

Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$x(t, \lambda) = \int_0^t a(t, \lambda) dt x_\alpha(\lambda) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_0^t a_i(t, \lambda) x^i(t, \lambda) dt. \quad (3)$$

Определение 1. Точка λ_0 называется точкой бифуркации уравнения (1), если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует непрерывная функция $x(t, \lambda)$ и число λ , удовлетворяющие интегральному уравнению (3), $0 < \|x\| < \varepsilon$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t, \lambda)|$.

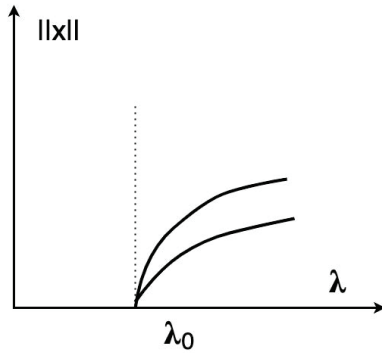


Рис. 1. Точка бифуркации

В разных полуокрестностях точки бифуркации может существовать разное число нетривиальных вещественных решений $x(t, \lambda)$ (см. рис. 1).

В данной работе найдены условия, при которых точка λ_0 является точкой бифуркации, т.е. в её окрестности существует нетривиальное решение. Для других классов нелинейных уравнений подобная задача рассматривалась нами ранее в [6, 7] путём построения и исследования уравнения относительно линейного функционала и параметра, называемого уравнением разветвления. Аналогичная техника применена здесь. Таким образом, настоящая работа продолжает исследования [6, 7].

2. Построение уравнения разветвления, необходимое условие бифуркации. Построим решение интегрального уравнения (3) при $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho_1$, $|x_\alpha| \leq \rho_2$ методом неопределённых коэффициентов в виде ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t, \lambda) x_\alpha(\lambda)^n, \quad (4)$$

коэффициенты которого строятся рекуррентно:

$$k_1(t, \lambda) = \int_0^t a(\tau, \lambda) d\tau, \quad k_2(t, \lambda) = \dots = k_{l-1}(t, \lambda) = 0, \quad k_l(t, \lambda) = \int_0^t a_l(\tau, \lambda) k_1^l(\tau, \lambda) d\tau, \quad \dots$$

Мы строим малое решение $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, поэтому и $x_\alpha \rightarrow 0$. Ряд (4) сходится равномерно при достаточно малом ρ_2 . Применяя к нему линейный функционал x_α , получим искомое уравнение разветвления:

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n(\lambda) x_\alpha^n = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты L_n определены следующим образом:

$$L_1(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_1(t, \lambda) d\alpha_i(t) - 1, \quad L_2 = \dots = L_{l-1} = 0, \quad L_l(\lambda) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} k_l(t, \lambda) d\alpha_i(t), \quad \dots$$

Точка λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1) в том и только в том случае, когда λ_0 — точка бифуркации уравнения разветвления (5). Если $L_1(\lambda_0) \neq 0$, то на основании теоремы о неявной функции уравнение разветвления в окрестности λ_0 не имеет малых нетривиальных решений. Формула (4) устанавливает биекцию между малыми решениями исходной задачи Коши и уравнения разветвления. Поэтому справедливы следующие утверждения.

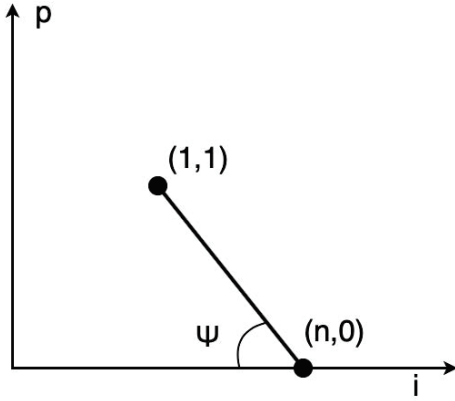


Рис. 2. Диаграмма Ньютона: случай 1

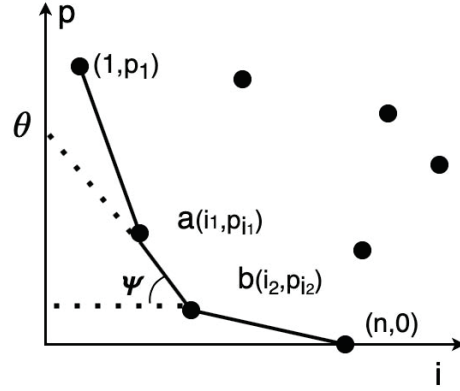


Рис. 3. Диаграмма Ньютона: случай 2

Следствие 1 (необходимое условие бифуркации). Для того чтобы λ_0 могла быть точкой бифуркации задачи Коши (1), необходимо выполнение равенства $L_1(\lambda_0) = 0$.

Следствие 2 (c -параметрическая бифуркация). Если в уравнении разветвления (5) все $L_i(\lambda_0) = 0$, то λ_0 будет точкой бифуркации. Более того, задача Коши (1) при λ_0 имеет c -параметрическое нетривиальное решение $x(t, c)$, зависящее от малого параметра c .

Следствию 2 отвечает на рис. 1 вертикальная ветвь, выходящая из точки λ_0 .

3. Достаточные условия бифуркации и построение асимптотики решения в окрестности точки бифуркации. Введем следующее условие: точка λ_0 является нулем коэффициентов $L_i(\lambda)$ уравнения разветвления (5) кратностей p_i соответственно, причем $p_i \geq 1$, где $i = 1, \dots, n-1$, а $p_n = 0$, так как $L_n(\lambda_0) \neq 0$.

Построим диаграмму Ньютона (см. рис. 2). Рассмотрим множество точек

$$(1, p_1), \quad (2, p_2), \quad \dots \quad (n-1, p_{n-1}), \quad (n, 0). \quad (6)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $p_1 = 1$, $p_i \geq 1$, $i = 2, \dots, n-1$, $p_n = 0$. Тогда диаграмма Ньютона множества точек (6) состоит из единственного отрезка (см. рис. 2), соединяющего точки $(1, 1)$ и $(n, 0)$ на плоскости (i, p) , ψ — угол наклона этого отрезка к отрицательному направлению оси абсцисс, $\tan \psi = 1/(n-1)$. На основании формулы Тейлора при $\mu = \lambda - \lambda_0 \rightarrow 0$ справедливы асимптотики

$$L_i(\lambda_0 + \mu) \sim \frac{1}{p_i!} L_i^{(p_i)}(\lambda_0) \mu^{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому решение уравнения разветвления (5) следует искать в форме

$$x_\alpha = (c_0 + o(|\mu|)) |\mu|^{1/(n-1)}, \quad c_0 \neq 0. \quad (7)$$

Главный член c_0 удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{sgn} \mu L_1^{(1)}(\lambda_0) + L_n(\lambda_0) c^{n-1} = 0,$$

зависящему от знака $\mu = \lambda - \lambda_0$. Значит,

$$c_0 = \left(-\operatorname{sgn}(\mu) \frac{L_1'(\lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} \right)^{1/(n-1)}$$

тоже зависит от знака μ . Таким образом,

- (а) при четных n существует ровно одно вещественное решение уравнения разветвления (5), определенное в окрестности точки λ_0 ;

- (b) при нечетных n существует ровно два малых вещественных решения уравнения разветвления (5), определенных в полукрестности точки λ_0 , где

$$\operatorname{sgn}(\mu)L_n(\lambda_0)L_1^{(1)}(\lambda_0) < 0.$$

Ряд (4) устанавливает биекцию между малыми решениями задачи Коши (1) и решением уравнения разветвления (5). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} L_1(\lambda_0) = 0, \quad L_1^{(1)}(\lambda_0) \neq 0, \quad L_n(\lambda_0) \neq 0, \\ p_1 = 1, \quad p_i \geq 1, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad p_n = 0. \end{aligned}$$

Тогда

- (a) при четном n число λ_0 будет точкой бифуркации задачи Коши (1), причем в окрестности λ_0 существует ровно одно малое вещественное нетривиальное решение с асимптотикой

$$x(t, \lambda) \sim \int_0^t a(\tau, \lambda_0) d\tau \left(-\operatorname{sgn}(\lambda - \lambda_0) \frac{L_1^{(1)}(\lambda - \lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} \right)^{1/(n-1)} |\lambda - \lambda_0|^{1/(n-1)};$$

- (b) при нечетном n существует ровно два малых вещественных решения, определенных в полукрестности точки λ_0 , где $\operatorname{sgn} |L_n(\lambda_0)L_1^{(1)}(\lambda_0)| < 0$,

$$x_{1,2}(\tau, \lambda) \sim \pm \int_0^t a(\tau, \lambda_0) d\tau \left| \frac{L_1^{(1)}(\lambda_0)}{L_n(\lambda_0)} (\lambda - \lambda_0) \right|^{1/(n-1)}.$$

Случай 2: $p_1 \geq 2, p_i \geq 1, i = 2, \dots, n-1, p_n = 0$. В этом случае диаграмма Ньютона может иметь несколько граней (см. рис. 3). Для каждой грани легко сформулировать свои достаточные условия существования точек бифуркации задачи Коши (1) с указанием асимптотики решений.

Возьмем грань (a, b) диаграммы с концами в точках $(i_1, p_{i_1}), (i_2, p_{i_2})$. Выберем рациональное число

$$\frac{r}{s} = \frac{p_{i_1} - p_{i_2}}{i_2 - i_1}.$$

Число $r/s = \operatorname{tg} \psi$ (см. рис. 3) удовлетворяет равенству

$$i_1 \frac{r}{s} + p_{i_1} = i_2 \frac{r}{s} + p_{i_2} = \theta.$$

Здесь θ — ордината точки пересечения прямой, проходящей через грань (a, b) с осью ординат p , ψ — угол, образованный пересечением этой прямой с отрицательным направлением оси абсцисс i . Если точка (i, p) не лежит на указанной прямой, то выполнится неравенство

$$i \frac{r}{s} + p > \theta.$$

Положим в уравнении разветвления $\lambda = \lambda_0 + \mu$ и будем искать его решение в виде

$$x_\alpha = c(\mu)|\mu|^{r/s}, \quad c(0) \neq 0.$$

Тогда функция $c(\mu)$ должна определяться из уравнения

$$|\mu|^\theta \sum_{i(r/s)+p_i=\theta} (\operatorname{sgn} \mu)^{p_i} \frac{L_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c(\mu)^i + r(c(\mu), \mu) = 0.$$

Отметим, что ввиду свойства ?? при любом $c(\mu)$ получим в пределе

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} |\mu|^{-\theta} r(c(\mu), \mu) = 0.$$

В силу этого предела $c(0)$ должно удовлетворять равенству

$$P_{\pm}(c) := \sum_{i(r/s)+p_i=\theta} \operatorname{sgn}(\mu)^{p_i} \frac{L_i^{(p_i)}(\lambda_0)}{p_i!} c^i = 0.$$

Если хотя бы одно из чисел p_i нечетное, то для определения $c(0)$ получим два разных полинома $P_{\pm}(c)$. Полиномы $P_{\pm}(c)$ отвечают соответственно положительным и отрицательным μ , т.е. разным полукрестностям точки бифуркации λ_0 . Таким образом, в общем случае для вычисления $c(0)$ получим два разных уравнения.

Пусть существует простой вещественный корень $c_{\star} \neq 0$ хотя бы у одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда на основании теоремы о неявной функции уравнение разветвления имеет вещественное решение с асимптотикой

$$x_{\alpha} \sim c_{\star} |\mu|^{r/s},$$

определенное в соответствующей полукрестности точки λ_0 . В этом случае λ_0 — точка бифуркации уравнения (1), и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть диаграмма Ньютона отвечает случаю 2 (см. рис. fig3) и $c_{\star}$ — ненулевой простой вещественный корень хотя бы одного из полиномов $P_{\pm}(c)$. Тогда λ_0 — точка бифуркации, и хотя бы в одной полукрестности точки λ_0 существует в пространстве $C[0, T]$ вещественное решение задачи Коши с асимптотикой

$$x(t, \lambda) \sim c_{\star} |\lambda - \lambda_0|^{r/s} \int_0^t a_1(\tau, \lambda) d\tau.$$

4. О бифуркации решений задачи Коши (8) с параметром, возмущенной линейными функционалами. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_k(t, \lambda) x_{\alpha_k}(\lambda) + \sum_{i=l}^{\infty} A_i(t, \lambda) x^i(t, \lambda), \\ x(t, \lambda)|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $a_k(t, \lambda)$, $A_i(t, \lambda)$ — функции, непрерывные по t и достаточно гладкие по λ при $t \in [0, T]$, $\lambda \in I \subset \mathbb{R}^m$. Линейные функционалы определяются интегралами Стильтьеса:

$$x_{\alpha_k}(\lambda) = \int_{a_k}^{b_k} x(t, \lambda) d\alpha_k(t), \quad [a_k, b_k] \subset (0, T]. \quad (9)$$

Отметим, что в уравнении (8) количество линейных функционалов x_{α_k} , $k = 1, \dots, n$, нельзя уменьшить, если функции $a_1(t, \lambda), \dots, a_n(t, \lambda)$ не являются линейно зависимыми. Поэтому задача (1) является частным случаем задачи Коши (8).

Фиксируем в множестве I точку λ_0 . При

$$\|\lambda - \lambda_0\|_{\mathbb{R}^m} \leq \rho_1, \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_{\alpha_k}|^2} \leq \rho_2,$$

где положительные числа ρ_1 , ρ_2 достаточно малы, решение задачи Коши (8) представим однозначно в виде равномерно сходящегося ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}(\lambda), \dots, x_{\alpha_n}(\lambda)). \quad (10)$$

Непрерывные функции K_j суть j -степенные формы компонент вектора $\bar{x}_\alpha = (x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})^T$. В частности,

$$K_1(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = \sum_{k=1}^n \int_0^t a_k(t, \lambda) dt x_{\alpha_k}$$

— линейная форма компонент вектора $\bar{x}_\alpha$:

$$K_j(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = 0, \quad j = 2, \dots, l-1,$$

$$K_l(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) = \int_0^t A_l(t, \lambda) \left(K_1(t, \lambda, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \right)^l dt$$

— l -степенная форма компонент вектора $\bar{x}_\alpha$ и т. д.

Применяя к обеим частям ряда (10) последовательно линейные функционалы x_{α_i} , $i = 1, \dots, n$, получим систему из n уравнений разветвления:

$$\bar{L}_1(\lambda; \bar{x}_\alpha) + \sum_{n=l}^{\infty} \bar{L}_n(\lambda; \bar{x}_\alpha) = 0. \quad (11)$$

Здесь компоненты первого вектора

$$\bar{L}_1(\lambda; \bar{x}_\alpha) = \left[-\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_{\alpha_k}(\lambda) + \int_{a_i}^{b_i} \sum_{k=1}^n \int_0^t a_k(\tau, \lambda) d\tau dt x_{\alpha_k}(\lambda) \right]_{i,k=1}^n$$

суть линейные формы компонент вектора x_α из $\mathbb{R}^n$. В системе (11) компоненты векторов $\bar{L}_n(\lambda; \bar{x}_\alpha)$ — n -степенные формы $\bar{x}_\alpha$ тоже зависят от λ .

Введем матрицу

$$B(\lambda) = \left[-\delta_{ik} + \int_{a_i}^{b_i} \int_0^t a_k(\tau, \lambda) d\tau dt \right]_{i,k=1}^n$$

На основании теоремы о неявных функциях точка бифуркации λ_0 должна удовлетворять условию $\det B(\lambda_0) = 0$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы точка λ_0 могла быть точкой бифуркации задачи Коши (8), необходимо выполнение равенства $\det B(\lambda_0) = 0$.

При получении достаточных условий бифуркации решений задачи Коши (8) в точке λ_0 сначала рассмотрим случай скалярного параметра λ .

Теорема 4. Пусть в системе (11) выполнены условия $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\det B(\lambda_0 + \mu) \sim c\mu^p$ при $\mu \rightarrow 0$, $c \neq 0$. Если при этом p нечетно, то λ — точка бифуркации задачи Коши (8).

Доказательство. Рассмотрим векторное поле

$$\bar{\Phi}_\mu(\bar{x}_\alpha) = \left\{ \bar{L}_1(\lambda_0 + \mu, \bar{x}_\alpha) + \sum_{i=l}^{\infty} \bar{L}_i(\lambda_0 + \mu, \bar{x}_\alpha) \right\},$$

соответствующее системе (11) на сфере

$$S = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^n x_{\alpha_i}^2 = \rho \right\}.$$

Вместо сферы S можем брать произвольную достаточно гладкую замкнутую поверхность в $\mathbb{R}^n$, содержащую нуль.

Далее, ρ и μ положительные и достаточно малы: $0 < \rho < \varepsilon$, $|\mu| < \delta$. Положим $\mu = (2t - 1)\delta_1$, где $\delta_1 \in (0, \delta)$, $t \in [0, 1]$. Введем непрерывное отображение

$$\Phi : S \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(\bar{x}_\alpha, t) = \bar{L}_1(\lambda_0 + (2t - 1)\delta_1, \bar{x}_\alpha) + \sum_{i=2}^{\infty} \bar{L}_i(\lambda_0 + (2t - 1)\delta_1, \bar{x}_\alpha).$$

Предположим, что $\Phi(\bar{x}_\alpha, t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, $\bar{x}_\alpha \in S$. Таким образом, мы допустили, что λ_0 не является точкой бифуркации. Тогда определено вращение $\mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, t), S)$. При этом по определению $\Phi(\bar{x}_\alpha, t)$ непрерывно, а вращение — целое число. Следовательно,

$$\mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, 0), S) = \mathfrak{I}(\Phi(\bar{x}_\alpha, 1), S).$$

Но тогда $\operatorname{sgn}(-1)^p = \operatorname{sgn}(+1)^p$, где p — нечетное. Следовательно, сделанное выше предположение не верно, и найдутся вектор $\bar{x}_\alpha^*$ в S и точка t^* в интервале $[0, 1]$, удовлетворяющие системе $\Phi(\bar{x}_\alpha, t) = 0$. Теорема 4 доказана. $\square$

Если $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ в задаче Коши (8), то справедливо следующее усиление теоремы 4.

Теорема 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$ в системе (11) и пусть векторы $\bar{\lambda}_0, \bar{a}$ в $\mathbb{R}^n$ выбраны так, что

$$\det B(\bar{\lambda}_0 + \bar{a}\mu) \sim c\mu^p \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad c \neq 0.$$

Если p нечетно, то $\bar{\lambda}_0$ — точка бифуркации задачи Коши (8).

Доказательство очевидное и повторяет этапы доказательства теоремы 4.

5. Заключение. Теоремы 4, 5 являются топологическими теоремами существования. Они не дают алгоритмов построения нетривиальных решений. Нетривиальных вещественных решений в окрестности точки бифуркации задачи (8) может быть несколько. Более того, могут существовать ветви, зависящие от свободных параметров. В случае одного уравнения разветвления это показано в теоремах 1, 2. Используя многогранник Ньютона и приемы степенной геометрии (см. [1]), можно строить асимптотики решений при $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Униформизация ветвей решений системы (11) может быть явной и неявной (см. [5]), когда за параметр униформизации выбирается один из линейных функционалов x_{α_i} , $i = 1, \dots, n$. Система разветвлений (11) с векторным параметром λ может иметь кривые и поверхности бифуркации. Тогда задача построения приближенных методов и анализ существенно усложняется (см. монографию [9]) и требуют отдельного рассмотрения. Обзор результатов в теории бифуркации операторов Фредгольма приведен в статье [8], при этом особое внимание уделяется взаимосвязи теории бифуркации, алгебраической геометрии и теории Галуа. Подробно вопросы теории ветвления и бифуркаций, теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории некорректных задач рассмотрены в монографии [4]. Приведен обзор результатов теории ветвления с помощью геометрических методов (показатель Кронекера—Пуанкаре, степенная геометрия, диаграммы Ньютона), алгебраических методов (цепочки Жордана), вариационных методов (условные точки экстремума для непрерывных функций и показатель Морса—Конли), а также теоретико-групповых свойств и проективно-итерационных методов и теории сплетаемых уравнений разветвления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — Наука, 1998.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
3. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 2003.
5. Сидоров Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Мат. сб. — 1995. — 185. — С. 129–141.
6. Сидоров Н. А., Дрегла Сидоров Л. Р. Д. О решении интегральных уравнений Гаммерштейна с нагрузками и бифуркационными параметрами // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — 43. — С. 78–90.

7. Сидоров Н. А., Дрегля Сидоров Л. Р. Д. Задача Коши с параметром, возмущенная линейным функционалом// Мат. 6 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2024) (16–20 сентября 2024 г., Иркутск,). — Иркутск, 2024. — С. 26–28.
8. Gomez J. L., Sampedro J. C. Bifurcation theory for Fredholm operators// J. Differ. Equations. — 2024. — 404. — P. 182–250.
9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Springer, 2002.
10. Sidorov N., Sidorov D., Sinitsyn A. Toward General Theory of Differential-Operator and Kinetic Models. — Singapore: World Scientific Series, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00161).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Дрегля Сидоров Лев Раян Денисович (Dreglea Sidorov Lev Ryan Denisovich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: lev-raian.dreglia-sidorov@math.msu.ru

Сидоров Николай Александрович (Sidorov Nikolai Aleksandrovich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia
E-mail: sidorovisu@gmail.com