ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 21–29
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-21-29

УДК 519.1

КОМБИНАТОРНЫЕ ПОЛИНОМЫ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

© 2022 г. **А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН**

Аннотация. В работе перечислительные свойства комбинаторных полиномов композиций, обобщающих B-полиномы, использованы для обобщенного перечисления множества деревьев.

Ключевые слова: комбинаторный полином, дерево, перечисление деревьев.

COMBINATORIAL POLYNOMIALS AND ENUMERATION OF TREES

© 2022 **A. A. BALAGURA, O. V. KUZMIN**

Abstract. In this paper, enumeration properties of combinatorial composition polynomials that generalize B-polynomials are used for the generalized enumeration of the set of trees.

Keywords and phrases: combinatorial polynomial, tree, enumeration of trees.

AMS Subject Classification: 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

1. Введение. Сегодня вопросы перечисления деревьев занимают значимую часть в задачах перечислительной комбинаторике. Деревья являются достаточно универсальными математическими объектами и многие задачи могут быть выражены в терминах перечисления деревьев по различным параметрам. Деревья играют важную роль в современных подходах анализа данных. Задание весовой функции на множестве ребер или вершин дерева позволяет строить различные вероятностные модели и применять их в задачах принятия решения. В анализе данных, в частности, деревья используются при построении алгоритмов кластеризации. В программировании деревья используют для построения алгоритмов различных обходов графов, находящих применение в построении моделей логистики, анализе социальных сетей и пр. Деревья применяют в качестве модели описания структур данных в теории информационных систем, в задачах разбиения и классификации, в теории кодирования для построения оптимальных кодов, в биологических задачах, относящихся к деревьям эволюции, в генетике и пр.

В настоящее время сформировано множество подходов к перечислению деревьев. Подробный обзор подходов и результатов содержится в [2, 3, 12]. Кроме классических методов, используется модифицированные методы производящих функций [2, 4] экспоненциальные структуры [12], перечисление с помощью полиномов [1] и др. [6, 8, 9]. Данная работа посвящена перечислению изучаемого подмножества деревьев с помощью комбинаторных полиномов разбиений и композиций. Рассматриваемые в настоящей статье деревья, в которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух преемников, встречаются в работах многих математиков, в том числе Р. Стенли [12], О. В. Кузьмин [2]. В п. 2 вводятся основные понятия и определения. В п. 3 приводятся результаты авторов [1] перечисления множества деревьев с помошью B- и P-полиномов. В п. 4 построены алгоритмы кодирования и декодирования плоских деревьев [3]. Результаты и подходы п. 3 и 4 используются в п. 5 для перечисления с весами множества деревьев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области проекта № 20-41-385001).

2. Основные понятия. Нам понадобятся следующие определения и обозначения (см., например [3]).

Кортежем длины n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $(i_1, \ldots, i_n)$. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Введем обозначение

$$I(a_1, \ldots, a_n) = \Big\{(i_1, \ldots, i_n) \;\Big|\; i_j \leqslant a_j,\ i_j \leqslant i_{j+1},\ 1 \leqslant j \leqslant n\Big\};$$

множество I назовем множеством *неубывающих кортежей.* Положим $X(a_1, \ldots, a_n) = |I(a_1, \ldots, a_n)|$. Формулы вычисления мощности этого множества получены в [3].

Разбиением натурального числа n называется набор натуральных чисел в сумме составляющих n, причем порядок слагаемых не важен. Если

$$n = \sum_{i=1}^{n} i r_i,$$

то последовательность $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ называется *типом разбиения* (см. [12]).

Композицией натурального числа n на k натуральных слагаемых называется набор натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, в сумме составляющих n, причем порядок слагаемых важен (см. [2]). Далее в данной работе договоримся считать, что слагаемые, равные 1, не влияют на порядок слагаемых в композиции.

Нам понадобятся комбинаторные полиномы разбиений. Пусть $g = (g_1, g_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — последовательности формальных переменных.

Известен явный вид А- и В-полиномов (см., например, [2]):

$$A_{nk}(g) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i} \big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}, \quad n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведется по всем разбиения натурального n на k натуральных слагаемых, т.е. по всем таким наборам $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} r_i = k, \qquad \sum_{i=1}^{n-k+1} i r_i = n,$$

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k} \big[(k-1)!\, g_1^{2n-k}\big]^{-1} \sum_{2n-2k,n-k} (-1)^{r_1}\, r_1!\,(2n-k-r_1-1)! \times \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} \big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1},$$

$n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Дополнительно полагают $A_{n,n}(g) = g_1^n$, $B_{n,n}(g) = g_1^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим важные обобщения А- и В-полиномов: полиномы, построенные по двум последовательностям разбиений — полиномы Тушара (или Т-полиномы) и Р-полиномы (см. [7], а также [5, 10, 11]). Известен явный вид Т- и Р-полиномов (см., например, [2]):

$$T_{nk}(x, y) = n! \sum_{n \rhd k} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}\, y_i^{r_i} \big[k_i!\, r_i!\,(i!)^{k_i + r_i}\big]^{-1}, \quad n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

где суммирование ведется по всем таким наборам целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k, \quad \sum_{i=1}^{n} i(k_i + r_i) = n.$$

Дополнительно полагают $T_{00}(x, y) = 1$. Эти полиномы изучаются также в [10].

Р-полиномы имеют вид (см. [7])

$$P_{nk}(x,y) = (-1)^{n-k}\big[k!\,x_1^{2n-k}\big]^{-1} \sum_{2n-2k \triangleright n-k} (-1)^{k_1+\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} k_1!\,(2n-k-k_1-1)! \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} ir_i + k\Big) x_i^{k_i}\, y_i^{r_i}\,\big[k_i!\,r_i!\,(i!)^{k_i+r_i}\big]^{-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Дополнительно полагают $P_{nn}(x,y) = x_1{}^{-n}$, $n \geqslant 1$.

Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево d — это такое множество вершин, что одна специально выбранная вершина называется *корнем* дерева d, оставшиеся вершины (исключая корень) разбиты на $m \geqslant 0$ непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом (см. [2]). Вершины, не имеющие преемников, называются *концевыми вершинами.* Вершины, имеющие преемников, называют *внутренними вершинами.* В настоящей работе там, где это специально оговорено, рассматриваются плоские деревья (см. [12]), т.е. поддеревья в любой вершине линейно упорядочены.

Пусть $n \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим $D(n,k)$ — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин. Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами $1, 2, \ldots, n$. Повторяем следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными [12]. Пометим числом $n+1$ такую вершину v, что

(i) вершина v не помечена, а все ее преемники помечены и
(ii) среди всех непомеченных вершин, все преемники которых помечены, v является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой.

Полученное дерево называется *помеченным.*

Обозначим через $\bar{D}(n,k)$ множество непомеченных плоских корневых деревьев, имеющих в точности n концевых вершин и k преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин. Обозначим через $\bar{D}(n,k,r_1,\ldots,r_n)$ множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$, имеющих в точности r_i вершин степени i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Будем придерживаться введенных в [1] обозначений: $v(n,k)$ — количество вершин в дереве d, не считая корень, $w(n,k)$ — количество внутренних вершин в дереве d, не считая корень, $\mathbf{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

3. Плоские деревья. Остановимся на перечислении множества плоских деревьев. Результаты этого пункта имеют как самостоятельное значение, так и применяются далее в п. 5. В рамках рассматриваемого подхода приводятся результаты перечисления подмножества непомеченных корневых плоских деревьев (см. [3]). Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев. Предложенные алгоритмы позволили доказать существование взаимно однозначного соответствия между изучаемым множеством деревьев и множеством неубывающих кортежей.

Поскольку в рассматриваемых деревьях важен порядок внутренних вершин, чтобы его зафиксировать будем придерживаться известного способа обхода дерева по правилу 1.

Правило 1. Будем обходить дерево в соответствии с df-порядком (см. [12]), т.е. в глубину, начиная от корня, совершая обход слева направо.

Назовем типом дерева $d \in \bar{D}(n,k)$ последовательность $(n_1, n_2, \ldots, n_{w(n,k)})$ степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева по правилу 1. Обозначим через $\tilde{D}(n,k,n_1,n_2,\ldots,n_{w(n,k)})$ множество деревьев $d \in \bar{D}(n,k)$ типа $(n_1, n_2, \ldots, n_{w(n,k)})$.

Опишем способ кодирования деревьев неубывающими кортежами.

Алгоритм 1 (кодирования дерева).
Вход алгоритма: диаграмма дерева $d \in \bar{D}(n,k)$.
Выход алгоритма: код дерева $a_1, \ldots, a_{w(n,k)}$.

Обходим дерево по правилу 1, пусть $v_1, \ldots, v_{w(n,k)}$ — последовательность обхода его внутренних вершин (за исключением корня). Для всех внутренних вершин v_i, $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, выполняем подсчет числа $c(v_i)$ концевых вершин, пройденных до внутренней вершины v_i, и кодируем вершину v_i: $a_i \coloneqq c(v_i) + 1$.

Отметим, что из алгоритма 1 следует, что код дерева является неубывающим кортежем длины $w(n,k)$.

Для описания алгоритма декодирования зададим дерево в виде графа $T = \langle V, R\rangle$, где V — множество вершин, R — множество ребер. Множество V считаем упорядоченным в соответствии с порядком обхода вершин дерева по правилу 1.

Алгоритм 2 (декодирования дерева)**.**

Вход алгоритма: код дерева $a_1, \ldots, a_{w(n,k)}$, тип дерева $(n_1, \ldots, n_{w(n,k)})$.

Выход алгоритма: дерево $T \in \bar{D}(n,k)$, $T = \langle V, R\rangle$.

Пусть $V = \{v_0\}$, R — пустое множество. Строим все k преемников корня: добавляем вершины $v_1, \ldots, v_k$ в V, ребра $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_k)$ в R.

Для $1 \leqslant i \leqslant w(n,k)$, обходя по правилу 1 построенное дерево, отсчитываем a_i концевых вершин, строим n_i преемников у a_i-й вершины: добавляем элементы $v_{k+(n_1+\ldots+n_{i-1})+1}, \ldots, v_{k+(n_1+\ldots+n_i)+1}$ после a_i-й вершины в V, переобозначаем a_i-ю вершину символом w_{a_i}, добавляем элементы $(w_{a_i}, v_{k+(n_1+\ldots+n_{i-1})+1}), \ldots, (w_{a_i}, v_{k+(n_1+\ldots+n_i)+1})$ в R.

Введем обозначение для множества всех возможных значений i-й метки деревьев из рассматриваемого множества:

$$A_i = \Big\{a_i :\ d \in \bar{D}(n,k,n_1,n_2,\ldots,n_{w(n,k)})\Big\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant w(n,k).$$

Далее для идентификации принадлежности типов деревьев (и соответственно композиций) к которым относятся множества меток внутренних вершин будут введены дополнительные индексы.

Пусть $1 \leqslant i \leqslant n-k-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-k-i$. Введем следующие обозначения: если

$${}^i n^j = \big({}^i n_1^j,\ {}^i n_2^j,\ \ldots,\ {}^i n_{n-k}^j\big)$$

— некоторая композиция, то ${}^i A_1^j,\ \ldots,\ {}^i A_{n-k}^j$ — множества меток деревьев типа $\big({}^i n_1^j, {}^i n_2^j, \ldots, {}^i n_{n-k}^j\big)$, где ${}^i A_t^j$ — множество возможных меток t-й вершины дерева, $1 \leqslant t \leqslant n-k$.

Опишем алгоритм построения кодов деревьев всего множества $\bar{D}(n,k)$, который позволяет построить все множество деревьв (по кодам по алгоритму 2) и свести задачу о подсчете мощности множества $\bar{D}(n,k)$ к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей.

Алгоритм 3 (кодирование множества $\bar{D}(n,k)$)**.**

Вход алгоритма: n, k.

Выход алгоритма: все типы ${}^i n^j$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, $0 \leqslant j \leqslant n-k-i$ деревьев из множества $\bar{D}(n,k)$, множества меток ${}^i A_1^j,\ {}^i A_2^j,\ \ldots,\ {}^i A_{n-k-i}^j$.

Пусть ${}^0 n_1^0 = \ldots = {}^0 n_{n-k}^0 = 2$, ${}^0 A_p^0 = \{1, \ldots, k+p-1\}$, $1 \leqslant p \leqslant n-k$. Для i от 1 до $(n-k-1)$

$${}^i n_1^0 = \ldots = {}^i n_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^i n_{n-k-i}^0 = i+2, \quad {}^i n_{n-k-i+1}^0 = \ldots = {}^i n_{n-k}^0 = 1,$$

$${}^i A_1^0 = \{1,2,\ldots,k\}, \quad {}^i A_2^0 = \{1,2,\ldots,k+1\},\ \ldots,\ {}^i A_{n-k-i}^0 = \{1,2,\ldots,n-i-1\}.$$

Выполняем алгоритм пока $n_1 \neq i+2$. Для j от 1 до $(n-k-i)$

$${}^i n_1^j \coloneqq {}^i n_1^{j-1}, \quad \ldots, \quad {}^i n_{n-k-i-j-1}^j \coloneqq {}^i n_{n-k-i-j-1}^{j-1},$$

$${}^i n_{n-k-i-j}^j \coloneqq {}^i n_{n-k-i-j}^{j-1} + 1, \quad {}^i n_{n-k-i-j+1}^j \coloneqq {}^i n_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1,$$

$${}^i n_{n-k-i-j+2}^j \coloneqq \ldots \coloneqq {}^i n_{n-k}^j \coloneqq 1.$$

Для m от 1 до $(n-k-i)$ и $m \neq n-k-i-j+1$

$${}^i A_m^j \coloneqq {}^i A_m^{j-1}, \quad {}^i A_{n-k-i-j+1}^j \coloneqq {}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1} \cup \big\{\big|{}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1}\big| + 1\big\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $d \in \bar{D}(n,k,n_1,\ldots,n_t)$, $2 \leqslant t \leqslant n-k$, а дереву d типа $(n_1,\ldots,n_t)$ соответствует композиция $\left({}^in_1^j,\ \ldots,\ {}^in_t^j\right)$ и множества меток ${}^iA_1^j$, ${}^iA_2^j$, …, ${}^iA_t^j$, которые получены по алгоритму 1. Обозначим $a_s = \left|{}^iA_s^j\right|$, $1 \leqslant s \leqslant t$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $|\bar{D}(n,k,n_1,n_2,\ldots,n_t)| = X(a_1,\ldots,a_t)$.

4. Неплоские деревья. Приведем доказанные в [1] результаты о перечислении с весами множества неплоских деревьев. Схему доказательства теоремы **??**, приведенную в [1] будем использовать в п. 5.

Обозначим через π_n множество всех n-перестановок, π_n^k — множество перестановок $\pi \in \pi_n$, имеющих в точности k циклов. Поставим в соответствие каждому дереву $d \in D(n,k)$ перестановку $\pi(d) \in \pi_n^k$ по следующему правилу.

Правило 2. Пусть $(p_1^i,\ldots,p_j^i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$ — последовательность всех концевых вершин дерева d (записанных в порядке появления), у которых первым предком после корня является i-й преемник корня $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$ или эта вершина сама является i-м преемником корня $(j=1)$. Тогда $\pi(d) = (p_1^1,\ldots,p_{i_1}^1)\ldots(p_1^k,\ldots,p_{i_k}^k)$, где $\sum\limits_{m=1}^{k} i_m = n$.

Для $k \geqslant 2$ дерево d назовем *k-пререстановочным*, если поставленная ему в соответствие по правилу 2 перестановка $\pi(d)$ имеет в точности k циклов.

Поставим в соответствие каждому дереву $D \in D(n)$ перестановку $\pi(D) \in \pi_n$ по следующему правилу.

Правило 3. Пусть $(p_1,\ldots,p_n)$ — последовательность всех концевых вершин дерева D (записанных в порядке появления). Тогда $\pi(D) = (p_1,\ldots,p_n)$.

Перестановку $\pi(D) = (p_1,\ldots,p_n)$ назовем *перестановкой дерева D*.

Пусть $g_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. На рассматриваемом множестве деревьев введем весовые функции по следующим правилам.

Правило 4. Пусть $g_i g_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников; g_1^{-1} — вес вершины дерева, не имеющей преемников.

Правило 5. Пусть $x_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством А и имеющей i преемников; x_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством А и не имеющей преемников; $y_i x_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, обладающей свойством В и имеющей i преемников; y_1^{-1} — вес вершины дерева, обладающей свойством В и не имеющей преемников. Отметим, что если вершина обладает каким-либо свойством, то будем считать что все ее преемники обладают этим свойством.

Для $d \in D(n,k)$ считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для $D \in D(n)$ — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Для $d \in D(n,k)$ обозначим через $D_i(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$, множество всех деревьев $d \in D(n)$, у которых в точности i внутренних вершин, не считая корень и k преемников корня. Обозначим через $g(A)$ вес множества A, и через $g(a)$ — вес a, $a \in A$.

Нам понадобятся следующий известный результат (см., например, [1, 6, 7, 12]).

Предложение. *Число всех разбиений* $\mathbf{n}$ *на* k *непустых блоков равно*

$$S(n,k) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left[r_i!\,(i!)^{r_i}\right]^{-1},$$

где $S(n,k)$ *— обобщенные числа Стирлинга второго рода,* $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть весовая функция определяется правилом 3. В [1] найдена новая интерпретация В-полиномов, которую дает следующая теорема.

Теорема 2. *Для $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, суммарный вес всех различных k-перестановочных n-деревьев d равен $(-1)^{n-k} B_{n,k}(g)$. Суммарный вес всех n-деревьев D, имеющих различные перестановки, равен $(-1)^{n-1} B_{n,1}(g)$.*

Пусть весовая функция определяется правилом 4. В условиях теоремы 2, верна интерпретацию P-полиномов (см. [1]).

Следствие. *Для $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geqslant 2$, суммарный вес всех различных l-перестановочных ($l = k, k+1, \ldots, n$) n-деревьев d, у которых k преемников корня, обладает свойством A, а остальные свойством B, равен $(-1)^{n-k} P_{n,k}(g)$.*

5. Перечисление с весами плоских деревьев. Остановимся на перечислении с весами множества $D(n, k)$. Деревья этого множества помеченны и не являются плоскими. Рассмотрим все плоские деревья, получающиеся из каждого дерева $d \in D(n, k)$. Зададим вес каждого плоского дерева по правилу 6.

Правило 6. Пусть ${}^i g^i_j g_1^{-1}$, $i \geqslant 2$, — вес вершины дерева, имеющей i преемников и код j, поставленный ей в соответствие по алгоритму 1; ${}^i g_1^{-1}$ — вес i-й (при df-обходе среди концевых вершин) вершины дерева, не имеющей преемников.

Отметим, что все плоские деревья данного дерева помечены таким же образом, как исходное неплоское дерево. Поэтому в рамках нашего подхода нет смысла рассматривать помеченные плоские деревья для одного исходного дерева. Нормируем вес множества плоских деревьев построенных по исходному дереву, разделив вес этого множества деревьев на мощность множества всех деревьев, имеющих такие же степени внутренних вершин.

Пусть $d \in \bar{D}(n, k)$; считаем вес дерева d равным произведению весов всех его вершин, кроме корня. Вес дерева $d \in D(n, k)$ считаем равным сумме весов всех его плоских деревьев, деленного на $|\tilde{D}(n, k, r_1, \ldots, r_n)|$. Вес множества деревьев из $D(n, k)$ положим равным сумме весов всех составляющих его элементов. Обозначим через $W(A)$ вес множества A, через $W(a)$ — вес a, $a \in A$.

Пусть весовая функция определяется правилом 6.

Теорема 3. *Для $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geqslant 2$*

$$W(D(n,k)) = \prod_{i=1}^{n} {}^i g_1 \sum_{2n-2k;n-k} \sum_{(i_1,\ldots,i_{n-k}) \in I} \frac{(2n-k-m-1)!}{(k-1)! n_1! \ldots n_{n-k}! (n-k-m)! |\tilde{I}|} \prod_{j=1}^{n-k} \frac{{}^{i_j} g_{n_j}}{{}^{i_j} g_{n_j}}, \qquad (1)$$

где первое суммирование ведется по всем композициям натурального $2n - 2k$ на $n - k$ натуральных слагаемых, т.е. по всем таким наборам $(n_1, n_2, \ldots, n_{n-k})$ натуральных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n-k} n_i = 2n - 2k,$$

второе суммирование ведется по всем кортежам $(i_1, \ldots, i_{n-k}) \in I$, которые построены по каждой из композиций по алгоритму 3, $m = m(n_1, \ldots, n_{n-k})$ — число n_i, $1 \leqslant i \leqslant n-k$, равных 1, $\tilde{I}$ — множество кортежей $(i_1, \ldots, i_n) \in I$, построенных по всем композициям, относящимся к одному разбиению.

Доказательство. Рассмотрим множество $D(n, k)$. В [1] приведено комбинаторное доказательство формулы

$$|D(n,k)| = \sum_{2n-2k,n-k} \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \left[r_i! \, (i!)^{r_i} \right]^{-1}, \quad n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (2)$$

Поскольку правило 6 учитывает степени внутренних вершин и их порядок, комбинаторная формула перечисления деревьев должна содержать эти параметры. Выразим число разбиений **n**-множества на k блоков типа $(0, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ через композиции. Докажем, что для $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n$

искомое число разбиений равно

$$\sum_{n;k} n!\,\big[n_1!\dots n_k!\,k!\big]^{-1},$$

где суммирование ведется по всем композициям n на k слагаемых, соответствующих типу разбиения. Тогда согласно предложению, нужно доказать, что

$$\sum_{n;k} n!\big[n_1!\dots n_k!\,k!\big]^{-1} = n!\prod_{i=2}^{n-k+1}\big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $(0, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ — тип разбиения $\mathbf{n}$-множества на k блоков. Рассмотрим все композиции $(n_1, \dots n_k)$ числа n в виде суммы k слагаемых, в которых число слагаемых, равных i, равно r_i, $1 \leqslant i \leqslant n-k+1$. Согласно определению разбиения, соответствующие ему композиции будут отличаться только порядком слагаемых. Очевидно, что $n!\big[n_1!\dots n_k!\big]^{-1}$ — число способов упорядоченных разбиения n-множества на блоки длины $n_1, \dots, n_k$. Поскольку число способов упорядочить k блоков равно $k!$, мы рассматриваем неупорядоченные разбиения, просуммируем все способы разбиения $\mathbf{n}$-множества на k блоков по композициям, соответствующим зафиксированному разбиению. Тем самым доказана справедливость (3).

Теперь перепишем формулу (2) в другом виде, с учетом формулы (3), останавливаясь на перечислительном смысле каждого ее сомножителя. По определению $D(n,k)$, каждое дерево d имеет в точности n концевых вершин, k преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$\begin{gathered} w(n,k) \in \{n-k, n-k-1, \dots, 0\}, \\ w(n,k) = v(n,k) - n, \quad v(n,k) \in \{2n-k, 2n-k-1, \dots, n\}. \end{gathered}$$

Поскольку

$$D(n,k) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n,k), \quad D_i(n,k) \cap D_j(n,k) = \emptyset,\ i \neq j,$$

то

$$|D(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_i(n,k)|.$$

Рассмотрим $d \in D_{n-k-i}(n,k)$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Тогда $v(n,k) = 2n-k-i$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$. Из определения $D(n,k)$ следует, что $|D_{n-k-i}(n,k)|$ — число всех разбиений $\mathbf{2n-k-i}$ на $n-k-i+1$ блоков ($w(n)$ и корень), у которых нет блоков длины один и блок разбиения, содержащий элемент с максимальной меткой, имеет длину k. Поскольку элемент с максимальной меткой фиксирован, исключим его из рассмотрения. Рассмотрим чило всех разбиений $\mathbf{2n-k-1-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых нет блоков длины 1 и хотя бы один блок разбиения имеет длину $k-1$. Для блока длины $k-1$ существует в точности $(k-1)!$ способов записи. Согласно предложению 1, для каждого искомого разбиения остального множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков существует в точности

$$\prod_{i=2}^{n-k+1}\big[r_i!\,(i!)^{r_i}\big]^{-1}$$

способов записи, где $(0, r_2, \dots, r_{n-k+1})$ тип разбиения. Разбиение множества $\mathbf{2n-2k}$ на $n-k$ блоков получится из разбиения множества $\mathbf{2n-2k-i}$ на $n-k-i$ блоков, у которых $n_1 = 0$, добавлением i блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения $r_1 = n-k-m$, где m — число внутренних вершин дерева d. Тогда имеем

$$|D(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_{n-k-i}(n,k)| = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{2n-2k,n-k}'' \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} \left[r_i!\,(i!)^{r_i}\right]^{-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{2n-2k;n-k}'' \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!\,n_1!\,\ldots n_{n-k}!\,(n-k-i)!}, \quad (4)$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$, $i \leqslant n-k$. В первой формуле внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, у которых $r_1 = i$, во второй формуле внутреннее суммирование ведется по всем таким композициям $(2n-2k)$ на $(n-k)$ слагаемых, у которых $n_1 = i$. Из неравенства $0 \leqslant i \leqslant n-k$ следует, что $0 \leqslant r_1 \leqslant n-k$. Тогда (4) равно

$$\sum_{2n-2k;n-k} \frac{(2n-k-m-1)!}{(k-1)!\,n_1!\,\ldots n_{n-k}!\,(n-k-m)!}, \quad n \geqslant 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем композициям $2n-2k$ на $n-k$ слагаемых, а m — число слагаемых в композиции, равных 1 (свое для каждой композиции).

Теперь перейдем к заданию весовой функции. Для каждого $d \in D(n,k)$ построим все плоские деревья, получающиеся из него. Каждое плоское дерево помечено таким же образом как и d. Зададим вес каждого плоского дерева по правилу 5. Каждой композиции $(n_1, \ldots, n_{n-k})$ соответствует последовательность степеней внутренних вершин дерева при df-обходе, все множество кодов деревьев строится по алгоритму 3. Таким образом, каждое $d \in D(n,k)$ расщепляется на некоторое множество плоских деревьев. Согласно правилу 5 и особенностям задания весовой функции, вес такого плоского дерева d_j равен

$$\prod_{i=1}^{n} {}^{i}g_1 \prod_{j=1}^{n-k} \frac{{}^{i_j}g_{n_j}}{{}^{i_j}g_{n_j}}.$$

Отметим, что $\tilde{I}$ — мощность множества плоских деревьев, на которые расщепляются деревья с последовательностью степеней внутренних вершин $(n_1, \ldots, n_{n-k})$, вычисляется по алгоритму 3. Согласно правилу 6 разделим вес каждого дерева на вес множества деревьев с последовательностью степеней внутренних вершин, принадлежащих одному типу исходного разбиения, тогда из (5) получим формулу (1). Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балагура А. А., Кузьмин О. В.* Перечислительные свойства комбинаторных полиномов разбиений// Дискр. анал. исслед. опер. — 2011. — *18*, № 1. — С. 3–14.
2. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
3. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012027.
4. *Balagura A. A., Kuzmin O. V.* Generalised Pascal pyramids and their reciprocals// Discr. Math. Appl. — 2007. — *17*, № 6. — P. 619–628.
5. *Chow C.-O., Mansour T.* On the real-rootedness of generalized Touchard polynomials// Appl. Math. Comput. — 2015. — *254*. — P. 204–209.
6. *Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A.* Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure// Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — *20*, № 2. — P. 229–236.
7. *Kuzmin O. V., Leonova O. V.* On analytical conjugacy of Touchard polynomials and the polynomials quasi-orthogonal to them// Discr. Math. Appl. — 2002. — *12*, № 1. — P. 97–103.
8. *Kuzmin O. V., Seregina M. V.* Plane sections of the generalised Pascal pyramid and their interpretations// Discr. Math. Appl. — 2010. — *20*, № 4. — P. 377–389.
9. *Kuzmin O. V., Starkov B. A.* Application of hierarchical structures based on binary matrices with the generalized arithmetic of Pascal's triangle in route building problems// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012030.

10. *Marcellan F., Jabee S., Shadab M.* Analytical properties of Touchard-based hybrid polynomials via operational techniques// Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. — 2021. — *44*, № 1. — P. 223–242.
11. *Mihoubi M., Maamra M. S.* Touchard polynomials, partial Bell polynomials and polynomials of binomial type// J. Phys. Conf. Ser. — 2011. — *14*, № 3. — 11.3.1.
12. *Stanley R.* Enumerated Combinatorics. Vol. 2. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

Балагура Анна Александровна
Иркутский государственный университет
E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович
Иркутский государственный университет
E-mail: quzminov@mail.ru