ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 44–52
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-44-52

УДК 519.1, 519.2

КОМБИНАТОРНАЯ СХЕМА СЛУЧАЙНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКИ НЕСКОЛЬКИХ ТИПОВ

© 2022 г. **Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА, Р. Р. ГИЛЬМАНШИН**

Аннотация. С помощью A-схемы последовательных испытаний рассмотрены два варианта случайного размещения частиц в ячейки r типов. В одном из этих вариантов среди ячеек каждого типа имеются помеченные. Найден явный вид распределения числа непустых ячеек в одном из вариантов, а также числа непустых помеченных ячеек — в другом, получены числовые характеристики, доказаны предельные теоремы.

Ключевые слова: случайное размещение, частица, ячейка, схема последовательных испытаний, успех, неуспех, вероятность.

COMBINATORIAL SCHEME OF RANDOM PLACEMENT OF PARTICLES INTO CELLS OF SEVERAL TYPES

© 2022 **N. A. KOLOKOLNIKOVA, R. R. GILMANSHIN**

Abstract. Based on the A-scheme of sequential trials, we examine two variants of random placement of particles in cells of r types. In one of these variants, there exist marked cells of each type. We find an explicit distribution of the number of nonempty cells in one of the variants and a distribution of the number of nonempty marked cells in the other, obtain numerical characteristics of these distributions, and prove limit theorems.

Keywords and phrases: random placement, particle, cell, scheme of sequential trials, success, failure, probability.

AMS Subject Classification: 60E05, 60C05, 60E10

1. Введение. Как известно, задачи о случайных размещениях служат моделями многих задач, возникающих в экономике, теории массового обслуживания, теории управления и т. д. Простейшая модель основана на использовании так называемой «классической задачи о дробинках» [5], в которой предполагается, что любая из размещаемых частиц (дробинок) может попасть с одинаковой вероятностью в любую ячейку (ящик). Существует немало работ, в которых рассматриваются различные обобщения «классической схемы размещения». Многие авторы (например, [1,7]) изучали различные обобщения «классической схемы», рассматривая размещения в полиномиальной схеме, размещения частиц комплектами и т. д. Один вариант зависимого размещения частиц рассмотрен в статье [6]. При решении некоторых задач удобно использовать специальные схемы последовательных испытаний (B-схема, A-схема, Ф-схема и др.). Применение этих схем позволяет записывать в явном виде распределение изучаемой случайной величины, находить характеристики и исследовать асимптотическое поведение распределения. Покажем это, используя так называемую A-схему последовательных испытаний. В данной работе предполагается, что размещение частиц производится в ячейки r типов. Изучение распределения числа непустых (и пустых) ячеек было начато в работе [4] ($r = 2$). В настоящей статье, кроме того, рассматривается вариант размещения частиц при наличии помеченных ячеек. Находится явный вид распределения числа непустых (и пустых) ячеек. Для получения предельных распределений применяются результаты, полученные для так называемых Ф-распределений в работе [3].

2. Специальные комбинаторные схемы. Следуя [2, 3], опишем некоторые комбинаторные схемы.

2.1. A-схема последовательных испытаний. Предположим, что проводятся испытания типа «успех-неуспех», и после каждого успеха вероятность следующего успеха (а значит, и неуспеха) может меняться. После неуспеха изменения вероятностей не происходит. Такая схема называется A-схемой последовательных испытаний.

Пусть ξ_n — число успехов в n испытаниях, проводимых в условиях A-схемы, p_i — вероятность $(i+1)$-го успеха, т.е.

$$p_i = P\{\xi_{n+1} = i+1 \mid \xi_n = i\}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Положим

$$q_i = P\{\xi_{n+1} = i \mid \xi_n = i\} = 1 - p_i.$$

Теорема 1. *Если последовательные испытания проводятся в условиях A-схемы, то*

$$\begin{aligned} &P\{\xi_n = 0\} = A_0^n, \\ &P\{\xi_n = k\} = A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A_k^n — обобщенные числа Стирлинга второго рода, построенные на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$. Эти числа могут быть определены рекуррентным соотношением

$$A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + q_k A_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Кроме того, полагаем

$$A_n^n = 1, \ n = \overline{0, \infty}, \quad A_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Укажем одно свойство обобщенных чисел Стирлинга. Пусть числа A_k^n построены на базе $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$, а числа $\overline{A_k^n}$ — на базе $\{cq_i\}_{i=0}^{\infty}$, где $c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\overline{A_k^n} = c^{n-k} A_k^n. \tag{2}$$

2.2. Ф-схема последовательных испытаний. Проводятся испытания типа «успех-неуспех». Как и ранее, обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$\begin{gathered} p_{ni} = P\{\xi_n = i+1 \mid \xi_{n-1} = i\} = 1 - P\{\xi_n = i \mid \xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1}(C - i), \\ i = \overline{(0, \min{(C, n-1)}}, \quad n = (1, \infty). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь C — некоторое большое натуральное число (которое в дальнейшем можем устремлять к бесконечности), α_{n-1} $(n = \overline{1, \infty})$ — вообще говоря, произвольные положительные числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant \alpha_{n-1}(C - i) \leqslant 1$ при каждом i. Тогда распределение величины ξ_n имеет вид (см. [3])

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i (C)_k, \quad k = \overline{0, \min{(C, n)}}, \quad n = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

где

$$(C)_0 = 1, \quad (C)_k = \prod_{j=0}^{n-1} (C - j), \ k \geqslant 1$$

Φ_k^n — комбинаторные числа, которые могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - C + k\right) \Phi_k^{n-1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n = \overline{1, \infty},$$

причем

$$\Phi_n^n = 1, \ n = \overline{0, \infty}, \quad \Phi_k^n = 0, \text{ если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Замечание 1. Если $\alpha_{n-1} = \alpha$ при всех n, то распределение (4) можно рассматривать как частный случай распределения (1).

Укажем некоторые результаты, полученные для Ф-распределений вида (4) и приведенные в [3].

Лемма 1. *При любых натуральных C, n все m корней многочлена*

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} P\{\xi_n = k\} x^k,$$

где $m = \min(C, n)$, действительны и неположительны.

Отсюда следует, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов.

При любом натуральном n для математического ожидания $E\xi_n$ и дисперсии $D\xi_n$ справедливы равенства:

$$E\xi_n = C\left(1 - \prod_{i=0}^{n-1}(1 - \alpha_i)\right), \tag{5}$$

$$D\xi_n = C(C-1)\prod_{i=0}^{n-1}(1 - 2\alpha_i) + C\prod_{i=0}^{n-1}(1 - \alpha_i) - C^2\prod_{i=0}^{n-1}(1 - \alpha_i)^2. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$x_{nk} = \frac{k - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}}.$$

Теорема 2. *Найдется такая абсолютная константа $0 < d < \infty$, что*

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant \min(C,n)} \left| \sqrt{D\xi_n} P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \right| < \frac{d}{\sqrt{D\xi_n}}. \tag{7}$$

Следствие 1. *Для того чтобы при $C, n \to \infty$ равномерно относительно k $(k = 0, 1, \ldots)$ имело место соотношение*

$$\sqrt{D\xi_n} P\{\xi_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \to 0, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

Следствие 2. *Для того чтобы при $C, n \to \infty$ равномерно по x $(-\infty < x < \infty)$ имело место соотношение*

$$P\left\{\frac{\xi_n - E\xi_n}{\sqrt{D\xi_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $D\xi_n \to \infty$.

3. Размещение частиц в r совокупностей ячеек. Число непустых ячеек. Предположим, что имеется N ячеек, которые могут быть представлены в виде r непересекающихся совокупностей соответственно объема $N_1, N_2, \ldots, N_r$ (очевидно, что $N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N$). В этих ячейках случайным образом размещаются n частиц. Каждая из размещаемых частиц с вероятностью a_i попадает в i-ю совокупность ячеек,

$$i = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Попав в какую-либо совокупность ячеек, частица с одинаковой вероятностью может оказаться в любой ячейке этой совокупности (т. е. попадание в каждую ячейку первой совокупности возможно с вероятностью $1/N_1$, в любую ячейку второй совокупности — $1/N_2$ и т. д.).

Пусть ξ_n — общее число непустых ячеек после размещения n частиц, $\mu_0 = \mu_0(N,n)$ — число ячеек, оставшихся пустыми.

Не умаляя общности, можем считать, что частицы последовательно «бросаются» в совокупность из N ячеек. Под успехом будем понимать попадание очередной частицы в пустую ячейку, под неуспехом — попадание в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Пусть p_k — вероятность $(k+1)$-го успеха, $k = 0, 1, \ldots$ Очевидно, что

$$p_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Вероятность второго успеха находится следующим образом:

$$p_1 = a_1^2 \frac{N_1 - 1}{N_1} + a_1 \sum_{j=2}^{r} a_j \frac{N_1}{N_1} + a_2^2 \frac{N_2 - 1}{N_2} + a_2 \sum_{j=1, j\neq 2}^{r} a_j \frac{N_2}{N_2} + \ldots + \\ + a_r^2 \frac{N_r - 1}{N_r} + a_r \sum_{j=1}^{r-1} a_j \frac{N_r}{N_r} = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} = 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Продолжая процесс нахождения вероятностей p_k, предполагая, что

$$k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i,$$

получим

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_i^{k-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j \frac{N_i - (k-j)}{N_i} = \\ = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_i^{k-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \sum_{j=0}^{k} \binom{k-1}{j} a_i^{k-1-j} \left(\sum_{m=1, m\neq i}^{r} a_m \right)^j = \\ = \sum_{i=1}^{r} a_i \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^k - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^{k-1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1,$$

то

$$p_k = 1 - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}. \tag{10}$$

Поскольку вероятности успехов меняются после каждого успеха, то находимся в условиях A-схемы последовательных испытаний, и распределение числа непустых ячеек — это распределение числа успехов в n испытаниях, которое определяется формулой (1). В данном случае базовые элементы, из которых строятся числа A_k^n, имеют вид

$$q_k = k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}, \quad k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i.$$

Введем обозначение

$$S = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i};$$

тогда

$$p_k = 1 - kS, \quad q_k = kS, \quad k \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i. \tag{11}$$

Это значит, что в силу формулы (2), имеет место равенство $A_k^n = S^{n-k} a_k^n$: если база для построения обобщенных чисел Стирлинга второго рода имеет вид $\{q_i\}_{i=0}^{\infty} = \{i\}_{i=0}^{\infty}$, то эти числа становятся числами Стирлинга второго рода a_k^n. Итак,

$$P\{\xi_n = k\} = S^{n-k} a_k^n \prod_{i=0}^{k-1} (1 - iS), \quad k = \overline{1,n}, \quad n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i. \tag{12}$$

Поскольку

$$\mu_0 = \mu_0(N, n) = N - \xi_n,$$

то согласно формуле (12)

$$P\{\mu_0(N,n) = k\} = S^{n-N+k} a_{N-k}^n \prod_{i=0}^{N-k-1} (1 - iS).$$

Данное распределение, как и предыдущее, имеет место, если

$$n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} N_i.$$

Замечание 2. Если существуют такие N_i, что $n > N_i$, то формулы для нахождения вероятностей p_k при $k > N_i$ становятся очень громоздкими. Приведем их для случая, когда имеется лишь два типа ячеек, т. е. $r = 2$.

1. Пусть $N_1 < n \leqslant N_2$. Тогда при $i \leqslant N_1$ вероятности p_i имеют вид (10), а при $i > N_1$

$$p_i = 1 - i\left(\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2}\right) - \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{i-N_1} \binom{i}{j} a_1^{i+1-j} a_2^j (N_1 - i + j) - \frac{1}{N_2} \sum_{j=0}^{i-N_1-1} \binom{i}{j} a_1^{i-j} a_2^{j+1} (N_2 - j).$$

2. Если $n > \min(N_1, N_2)$, то при $i > \min(N_1, N_2)$ вероятности p_i удобнее вычислять по общей формуле

$$p_i = \sum_{j=\max(0, i-N_1)}^{\min(i, N_2)} \binom{i}{j} a_1^{i-j+1} a_2^j \frac{N_1 - (i-j)}{N_1} + \sum_{j=\max(0, i-N_2)}^{\min(i, N_1)} \binom{i}{j} a_2^{i-j+1} a_1^j \frac{N_2 - (i-j)}{N_1}.$$

4. Размещение частиц в r совокупностей ячеек при наличии помеченных ячеек. Как и в рассмотренном выше случае, полагаем, что имеется r непересекающихся совокупностей ячеек соответственно объема $N_1, N_2, \ldots, N_r$ $(N_1 + N_2 + \ldots + N_r = N)$. При этом в каждой совокупности некоторые ячейки являются помеченными. Количество помеченных ячеек равно соответственно $M_1, M_2, \ldots, M_r$. Как и ранее, в N ячейках случайным образом размещаются n частиц. Каждая из размещаемых частиц с вероятностью a_i попадает в i-ю совокупность ячеек, $i = \overline{1,r}$,

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1.$$

Попав в какую-либо совокупность ячеек, частица с одинаковой вероятностью может оказаться в любой ячейке этой совокупности.

Пусть η_n — общее число непустых ячеек среди помеченных после размещения n частиц. Предположим, что

$$n \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i.$$

Для нахождения явного вида распределения величины η_n будем, как и ранее, считать, что частицы последовательно «бросаются» в совокупность из N ячеек. Под успехом понимаем попадание очередной частицы в пустую помеченную ячейку, под неуспехом — попадание в любую другую ячейку (или непомеченную или помеченную ячейку, в которой уже находится по меньшей мере одна частица). Пусть p_k — вероятность $(k+1)$-го успеха, $k = 0, 1, \ldots$ Нетрудно убедиться, что

$$p_0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i}, \quad p_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Продолжая процесс нахождения вероятностей p_k, предполагая, что

$$k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i,$$

получим

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^k - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i} \left(\sum_{m=1}^{r} a_m \right)^{k-1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1,$$

то

$$p_k = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i} - k \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Введем обозначения:

$$U = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{M_i}{N_i}, \quad S = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2}{N_i}.$$

Тогда $p_k = U - kS$,

$$k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i.$$

Поскольку вероятности успехов меняются после каждого успеха (находимся в условиях A-схемы), то распределение числа непустых помеченных ячеек — это распределение числа успехов в n испытаниях, определяемое формулами (1):

$$P\{\eta_n = 0\} = A_0^n$$

$$P\{\eta_n = k\} = A_k^n \prod_{i=0}^{k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i}.$$

В данном случае базовые элементы, из которых строятся числа A_k^n, имеют вид

$$q_k = 1 - U + kS, \quad k \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i.$$

Число пустых помеченных ячеек после размещения n частиц $\mu_0 = \mu_0(M, n) = M - \eta_n$, где $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_r$, имеет распределение

$$P\{\mu_0 = k\} = A_{M-k}^n \prod_{i=0}^{M-k-1} p_i, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = \overline{1, \min_{1 \leqslant i \leqslant r} M_i}.$$

5. Числовые характеристики. Математическое ожидание и дисперсия величины ξ_n в соответствии с формулами (5) и (6) запишутся в виде

$$E\xi_n = \frac{1}{S}(1 - (1 - S)^n);$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{S} - 1\right)(1 - 2S)^n + \frac{1}{S}(1 - S)^n - \frac{1}{S^2}(1 - S)^{2n}.$$

При этом

$$E\mu_0(N, n) = N - \frac{1}{S}(1 - (1 - S)^n); \quad D\mu_0(N, n) = D\xi_n.$$

В частном случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 1/r$, $N_1 = N_2 = \ldots = N_r = N/r$, получим известные результаты для числа пустых ячеек [5].

Пусть $N, n \to \infty$. Тогда для получим асимптотическое представление

$$E\xi_n = \frac{1}{S}(1 - e^{-nS}(1 - (nS^2)/2))(1 + o(1)); \tag{13}$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S} e^{-nS}(1 - e^{-nS}(nS + 1))(1 + o(1)). \tag{14}$$

Для случайной величины η_n (числа непустых помеченных ячеек) имеем:

$$E\eta_n = \frac{U}{S}(1-(1-S)^n);$$
$$D\eta_n = \frac{U}{S}\left(\frac{U}{S}-1\right)(1-2S)^n + \frac{U}{S}(1-S)^n - \frac{U^2}{S^2}(1-S)^{2n}.$$

При $N, n \to \infty$ получаем для $E\eta_n$ и $D\eta_n$ результаты, мало отличающиеся от (13) и (14) соответственно:

$$E\eta_n = \frac{U}{S}\left(1-e^{-nS}\left(1-\frac{nS^2}{2}\right)\right)(1+o(1));$$
$$D\eta_n = \frac{U}{S}e^{-nS}(1-e^{-nS}(UnS+1))(1+o(1)).$$

6. Предельные теоремы.

6.1. Предельные распределения величины ξ_n. Прежде всего, отметим, что имеет место утверждение теоремы 2 (оценка (7)). Поскольку

$$n \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i,$$

то, согласно (11), $p_n = 1 - nS$, $q_n = nS$. Это значит, что $0 \leqslant nS \leqslant 1$, т. е., если $n \to \infty$, то $S \to 0$. Возможны два случая:

(i) $nS \to \text{const} < 1$,
(ii) $nS \to 0$.

Случай $nS \to \delta$, $0 < \delta < 1$.

Теорема 3. *Пусть $nS \to \delta$, $0 < \delta < 1$, если $n \to \infty$, $S \to 0$. Тогда соотношение* (8) *выполняется равномерно относительно k ($k = 0, 1, \ldots$).*

Доказательство. Используя формулу (14) и условия теоремы, устанавливаем, что $D\xi_n \to \infty$. Это значит, что справедливо следствие 1 теоремы 2. Таким образом, имеет место сходимость (8). При этом $E\xi_n$ и $D\xi_n$ находятся соответственно по формулам (13) и (14). □

На основании следствия 2 теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $nS \to \delta$, $0 < \delta < 1$, если $n \to \infty$, $S \to 0$. Тогда сходимость* (9) *является равномерной относительно по x $(-\infty < x < \infty)$.*

Случай $nS \to 0$. Если $nS \to 0$, то из формул (13) и (14) могут быть получены более удобные асимптотические представления:

$$E\xi_n = \frac{1}{S}\left(nS - \frac{n^2S^2}{2} + \frac{nS^2}{2} + \frac{n^3S^3}{6} + o(n^3S^3)\right) = n - \frac{n^2S^2}{2} + \frac{nS}{2} + \frac{n^3S^2}{6} + o(n^3S^2), \tag{15}$$

$$D\xi_n = \frac{1}{S}\left(\frac{n^2S^2}{2} - \frac{nS^2}{2} - \frac{5n^3S^3}{6} + o(n^3S^3)\right) = \frac{n^2S}{2} - \frac{nS}{2} - \frac{5n^3S^2}{6} + o(n^3S^2) \tag{16}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{n^2}{S} \to \lambda < \infty,$$

т.е. дисперсия остается ограниченной при $nS \to 0$. Пусть

$$p_\lambda(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|P\{\xi = k\} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$

— расстояние по вариации между распределением величины ξ и распределением Пуассона с параметром λ. Известно, что представление случайной величины ξ в виде суммы независимых случайных индикаторов дает возможность оценить $p_\lambda(\xi)$ следующим образом:

$$p_\lambda(\xi) \leqslant E\xi - D\xi.$$

Тогда, используя формулы (15) и (16), получим

$$p_\lambda(n-\xi_n) \leqslant \frac{2n^3S^2}{3} + o(n^3S^2),$$

т.е.

$$p_\lambda(n-\xi_n) = O(n^3S^2) = o(1).$$

Это означает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если при $n \to \infty$, $S \to 0$ выполнено условие*

$$\frac{n^2S}{2} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = n-k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0$$

или

$$P\{\mu_0(N,n) = N-n+k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0.$$

На основании следствий теоремы 2 заключаем следующее.

Теорема 6. *Пусть $n, N \to \infty$, причем*

$$n \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant r} N_i,$$

и выполнено условие $n^2S \to \infty$. Тогда имеют место соотношения (8) *и* (9).

6.2. Предельные распределения величины η_n. Приведём некоторые предельные теоремы для распределения величины η_n. Обозначим

$$x_{nk} = \frac{k - E\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}}.$$

Теорема 7. *Пусть $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to \gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Тогда при $nS \to \delta$ $(0 < \delta < 1)$ равномерно относительно k $(k = 0, 1, \dots)$ имеет место соотношение*

$$\sqrt{D\eta_n}P\{\eta_n = k\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_{nk}^2/2} \to 0.$$

Теорема 8. *Пусть $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to \gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Тогда при $nS \to \delta$ $(0 < \delta < 1)$ равномерно по x $(-\infty < x < \infty)$ имеет место сходимость*

$$P\left\{\frac{\eta_n - E\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Рассмотрим случай, когда $U \to 1$, $n^2S/2 \to \lambda < \infty$, т.е. дисперсия остается ограниченной при $nS \to 0$. Тогда

$$p_\lambda(n-\xi_n) = O(n^3S^2) = o(1).$$

Это означает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Если при $n \to \infty$, $S \to 0$, $U \to 1$ выполнено условие*

$$\frac{n^2S}{2} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\eta_n = n-k\} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \geqslant 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватутин В. А., Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами// Теор. вероят. примен. — 1982. — *27*, № 4. — С. 684–692.
2. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., О. В. Кузьмин, Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск.: Изд-во ИГУ, 1990.
3. *Колокольникова Н. А.* Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. — Деп. в ВИНИТИ РАН. — № 649В 92. — 1992. — 208 с..
4. *Колокольникова Н. А.* Случайные размещения частиц в ячейки нескольких типов// в кн.: Прикладные задачи дискретного анализа. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2019. — С. 55–63.
5. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1975.
6. *Севастьянов Б. А.* Об одной схеме зависимых размещений// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 2. — С. 37–41.
7. *Чистяков В. П.* Дискретные предельные распределения в задаче о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики// Мат. заметки. — 1967. — *1*, № 1. — С. 9–16.

Колокольникова Наталья Арсеньевна
Иркутский государственный университет
E-mail: `k_n_a_05@mail.ru`

Гильманшин Роман Ралифович
Иркутский государственный университет
E-mail: `m944@mail.ru`