ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 115–127
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-115-127

УДК 519.6

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **Д. УТЕБАЕВ, Г. Х. УТЕПБЕРГЕНОВА, М. М. КАЗЫМБЕТОВА**

Аннотация. На основе метода конечных элементов с кусочно-кубической интерполяцией построены и исследованы трехпараметрические разностные схемы повышенной точности для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Доказана устойчивость и сходимость рассмотренных разностных схем и на их основе получена оценки точности. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведен их сравнительный анализ.

Ключевые слова: нестационарное уравнение, метод конечных разностей, метод конечных элементов, разностная схема, устойчивость, сходимость, точность.

DIFFERENCE SCHEMES OF THE FINITE ELEMENT METHOD OF INCREASED ACCURACY FOR SOLVING NONSTATIONARY EQUATIONS

© 2023 **D. UTEBAEV, G. Kh. UTEPBERGENOVA, M. M. KAZYMBETOVA**

Abstract. Based on the finite element method with piecewise-cubic interpolation, we construct and examine three-parameter difference schemes of increased accuracy for a second-order ordinary differential equation. Stability and convergence of difference schemes are proved and accuracy estimates are obtained. The schemes proposed are tested and compared in computing experiments.

Keywords and phrases: nonstationary equations, finite difference method, finite element method, difference scheme, stability, convergence, accuracy.

AMS Subject Classification: 65N12, 65N30

1. Введение. В последнее время при численном решении нестационарных уравнений в частных производных чаще используются полудискретные методы, где дифференциальные операторы по пространственным переменным аппроксимируются методом конечных разностей или методом конечных элементов, а временная переменная сохраняются в дифференциальной форме. В результате получается системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Приведем некоторые примеры.

1.1. Аппроксимация начально-краевых задач для уравнения в частных производных параболического типа по пространственным переменным приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$D\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0. \tag{1}$$

Здесь $\dot{u} = du/dt$, D, A — некоторые операторы (матрицы). В виде (1) записываются также нестационарные задачи переноса, конвекции-диффузии, задачи плановой фильтрации в многопластовых системах, динамики несжимаемой жидкости, процессы тепломассообмена, псевдопараболические уравнения соболевского типа и многие другие, когда аппроксимируются только пространственные переменные. При этом система (1) может оказаться жесткой. Кроме того, жесткие задачи часто возникают при математическом моделировании кинетики химических реакции, расчете электронных схем, в исследовании работы ядерных реакторов, в теории мелкой воды и т. д. Для решения полученной жесткой полудискретной задачи требуются специальные численные методы, где в основном возникают проблемы численной устойчивости. В настоящее время достигнут значительный прогресс в исследовании методов решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако проблема численного решения жестких систем уравнений по сей день остается актуальной. Жесткие задачи исследованы во многих работах, в частности, [5, 14, 15, 17].

1.2. Аппроксимация гиперболических уравнений (задачи акустики, динамической теории упругости, теории внутренних волн, геомеханики, и т.д.) в частных производных по пространственным переменным приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$D\ddot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \tag{2}$$

а также многие начально-краевые задачи для неклассических уравнений соболевского типа высокого порядка тоже приводит к решению системы уравнений (2). Например, основное уравнение динамики идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости имеет следующий вид (см. [3]):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big[\Delta_3 u - \rho^2 u\big] + \omega_0^2 \Delta_2 u + \theta^2\big[\Delta_1 u - \rho^2 u\big] = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

ω_0 — частота Вяйсяля—Брента; ρ, θ — положительные константы,

$$\Omega = \big\{0 < x_k < l_k,\ k = 1,2,3\big\}, \quad Q_T = \big\{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (0,T]\big\}.$$

Аппроксимация пространственных переменных в (3) приводит к системе (2).

1.3. Большое значение в приложении имеет уравнение колебания с диссипацией

$$D\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1. \tag{4}$$

К решению (4) приводит пространственная аппроксимация многочисленных нестационарных начально-краевых задач теории волн, задачи диформирования вязкоупругих сред, уравнения соболевского типа, нагруженные уравнения и т.п. (см. [1,3,12,13,16]). Например, нестационарное уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова (см. [8])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1 u + \sigma\frac{\partial}{\partial t}(L_2 u) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \big\{x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant T\big\} \tag{5}$$

или уравнения Буссинеска—Лява (см. [6]

$$(\lambda + \Delta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu(\Delta - \overline{\lambda})\frac{\partial u}{\partial t} + \theta(\Delta - \overline{\overline{\lambda}})u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{6}$$

Здесь

$$L_q u = \sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^q(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad x \in \Omega, \quad p_m = 1,2,\ldots, \quad 0 < k_{0q} \leqslant k_\alpha^q(x) \leqslant k_{1q}, \quad q = 1,2,$$

σ, k_{01}, k_{02}, k_{11}, k_{12} — положительные постоянные, Δ — оператор Лапласа, μ, θ, λ, $\overline{\lambda}$, $\overline{\overline{\lambda}}$ — постоянные.

Для численного решения одной из этих задач (1), (2), (4) используется, как правило, весовая аппроксимация, которая приводит к схемам первого или второго порядков точности по времени и более высокого порядка точности по пространству. Идея построения схем метода конечных элементов повышенной точности используется для аппроксимации и по временной переменной (см. [7,10,11,19,20,22,23,26]). Отметим, что методика построения схем на основе метода конечных элементов для нестационарных задач по пространственным переменным и временной переменной дает новое качество в исследовании сложных математических объектов. Она позволяет получить схемы более высокого порядка точности и по пространственным переменным (достаточно хорошо изученная теория), и по временной переменной. Кроме того, эта методика играет особую роль для задач с обобщенными решениями, так как схемы повышенной точности лучше сглаживают осцилляции решений дифференциальных задач (см. [9]). К разностным схемам, помимо классических требований аппроксимации, устойчивости и сходимости, предъявляют требование хорошей передачи основных особенностей исходной дифференциальной задачи на достаточно грубых сетках. Хорошо известно, что для решения одной и той же задачи можно предложить большое количество разностных схем. Встает вопрос о критериях отбора схем, удовлетворяющих всем упомянутым выше требованиям.

Определенное значение имеет краевые условия для рассматриваемых нестационарных уравнений. В частности, кроме локальных краевых условий можно рассмотреть и нелокальные краевые условия, где вместе классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и/или внутри нее. Общие вопросы однозначной разрешимости и аналитические свойства таких задач исследованы в [12, 13] и др.

В данной работе для общего обыкновенного дифференциального уравнения (4) (при $D \equiv 0$ получим (1), а при $B \equiv 0$ получим (2)) построены и исследованы разностные схемы повышенной точности на основе метода конечных элементов с кусочно-кубической интерполяцией (см. [7]). Получена условия устойчивости и приведена теорема о точности схемы. Исследованы дисперсионные свойства построенных разностных схем в случае $B \equiv 0$. На основе дисперсионного анализа из множества разностных схем одинакового порядка точности отобраны схемы, наилучшие в смысле передачи основных свойств дифференциальной задачи. Показано, что схемы повышенного порядка точности дают качественное сеточное решение, что подтверждается численными примерами. Доказана A-устойчивость схемы в случае $D \equiv 0$. В работе используется обозначения из [18].

2. Построение схемы. Рассмотрим задачу (4), где $u = u(t)$, $t \in [0, T]$ — абстрактная функция со значениями в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением и нормой

$$(u, \vartheta) = \int_0^T u\vartheta\, dt, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Пусть D, B, A — постоянные (не зависящие от t) линейные операторы из H в H и $f(t) \in H$. В случае, когда D, B, A — матрицы размерности $N \times N$, $H \in E^N$, $u(t) = \big(u_1(t),\ u_2(t),\ \dots,\ u_N(t)\big)$ — вектор-функция, то (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обобщенное решение задачи (4) определим как функцию $u(t) \in C^1[0, T]$, удовлетворяющую для любого интервала $(t_n, t_{n+1}) \in [0, T]$ тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{t_n}^{t_{n+1}} \big(-D\dot u\dot\vartheta + B\dot u\vartheta + Au\vartheta\big)dt + D\dot u\vartheta\Big|_{t_n}^{t_{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\vartheta(t)\, dt \quad \forall\vartheta(t) \in C^1[0, T], \\ &u(0) = u_0, \quad \dot u(0) = u_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $\omega_\tau = \big\{t_n,\ \tau = t_{n+1} - t_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\big\}$ — сетка на отрезке $t \in [0, T]$. Приближенное решение задачи (4) ищем в виде эрмитова сплайна третьей степени

$$y(t) = y^n\phi^n_{00}(t) + \dot y^n\phi^n_{10}(t) + y^{n+1}\phi^n_{01}(t) + \dot y^{n+1}\phi^n_{11}(t), \tag{8}$$

где

$$y^n = y(t_n), \quad \dot{y}^n = \frac{dy(t_n)}{dt}, \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau},$$
$$\phi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \phi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad \phi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi), \quad \phi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2).$$

Выбирая весовые функции $\vartheta(t)$ в виде линейных комбинаций интерполяционных функций и подставляя их в (7), получим следующую трехпараметрическую разностную схему:

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + Ay^{(0.5)} = \phi_1, \quad D_\alpha y_t - \frac{\tau^2}{12} B\dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2, \tag{9}$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1. \tag{10}$$

Здесь

$$D_m = D - m\tau^2 A, \quad m = \alpha, \beta, \gamma, \quad \phi_k = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_k(\xi)d\xi, \quad k = 1, 2, \quad \xi = \frac{t - t_n}{\tau},$$
$$\vartheta_1(\xi) = p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi) + p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi), \quad \vartheta_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \vartheta_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma,$$
$$\vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi), \quad \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad \vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi\right),$$
$$s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$$

H_h — конечномерное пространство для любого момента времени t; операторы D, B, A действуют из H_h в H_h. Параметры α, β, γ подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации

$$\alpha + \gamma = \beta + \frac{1}{6}. \tag{11}$$

При изучении уравнений соболевского типа операторы D, B, A может оказаться вырожденными. Для устранения проблемы вырождения операторов $D = D^*$, $B = B^*$, $A = A^*$ применим принцип регуляризации, который для самосопряженных операторов позволяет применить сдвиг по спектру:

$$\widetilde{D} = D + \varepsilon E, \quad \widetilde{B} = B + \varepsilon E, \quad \widetilde{A} = A + \varepsilon E.$$

Здесь ε — малый параметр, задающий величину сдвига операторов по спектру.

3. Устойчивость и сходимость схемы. Проанализируем устойчивости и точности схемы (9), (10). В [11] для доказательства сходимости она записана в виде трехслойных разностных схем отдельно для y и производной $\dot{y}$. Далее получена оценка точности

$$\left\|u_h(t) - u(t)\right\|_A + \left\|\dot{u}_h(t) - \dot{u}(t)\right\|_D \leqslant M\tau^4,$$

при взаимной перестановочности операторов A, B, D, т.е. $AD = DA$, $AB = BA$, $BD = DB$. Для освобождения этого условия вместо y, $\dot{y}$ введем $w = D^{1/2}y$, $\dot{w} = D^{1/2}\dot{y}$. Отметим, что $(D^{1/2})^* = D^{1/2} > 0$ и существует обратный оператор $D^{-1/2} = (D^{-1/2})^* > 0$. После очевидных преобразований из (9), (10) получим

$$\tilde{D}_\gamma \dot{w}_t + \tilde{B}w_t + \tilde{A}w^{(0.5)} = \tilde{\phi}_1, \quad \tilde{D}_\alpha w_t - \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}\dot{w}_t - \tilde{D}_\beta \dot{w}^{(0.5)} = \tilde{\phi}_2, \tag{12}$$

$$w^0 = D^{1/2}u_0, \quad \dot{w}^0 = D^{1/2}u_1, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\phi}_1 = D^{-1/2}\phi_1, \quad \tilde{\phi}_2 = D^{-1/2}\phi_2, \quad \tilde{D} = E, \quad \tilde{B} = D^{-1/2}BD^{-1/2}, \quad \tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}.$$

Ясно, что

$$\tilde{D} = \tilde{D}^* > 0, \quad \tilde{B} = \tilde{B}^* > 0, \quad \tilde{A} = \tilde{A}^* > 0, \quad \tilde{D}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{D}, \quad \tilde{D}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{D}, \quad \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}.$$

Следовательно, нет необходимости взаимной перестановочности операторов A, B, D. Условие устойчивости схемы имеет вид

$$\tilde{D}_\omega = \tilde{D} - \omega\tau^2\tilde{A} \geqslant \delta\tilde{D}, \quad 0 < \delta < 1, \quad \omega = \max\big[\alpha, \beta, \gamma, 1/4\big]. \tag{14}$$

Далее, поступая как в [11] с учетом взаимной перестановочности операторов установим справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* > 0$, $B = B^* \geqslant 0$, $D = D^* \geqslant 0$ *и выполнены условия* (11), (14). *Тогда решение схемы* (12), (13) *сходится к достаточно гладкому решению задачи* (4) *и имеют место оценки точности*

$$\big\|y(t) - u(t)\big\|_{\tilde{A}} \leqslant M\tau^4 \max_t \left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\|, \quad \big\|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\big\|_{\tilde{D}} \leqslant M\tau^4 \max_t \left\|\frac{d^6u}{dt^6}(t)\right\| \quad \forall t \in [0, T].$$

4. Алгоритм реализации схемы. Для реализации схемы (12), (13) необходимо решить систему двух уравнений относительно неизвестных $\widehat{w}$, $\widehat{\dot{w}}$:

$$m_{11}\widehat{\dot{w}} + m_{12}\widehat{w} = \Phi_1, \quad m_{21}\widehat{\dot{w}} + m_{22}\widehat{w} = \Phi_2, \tag{15}$$

где

$$m_{11} = \tilde{D} - \gamma\tau^2\tilde{A}, \quad m_{12} = \tilde{B} + 0.5\tau\tilde{A}, \quad m_{21} = -\left[\frac{\tau^2}{12}\tilde{B} + \frac{\tau}{2}(\tilde{D} - \beta\tau^2\tilde{A})\right], \quad m_{22} = \tilde{D} - \alpha\tau^2\tilde{A},$$

$$\Phi_1 = \tau\tilde{\phi}_1 + \left(\tilde{B} - \frac{1}{2}\tau\tilde{A}\right)w + (\tilde{D} - \tau^2\gamma\tilde{A})\dot{w},$$

$$\Phi_2 = \tau\tilde{\phi}_2 + (\tilde{D} - \alpha\tau^2\tilde{A})w - \frac{\tau^2}{12}\tilde{B}\dot{w} + \frac{1}{2}\tau(\tilde{D} - \beta\tau^2\tilde{A})\dot{w}.$$

Интегралы в $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ вычисляются по формуле Симпсона.

Исключая из (15) $\widehat{\dot{w}}$, получим уравнение для нахождения $\widehat{w}$:

$$C\widehat{w} = F, \tag{16}$$

где

$$C = m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} =$$
$$= \tilde{D}^2 - \left(\alpha - \frac{1}{6}\right)\tau^2\tilde{A}\tilde{D} + \left(\alpha\gamma - \frac{\beta}{4}\right)\tau^4\tilde{A}^2 + \tau^2\gamma\tilde{B}^2 + \frac{\tau}{2}\tilde{B}\tilde{D} + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\tau^3\tilde{A}\tilde{B},$$

и $F = m_{12}\Phi_2 - m_{22}\Phi_1$.

Алгоритм реализации схемы(12), (13) состоит в непосредственном решении уравнения (16), а затем вычисления $\widehat{\dot{w}}$ из уравнения

$$(\tilde{D} - \tau^2\gamma\tilde{A})\widehat{\dot{w}} = \Phi_1 - \left(\tilde{B} + \frac{1}{2}\tau\tilde{A}\right)\widehat{w}.$$

Второй алгоритм базируется на факторизации оператора C:

$$C = C_1C_2 = \big(\tilde{D} - \omega_1\tau^2\tilde{A} + \nu_1\tau\tilde{B}\big)\big(\tilde{D} - \omega_2\tau^2\tilde{A} + \nu_2\tau\tilde{B}\big).$$

Сравнивая это с (16), получим условия, связывающие параметры ω_1, ω_2, ν_1, ν_2, α, β, γ:

$$\omega_1 + \omega_2 = \alpha - \frac{1}{6}, \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \alpha\gamma - \frac{\beta}{4}, \quad \nu_1 + \nu_2 = \frac{1}{2}, \quad \nu_1 \cdot \nu_2 = \gamma, \quad \omega_1\nu_2 + \omega_2\nu_1 = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Эти условия замыкаются условием четвертого порядка аппроксимации (11). Решения этой системы зависит от выбора параметров α, β, γ. Реализация уравнения (16) осуществляется в два этапа: сначала решаем уравнение $C_1g = F$, а затем уравнение $C_2\widehat{y} = g$. После этого из уравнения (15) находим $\widehat{\dot{y}}$. При выполнении условия $\alpha\gamma = \beta/4$ схема становится экономичной.

5. Дисперсионный анализ. Исследуем дисперсионные свойства разностных схем (12), (13) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (случай $B \equiv 0$)

$$D_\gamma \dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \phi_1, \quad D_\alpha y_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \phi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1. \tag{17}$$

Для простоты исследования точности схемы предположим, что A, D — числа, а уравнение (2) — однородное ($f(t) \equiv 0$) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (тестовое уравнение), имеющее точное решение

$$u(t) = a_1 \cos \lambda t + a_2 \sin \lambda t, \quad \lambda = \sqrt{A/D}. \tag{18}$$

Постоянные параметры a_1, a_2 определяются начальными условиями.

Решение однородных разностных уравнений (17) ($\phi_1 = \phi_2 = 0$) будем искать в виде

$$y = y^n = Yq^n, \quad \dot{y} = \dot{y}^n = \dot{Y}q^n, \tag{19}$$

с амплитудами Y и $\dot{Y}$. Подставляя (19) в (17), получим однородную систему относительно Y и $\dot{Y}$, для которой условие наличия нетривиальных решений (равенство нулю определителя) имеет вид:

$$(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2)(q-1)^2 + \frac{z^2}{4}(1-\beta z^2)(q+1)^2 = 0, \quad z = \tau\lambda.$$

Последнее уравнение позволяет определить модуль перехода схемы q:

$$q_{1,2} = \frac{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) - (z^2/4)(1-\beta z^2) \pm \sqrt{d}}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}, \tag{20}$$

где $d = -z^2(1-\alpha z^2)(1-\beta z^2)(1-\gamma z^2)$.

Условие устойчивости схемы (17) имеет вид

$$(D - \alpha\tau^2 A)(D - \beta\tau^2 A)(D - \gamma\tau^2 A) \geqslant 0.$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\tau^2 \leqslant \frac{D}{mA}, \quad m = \max\{\alpha, \beta, \gamma\} > 0.$$

При этом $d \leqslant 0$ и $|q| = 1$, так что можно q представить в виде

$$q_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi. \tag{21}$$

Сравнивая (20) и (21), получим уравнение для определения ϕ:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{(z^2/2)(1-\beta z^2)}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}.$$

Отсюда

$$\varphi = 2 \arcsin\left[\frac{z}{2}\sqrt{\frac{(1-\beta z^2)}{(1-\alpha z^2)(1-\gamma z^2) + (z^2/4)(1-\beta z^2)}}\right].$$

Из (19), (21) находим

$$y = y^n = b_1 \cos\frac{\varphi t_n}{\tau} + b_2 \sin\frac{\varphi t_n}{\tau}. \tag{22}$$

Различие ϑ точного и приближенного решений характеризуется величиной $\vartheta = \varphi/(\tau\lambda)$. Чем ближе ϑ к 1, тем точнее приближенное решение.

Разложим ϑ в ряд по степеням z^2:

$$\vartheta = 1 + r_1 z^2 + r_2 z^4 + O(z^6),$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \gamma - \beta - \frac{1}{6}\right), \quad r_2 = \frac{1}{12}\left(\beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40}\right) + \left(\alpha + \gamma - \beta - \frac{1}{6}\right)\bar{r}_2.$$

Минимизируя $|r_1|$ и $|r_2|$, можно улучшать качество приближенного решения. От всех рассматриваемых далее схем будем требовать выполнения условия $r_1 = 0$. Отсюда получаем условие (11). При этом

$$\vartheta = 1 + r_2\lambda^4\tau^4 + O(\tau^6), \quad r_2 = \frac{1}{12}\left(\beta - 6\beta\alpha + \frac{1}{40}\right).$$

В этом случае можно говорить о совпадении скорости распространения гармоники дифференциального уравнения и разностной схемы с точностью до величин четвертого порядка по шагу τ.

Для получения схем шестого порядка точности потребуем выполнения (11) и условия $r_2 = 0$, т.е.

$$\beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40} = 0. \tag{23}$$

Рассмотрим примеры схем, удовлетворяющих требованиям точности (11), (23) и экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$.

Схема 1. Схема с параметрами $\gamma = 1/12$, $\alpha = 1/10$, $\beta = 1/60$ имеет порядок точности 4 (выполнено условие (11)). Дискриминант квадратного уравнения отрицателен и, следовательно, реализация этой схемы в поле действительных чисел по указанному алгоритму невозможна (естественно, эту схему можно реализовывать, обращая на каждом временном шаге оператор Δ). Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 10/\lambda^2$.

Схема 2. Выбирая $\gamma = 1/12$ и удовлетворяя (11) и условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$, получим схему порядка 4 с $\beta = 1/24$, $\alpha = 1/8$, что совпадает с одной из схем в [10]. Корни уравнения

$$\omega^2 - \left(\alpha + \gamma - \frac{1}{4}\right)\omega + \left(\alpha\gamma - \frac{\beta}{4}\right) = 0$$

равны $\omega_1 = -1/24$, $\omega_2 = 0$. Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 8/\lambda^2$.

Схема 3. Приведем новую схему четвертого порядка точности. Уникальность ее состоит в том, что для ее реализации по алгоритму необходимо «обращать» только один оператор D, так как $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Выбор параметров подчиним условию (11) и условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$. Отсюда $\beta = 1/12$, $\alpha + \gamma = 1/4$, а γ, α являются корнями квадратного уравнения $x^2 - x/4 + 1/48 = 0$. Поэтому можно выбрать $\gamma = x_1$, $\alpha = x_2$, либо $\alpha = x_1$, $\gamma = x_2$, где $x_{1,2} = 1/8 \pm i\sqrt{3}/24$. Таким образом, параметры схемы α, γ комплексные.

Схема 4. Рассмотрим теперь схему порядка 6, которая бы удовлетворяла условию экономичности $\alpha\gamma = \beta/4$. Параметры ее определяются из системы

$$\alpha + \gamma = \beta + \frac{1}{6}, \quad \beta - 6\alpha\gamma + \frac{1}{40} = 0, \quad \alpha\gamma - \frac{\beta}{4} = 0$$

и равны $\beta = 1/20$, $\alpha + \gamma = 13/60$, $\alpha\gamma = 1/80$. Корни уравнения относительно α и γ комплексные. Схема может быть реализована в поле комплексных чисел.

Схема 5. Укажем еще одну схему 6-го порядка точности: $\alpha = 7/60$, $\beta = 1/30$, $\gamma = 1/12$. Для этих значений параметров выполнены условия (11), (23), причем $\omega_{1,2} = -1/40 \pm i\sqrt{11}/120$. Условие устойчивости схемы $\tau^2 \leqslant 12/\lambda^2$.

6. A-устойчивость. Исследуем A-устойчивость схемы (9), (10) в случае $D \equiv 0$:

$$By_t - \tau^2\gamma A\dot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \tau^2\gamma B\dot{y}_t + \tau^2\alpha Ay_t - \tau^2\beta A\dot{y}^{(0.5)} = -\varphi_2, \tag{24}$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = D^{-1}(f^0 - Au_0), \tag{25}$$

где $\gamma = 1/12$. При этом из (11) получим $\alpha = \beta + 1/12$, однопараметрическое (параметр β) семейство схем. Эта схема для тестового уравнения $du/dt = \lambda u$ имеет вид

$$\tilde{B}Y_t + \tilde{A}Y = 0, \quad Y^0 = (y^0, \dot{y}^0), \tag{26}$$

где

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 - \tau\lambda/2 & \tau^2\gamma\lambda \\ -\alpha\lambda & \gamma - \tau\beta\lambda/2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\beta\lambda \end{pmatrix}.$$

Перепишем эту схему в виде разностного уравнения

$$\widetilde{Y} = S_n Y, \quad Y(0) = Y^0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Здесь $S_n = E - \tau B^{-1} A$ — оператор перехода. Составим характеристическое уравнение для S_n:

$$a_0 \mu^2 + a_1 \mu + a_2 = 0, \tag{27}$$

где

$$a_0 = \Delta^2 = \left[\left(\gamma + \frac{\beta z}{2}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right) + \alpha\gamma z^2\right]^2, \quad a_1 = -z\Delta(\beta + \gamma - \beta z) - 2\Delta^2,$$
$$a_2 = \Delta^2 + \Delta(\beta + \gamma)z, \quad \Delta = \left(1 + \frac{z}{2}\right)\left(\gamma + \frac{\beta z}{2}\right) + \alpha\gamma z^2, \quad z = \tau\lambda.$$

Когда z — комплексное число, непосредственное исследование корней уравнения (27) затруднительно. Поэтому сделаем замену

$$\mu = \frac{W + 1}{W - 1}$$

(преобразование Кэли, см. [2, 4]); после которого уравнение (27) примет вид

$$W^2 + cW + d = 0, \tag{28}$$

где

$$c = \frac{\gamma + \beta}{\beta z}, \quad d = \frac{4\gamma}{\beta z^2} + \frac{\alpha}{3\beta}, \quad z = z_0 + iz_1.$$

При этом условие A-устойчивости схемы (26) выполнено, если $\operatorname{Re} W < 0$. Пусть W_1 и W_2 — корни уравнения (28); тогда по теореме Виета

$$W_1 + W_2 = c, \quad W_1 \cdot W_2 = d. \tag{29}$$

Здесь

$$W_1 = a_0 + ia_1, \quad W_2 = b_0 + ib_1, \quad c = c_0 + ic_1, \quad d = d_0 + id_1.$$

Для того, чтобы выполнялось условие $\operatorname{Re} W_k < 0$, $k = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $a_0 + b_0 < 0$, $a_0 \cdot b_0 > 0$, т.е. $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Из конкретного вида (29) получаем уравнение

$$(a_0 b_0)^2 - p a_0 b_0 + q = 0,$$

где $p = c_0^2 + 4d_1 + c_1^2$, $q = d_0 c_0^2 + c_0 c_1 d_1 + d_1^2$. Отсюда $a_0 \cdot b_0 > 0$, если $p > 0$ и $q > 0$. Непосредственное вычисление показывает, что p и q положительны, если выполняется неравенство $\gamma^2 - 14\gamma\beta + \beta^2 \geqslant 0$. С учетом условия аппроксимации четвертого порядка увидим, что это условие будет выполнено, если

$$\alpha > 0, \quad 0 < \beta \leqslant \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right). \tag{30}$$

Условие $a_0 \cdot b_0 > 0$ означает, что a_0 и b_0 имеют одинаковый знак. Из конкретного вида W_1 и W_2 и неравенства $\operatorname{Re} \lambda < 0$ заключаем, что $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (30), *то схема* (26) *A-устойчива.*

Замечание 1. Непосредственным вычислением корней уравнения (26) можно показать, что:

(a) если $\operatorname{Re} z = 0$ ($z = iz_1$), то схема (26) A-устойчива при тех же условиях (30);

(b) если $\operatorname{Im} z = 0$ ($z = z_0$), то схема (26) A-устойчива при условиях $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\lambda > 0$.

7. Применение к уравнению в частных производных. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебаний мембраны, являющегося простейшим представителем уравнений гиперболического типа второго порядка, которому присущи все характерные особенности этих уравнений. Поэтому проверка качества численных методов на этом уравнений является необходимым условием применения их к более сложным уравнениям.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \big\{x \in \Omega,\ t \in (0,T]\big\}, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega = \big\{0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2\big\}, \\ &u = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad 0 < t \leqslant T. \end{aligned} \tag{31}$$

Задаче (31) соответствует следующая слабая постановка:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \vartheta\right) + a\,(u,\vartheta) = (f,\vartheta) \quad \forall \vartheta \in V,$$

где

$$V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l), \quad (u,\vartheta) = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2} u\vartheta\,dx, \quad a(u,\vartheta) = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2.$$

Система базисных функций для этой задачи на каждом прямоугольном конечном элементе выбрана в виде произведения базисных функций для одномерной задачи. Для двумерной задачи более экономным является базис, построенный по -сплайнам, так как количество неизвестных коэффициентов в этом случае в четыре раза меньше, чем при выборе системы на основе эрмитовых сплайнов.

Введем разбиение области Ω на N_1N_2 прямоугольников:

$$\Omega_{ij} = \Big\{(i-1)h_1 \leqslant x_1 \leqslant ih_1,\ (j-1)h_2 \leqslant x_2 \leqslant jh_2\Big\}, \quad i = \overline{1,N_1}, \quad j = \overline{1,N_2}.$$

Выберем систему базисных функций $\Phi_{ij}(x_1,x_2) = \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$, $i = \overline{1,N_1-1}$, $j = \overline{1,N_2-1}$, где $\phi_i(x)$ — базисная функция для одномерной задачи, построенная на основе B_3-сплайна.

Приближенное решение тогда представимо в виде

$$u_h(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1} a_{ij}(t)\phi_i(x_1)\phi_j(x_2).$$

По построению

$$V_h = \big\{u_h(x) : u_h(x) = 0,\ x = (x_1,x_2) \in \Gamma\big\}.$$

Графики функций $\Phi_{ij}(x_1,x_2) = \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$ при $N_1 = N_2 = 8$ и разных значениях i, j представлены на рис. 1.

Введем вектор

$$u_h(t) = \vec{u}(t) = \Big(a_{11}(t),\ a_{21}(t),\ \ldots, a_{N_1-2,N_2-1}(t),\ a_{N_1-1,N_2-1}(t)\Big)^T,$$

что соответствует нумерации неизвестных коэффициентов $a_k = a_{ij}$ в последовательности «строка-столбец»: $k = i + (j-1)(N_1-1)$. Матрица жесткости, соответствующая вектору $\vec{u}(t)$, вычисляется так:

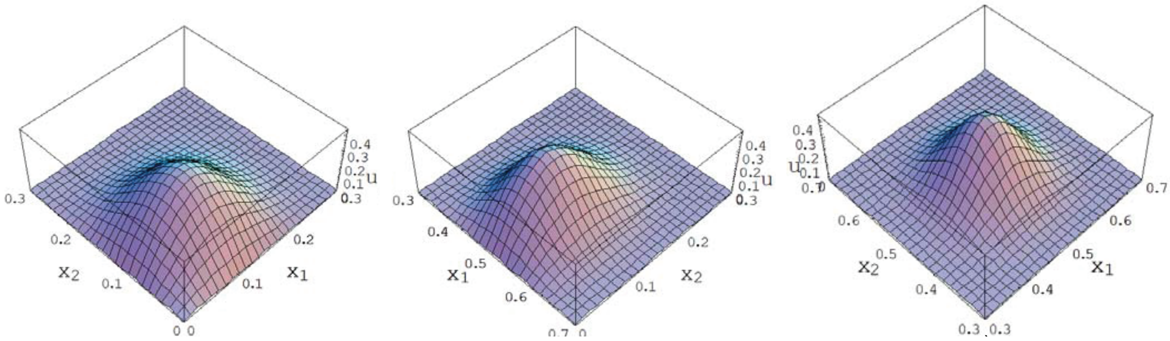
$$G = \Big\{a\big(\Phi_k(x_1,x_2), \Phi_m(x_1,x_2)\big)\Big\}_{k,m=1}^{N},$$

где

$$N = (N_1-1)(N_2-1), \quad k = i + (j-1)(N_1-1), \quad m = p + (q-1)(N_1-1),$$

$i,p = \overline{1,N_1-1}$, $j,q = \overline{1,N_2-1}$. Аналогично вычисляется матрица массы:

$$M = \Big\{\big(\Phi_k(x_1,x_2), \Phi_m(x_1,x_2)\big)\Big\}_{k,m=1}^{N}.$$



(a) $i = 1$, $j = 1$ (b) $i = 5$, $j = 1$ (c) $i = 5$, $j = 5$

Рис. 1. Сплайн-функция $\Phi_{ij}(x_1, x_2) = \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)$.

8. Вычислительный эксперимент.

Пример 1. Рассмотрим следующую тестовую задачу для (31):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad \Omega = \big\{0 < x_\alpha < 1,\ \alpha = 1, 2\big\}, \\ &u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ &x_1 = 0 : u = x_2(1 - x_2), \quad u = 0, \quad x \in \Gamma \setminus (x_1 = 0). \end{aligned} \tag{32}$$

Введением новой искомой функции $v(x, t)$, $u = v + (1 - x_1)x_2(1 - x_2)$. Тогда задача (32) сводится к задаче с однородными краевыми условиями. Решение задачи (32), полученное методом разделения переменных, имеет вид:

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{16}{\pi^4 k(2p-1)}\left[\left(\frac{-1}{(2p-1)^2} + \frac{1}{k^2 + (2p-1)^2}\right)\cos\left(\pi\sqrt{k^2 + (2p-1)^2}\,t\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{k^2 + (2p-1)^2}\right]\sin(\pi k x_1)\sin(\pi p x_2)\right\} + (1 - x_1)x_2(1 - x_2).$$

При вычислении решения бесконечная сумма заменяется конечной по индексу k до M_1, по индексу p до M_2. На рис. 2–4 представлены результаты расчетов в виде 3D графиков решения задачи (32). Явно видно преимущество схемы метода конечных элементов (схема 5) в сравнении с явной схемой второго порядка аппроксимации по времени и по пространству [18]. Заметим, что сетка для схемы метода конечных элементов значительно более грубая, чем сетка для разностной схемы второго порядка точности.

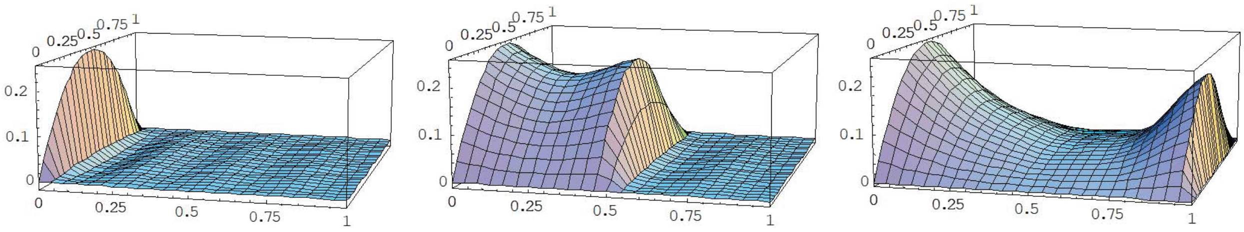
Пример 2. Пусть в (6) $n = 1$, $\lambda = \overline{\lambda} = -1$, $\overline{\overline{\lambda}} = 0$, $\mu = \theta = 1$, $f(x, t) = 2(1 - 6\pi^2)\sin(2\pi x)e^t$, $l = 1$. Тогда получим задачу

$$\begin{aligned} &(1 + \Delta)\ddot{u} + (1 + \Delta)\dot{u} + \Delta u = -f(x, t), && x \in (0, 1), \quad t \in (0, T], \\ &u(0, t) = 0, \qquad\qquad u(1, t) = 0, && 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = \sin(2\pi x), \quad \dot{u}(x, 0) = \sin(2\pi x), && 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Пространственную переменную аппроксимируем методом конечных разностей с погрешностью аппроксимации h^2.

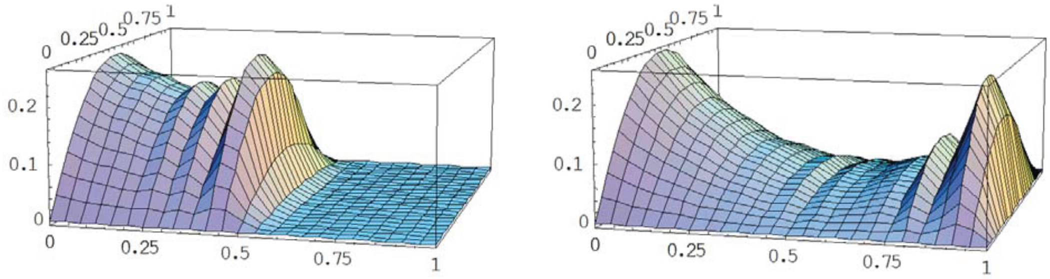
Точное решение имеет вид $u(x, t) = \sin(2\pi x)e^t$. Рассмотрены точные и приближенные решения схемы (12), (13) с параметрами $\alpha = 1/8$, $\beta = 1/24$, $\gamma = 1/12$:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -0{,}0416667, \quad \nu_1 = 0{,}25 + i0{,}144338, \quad \nu_2 = 0{,}25 - i0{,}144338.$$



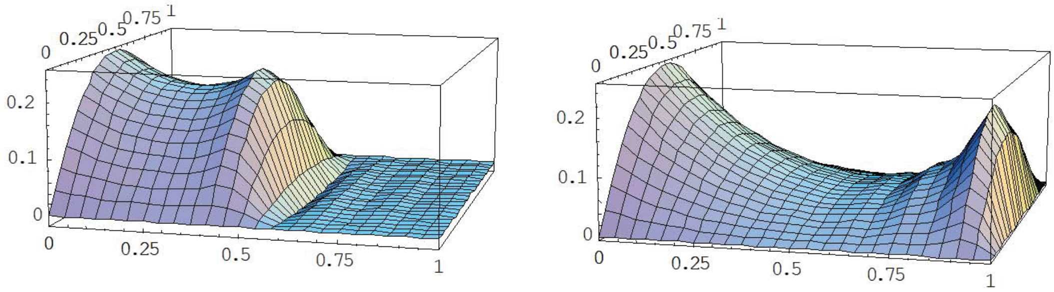
(a) $t = 0$ (b) $t = 0{,}5$ (c) $t = 1{,}0$

Рис. 2. Точное решение при $M_1 = 40$, $M_2 = 20$.



(a) $t = 0{,}5$ (b) $t = 1{,}0$

Рис. 3. Численное решение, полученное по явной схеме,
при $N_1 = N_2 = 40$, $h_1 = h_2 = 0{,}025$, $\tau = 0{,}0125$.



(a) $t = 0{,}5$ (b) $t = 1{,}0$

Рис. 4. Численное решение, полученное по схеме метода конечных элементов,
при $N_1 = N_2 = 16$, $h_1 = h_2 = 0{,}0625$, $\tau = 0{,}02$.

Теперь определим скорости сходимости вдоль пространственного и временного направления по формулам $\log(z(2h,\tau)/z(h,\tau))$ и $\log(z(h,2\tau)/z(h,\tau))$. Результаты по схеме с параметрами $\gamma = 1/12$, $\alpha = 1/8$, $\beta = 1/24$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = -0{,}0416667$ отражены в таблицах 1 и 2.

При таком выборе параметров получаем, что $\bar{\omega} = 1/4$. Пусть $\delta = 1/2$. Тогда условия устойчивости (14) с учетом наибольшего собственного значение оператора Лапласа принимает вид $\tau^2 \leqslant 3(4 + h^2)/2$.

Оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для уравнения (3) в классах обобщенных решений получены в [21]. В [24, 25] на основе вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведено их сравнительный анализ.

Таблица 1. Скорости сходимости по пространственному направлению

Шаг по пространству	Шаг по времени	Погрешность	Сходимость
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}01$	$2{,}31 \cdot 10^{-08}$	
$h = 0{,}005$	$\tau = 0{,}01$	$5{,}68 \cdot 10^{-09}$	2,02393
$h = 0{,}0025$	$\tau = 0{,}01$	$1{,}42 \cdot 10^{-09}$	2
$h = 0{,}00125$	$\tau = 0{,}01$	$3{,}53 \cdot 10^{-10}$	2,008151

Таблица 2. Скорости сходимости по временному направлению

Шаг по пространству	Шаг по времени	Погрешность	Сходимость
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}01$	$2{,}31 \cdot 10^{-08}$	
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}005$	$1{,}44 \cdot 10^{-09}$	4,006259
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}0025$	$9{,}00 \cdot 10^{-11}$	3,997493
$h = 0{,}01$	$\tau = 0{,}00125$	$5{,}61 \cdot 10^{-12}$	4,004013

Оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для уравнения (5) в классах обобщенных решений в случае $\rho \equiv 0$ (уравнение Аллера) получены в [27]. Получению оценки скорости сходимости и точности разностных схем метода конечных элементов для обобщенного уравнения Аллера—Лыкова (5) в классах обобщенных решений и численному моделированию будут посвящены отдельные работы.

9. Выводы. Построен новый класс многопараметрических разностных схем высокого порядка точности для абстрактной задачи Коши для уравнений перового и второго порядков. Наличие параметров в схеме позволяет произвести регуляризацию схем с целью оптимизации алгоритма реализации и точности схемы. Доказана устойчивость и сходимость рассмотренных разностных схем и на их основе получена оценка точности. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также проведен их сравнительный анализ. Полученные результаты могут найти дальнейшие применение при исследовании других аналогичных начально-краевых задач, в том числе задач с нелокальными краевыми условиями. Схемы имеют определенные преимущества перед другими схемами: схемы высокого порядка точности (выше двух); кроме самого решения, одновременно находится и её производная (скорость) с той же точностью. В практических задачах, например, волновых движениях в сплошных средах, эта производная соответствует скоростям движения; используя интерполяционное представление решения (8), при необходимости можно получить решение и его производную в любой момент времени; поскольку схемы двухслойные, можно без потери точности использовать переменный шаг; схема условно устойчивая и требует в четыре раза больше арифметических операции, чем обычные, но эта схема для достижения определенной точности позволяет выбрать большие шаги по времени. Численное моделирование различных задач показали, что для достижения необходимой точности решения нестационарных задач существенной вклад вносить шаг по времени, что оправдывают построения схемы высокого порядка точности по времени [18–26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
3. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.
4. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

5. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге—Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1988.
6. *Замышляева А. А.* Об алгоритме численного моделирования волн Буссинеска—Лява// Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьют. тех. Управл. Радиоэл. — 2013. — *13*, № 4. — С. ы 24–29.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
8. *Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышекова Р. В.* Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова с нелокальным условием// Владикавказ. мат. ж. — 2017. — *19*, № 1. — С. 50–58.
9. *Москальков М. Н.* Об одном свойстве схемы повышенного порядка точности для одномерного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1975. — *15*, № 1. — С. 254–260.
10. *Москальков М. Н.* Схема метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка// Диффер. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1283–1292.
11. *Москальков М. Н., Утебаев Д.* Численное моделирование нестационарных процессов механики сплошной среды. — Фан ва технология: Ташкент, 2012.
12. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
13. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
14. *Новиков Е. А.* Явные методы для жестких систем. — Новосибирск: Наука, 1997.
15. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. — М.: Наука, 1979.
16. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
17. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983.
19. *Утебаев Д.* Разностные схемы для гиперболических систем уравнений с обобщенными решениями. — Ташкент: Фан ва технология, 2017.
20. *Aripov M., Utebaev D., Nurullaev Zh.* Convergence of high-precision finite element method schemes for the two-temperature plasma equation// AIP Conf. Proc. — 2021. — *2325*. — 020059.
21. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Finite element method for the gravity-gyroscopic wave equation// J. Comput. Appl. Math. — 2010. — № 2 (101). — P. 97–104.
22. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Convergence of the finite element scheme for the equation of internal waves// Cybern. Syst. Anal. — 2011. — *47*, № 3. — P. 459–465.
23. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Comparison of some methods for solving the internal wave propagation problem in a weakly stratified fluid// Math. Mod. Comp. Simul. — 2012. — *3*, № 2. — P. 264–271.
24. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Finite element solution of a problem for gravity-gyroscopic wave equation in the time domain// Appl. Math. — 2014. — *5*, № 8. — P. 1200–1212.
25. *Moskalkov M. N., Utebaev D.* Solution of the Neumann problem with respect to the eqation for gravity-gyroscopic waves by the finite element method// J. Adv. Appl. Math. — 2016. — *1*, № 2. — P. 107–119.
26. *Utebaev D., Utebaev B.* Comparison of some numerical methods of solution of wave equations with strong dispersion// AIP Conf. Proc. — 2021. — *2365*. — 020009.
27. *Utebaev D., Utepbergenova G. X., Tileuov K. O.* On convergence of schemes of finite element method of high accuracy for the equation of heat and moisture transfer// Bull. Karaganda Univ. — 2021. — № 2 (101). — P. 29–43.

Утебаев Даулетбай
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: dutebaev_56@mail.ru

Утепбергенова Гулзира Хабибуллаевна
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: utepbergenovagu@gmail.com

Казымбетова Мухаббад Махсетбаевна
Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан
E-mail: q.muxabbat-1511@mail.ru