ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 93–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-93-103

УДК 514.76

ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2023 г. **Л. РЫПАРОВА, Й. МИКЕШ, П. ПЕШКА**

Аннотация. В статье изложены некоторые результаты, полученные для почти геодезических кривых, геодезических отображений и преобразований. Доказано, что отображение или преобразование, при котором все почти геодезические кривые переходят в почти геодезические кривые, являются геодезическими. При геодезических отображениях и преобразованиях сохраняются почти геодезические кривые.

Ключевые слова: почти геодезическая кривая, геодезическое отображение, проективное преобразование.

ALMOST GEODESIC CURVES AND GEODESIC MAPPINGS

© 2023 **L. RYPAROVA, J. MIKEŠ, P. PEŠKA**

Abstract. In this paper, we present some results obtained for almost geodesic curves and geodesic mappings and transformations. We prove that a mapping under which all almost geodesic curves pass to almost geodesic curves is geodesic. Under geodesic mappings and transformations, almost geodesic curves are preserved.

Keywords and phrases: almost geodesic curve, geodesic mapping, projective transformation.

AMS Subject Classification: 53B05, 53A05

1. Введение. Как известно, геодезические линии играют большую роль не только в математике, но и в ее приложениях, особенно в механике и физике. Их история связана с именами классиков как Бернулли, Эйлер и Лагранж. Особенную роль нашли в римановой и псевдо-римановой геометрии, а также в теории пространств аффинной связности и их обобщений.

Обобщением геодезических линий являются многие классы кривых, введенных в рассмотрение с различных точек зрения. С точки зрения математического моделирования физических полей ввел в рассмотрение квазигеодезические линии А. З. Петров [96]. Обобщением являются магнетические траектории, например, [46]. Геометрическим обобщением являются F-планарные кривые, введенные Й. Микешем и Н. С. Синюковым [23]. Другим направлением, которое исходило от понятия параллельности, являлось введение Н. С. Синюковым [31] почти геодезических кривых.

С выше введенными классами кривых связаны многие типы отображений, сохраняющие те или другие свойства. Геодезические отображения сохраняют геодезические линии. Их исследование началось в работах Э. Бельтрами [52, 53]. Т. Леви-Чивита [81] поставил и решил в специальной системе координат задачу о нахождении римановых пространств с общими геодезическими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем. Затем теория геодезических отображений римановых, псевдо-риманновых и пространств аффинной связности без кручения развивалась в работах Т. Томаса [119,120], Ж. Томаса [118], Г. Вейля [126],

Работа выполнена при поддержке гранта «Алгебраические и геометрические структуры» университета им. Ф. Палацкого (проект IGA PrF 2022017).

Л. П. Эйзенхарта [43, 74, 75], П. А. Широкова [42], А. С. Солодовникова [37–39], Н. С. Синюкова [27–30, 32, 34, 35], А. В. Аминовой [2, 45], Й. Микеша [11–18, 34, 76, 77, 82–84, 92, 93, 100, 102, 107] и других.

Вопросы, поднятые при изучении геодезических отображений, были развиты В. Ф. Каганом [10], Г. Врэнчану [125], Я. Л. Шапиро [41], Д. В. Веденяпиным [9] и др. Перечисленными авторами найдены специальные классы $(n-2)$-проективных пространств.

А. З. Петровым [96] было введено понятие квазигеодезических отображений, при которых геодезические линии отображаются на квазигеодезические линии и выполняются дополнительные условия, имеющие физикальную сущность. Специальными квазигеодезическими отображениями, в частности, являются голоморфно-проективные отображения келеровых пространств, рассмотренные Т. Оцуки, Я Тасиро, М. Прванович, Й. Микешем и др. [34, 35, 47, 49–51, 78, 84, 93].

Естественным обобщением этих классов отображений являются почти геодезические отображения, введенные в рассмотрение Н. С. Синюковым (см. [31, 33–35]). Им же выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2, π_3. Вопрос о том, полна ли данная классификация почти геодезических отображений, долгое время оставался открытым. Полнота этой классификации установлена в работе В. Е. Березовского, Й. Микеша [61, 62].

Затем теория почти геодезических отображений развивалась, например, в работах В. С. Собчука [36, 108], В. С. Шадного [40], Н. Я. Яблонской [44], В. Е. Березовского, Й. Микеша [3, 5–8, 54–57, 59–64, 64–67, 69, 69–71, 84, 89, 93]. Приложения найдены и в теоретической физике [79].

Исследования геодезических и почти геодезических отображений обобщенно римановых пространств и пространств аффинной связности с кручением продолжили Н. О. Весич, А. М. Велимирович, Л. М. Велимирович, И. Гинтерлейтнер, М. Л. Златанович, С. М. Минчич, М. С. Найданович (Чирич), М. З. Петрович и М. С. Станкович [73, 94, 97–99, 109–114, 121–124, 127–132] и др.

Заметим, что наглядным примером геодезических отображений являются центральные проекции плоскостей и гномоническая проекция полусферы на плоскость, а также построенное отображение сферы на себя, см. [18, 83, 93]. В работе [21] при помощи параллельных и центральных проекций плоскости или сферы на сферу построены наглядные примеры почти геодезических отображений «в целом». Подобный результат получен для поворотных отображений [20].

Другие исследования в этом направлении можно найти, например, в работах [1, 4, 19, 20, 22, 46, 58, 67, 68, 72, 80, 85–88, 90–93, 95, 101, 103–106, 115–117].

В данной работе показано, что отображение или преобразование является геодезическим тогда и только тогда, когда все почти геодезические кривые переходят в почти геодезические кривые.

2. Геодезические линии и почти геодезические кривые в пространствах аффинной связности. Рассмотрим пространство аффинной связности A_n с объектом аффинной связности без кручения ∇, отнесенное к локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. В этой системе координат ∇ определяются компонентами $\Gamma^h_{ij}(x)$, которые симметричны по нижним индексам, т.е. имеет место $\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x)$.

Определение 1. Кривая ℓ пространства аффинной связности A_n называется *геодезической линией*, если ее касательный вектор вдоль нее параллелен.

Из этого определения вытекает, что кривая $\ell(t)$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее касательный вектор $\lambda(t) = d\ell(t)/dt$ удовлетворяет уравнению $\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t) = \rho(t)\cdot\lambda(t)$, где ρ — некоторая функция параметра t.

В локальных координатах основные уравнения геодезической линии $\ell(t)$: $x^h = x^h(t)$ можно записать в следующем виде

$$\lambda^h_1(t) = \rho(t)\cdot\lambda^h(t), \tag{1}$$

где λ^h и λ^h_1 — компоненты касательного вектора $\lambda(t)$ и вектора $\nabla_{\lambda(t)}\lambda(t)$, как известно

$$\lambda^h_1 \equiv \lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x(t))\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t), \tag{2}$$

символ «,» обозначает ковариантную производную по связности ∇ пространства A_n и Γ^h_{ij} — компоненты связности ∇.

Это определение геодезических и их основные уравнения (1) в согласии с класическими исследованиями, например, Т. Леви-Чивиты [81], Л. П. Эйзенхарта [43, 74], А. П. Нордена [24], А. З. Петрова [25], П. Рашевского [26], Н. С. Синюкова [34] и других.

Известно, что на геодезической линии можно выбрать параметр t так, что функция $\rho(t) \equiv 0$. Этот параметр — *канонический* или *аффинный*. См. [24, 25, 34, 43, 74, 93]. Часто именно уравнение геодезических линий с каноническим параметром ($\nabla_\lambda \lambda = 0$) бывает представляемо в качестве определения геодезической, что на наш взгляд неправильно, так как понятие геодезических не должно зависеть от изменения параметра. Детально этот вопрос обсуждается в [93].

Как известно, точкой в данном направлении проходит единственная геодезическая. Но это верно в случае, когда функции $\Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям Лифшица, в частности, когда эти функции дифференцируемы. В работах [103, 104, 106] найдены бифуркации геодезических линий, т.е. случаи, когда точкой в данном направлении проходят как минимум две геодезические динии. В этих исследованиях компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ непрерывны.

Пример, который изложен в [93], говорит о том, что обратное утвержнение вообще не верно — здесь компоненты объектов связности не являются дифференцируемыми, а геодезические имеют обычные свойства, так как пространство является плоским, а в нем прямые имеют привычные свщйства и не допускают бифуркаций.

В 1963 г. Н. С. Синюков [31] ввел в рассмотрение следующее обобщение геодезических линий, см. [35, 71, 84], [34, с. 156–170], [93, с. 456]:

Определение 2. Кривая ℓ пространства аффинной связности A_n называется *почти геодезической линией*, если ее касательный вектор лежит в двумерной площадке, параллельной вдоль нее.

Кривая ℓ: $x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n ($n > 2$) является почти геодезической линией, если ее касательный вектор $\lambda^h(t) = dx^h(t)/dt$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^h_2(t) = a(t) \cdot \lambda^h(t) + b(t) \cdot \lambda^h_1(t), \tag{3}$$

где

$$\lambda^h_2 \equiv \lambda^h_{1,\alpha}\lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^h_1(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x(t))\lambda^\alpha_1(t)\lambda^\beta(t), \tag{4}$$

$a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции указанного аргумента.

С учетом формул (2) и (4) получим уравнения (3) в следующей форме

$$\frac{d^2\lambda^h}{dt^2} + 3\Gamma^h_{\alpha\beta}\frac{d\lambda^\alpha}{dt}\lambda^\beta + (\partial_\gamma\Gamma^h_{\alpha\beta} + \Gamma^h_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a(t) \cdot \lambda^h + b(t) \cdot \left(\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\right). \tag{5}$$

Подобно тому как для геодезических, можно для почти геодезической кривой найти параметр t так, что либо функция $a(t) \equiv 0$ либо функция $b(t) \equiv 0$, см. [34, с. 162]. Здесь на основании этого факта доказано, что количество почти геодезических кривых существенно зависит только от одной функции $a(t)$ или функции $b(t)$ (другая при этом нулевая), начальной точки x_0, направления $\lambda(x_0)$ и «ускорения» $\lambda_1(x_0)$.

Несмотря на то, что в системе уравнений (5) фигурируют первые производные объектов связности, для существования почти геодезических линий это требование несущественно. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ в координатной области удовлетворяют условиям Лифшица, тогда для наперед заданных непрерывных функций $a(t)$ и $b(t)$ существует единственная почти геодезическая кривая, которая проходит заданной точкой, в заданном направлении и заданном «ускорении».*

Доказательство. Вытекает из того, что основные уравнения почти геодезической линии, согласно формулам (3) и (4), можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $x^h(t)$, $\lambda^h(t)$, $\lambda^h_1(t)$

$$\begin{aligned} &dx^h(t)/dt = \lambda^h(t);\\ &d\lambda^h(t)/dt = -\Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t) + \lambda^h_1(t);\\ &d\lambda^h_1(t)/dt = -\Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i_1(t)\lambda^j(t) + a(t)\cdot\lambda^h(t) + b(t)\cdot\lambda^h_1(t).\end{aligned} \tag{6}$$

Для начальных значений Коши

$$x^h(t_0) = x^h_0, \quad \lambda^h(t_0) = \lambda^h_0, \quad \lambda^h_1(t_0) = \lambda^h_{1|0},$$

система (6) для заданных непрерывных функций $a(t)$ и $b(t)$ (одна из этих функций может быть априори обнулена, как уже было отмечено ранее), при условии, что компоненты $\Gamma^h_{ij}(x)$ удовлетворяют условиям Лифшица, имеет единственное решение. □

3. Геодезические и почти геодезические отображения. Напомним классическое определение геодезических отображений.

Определение 3. Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ называют *геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Н. С. Синюков [34] ввел в рассмотрение более общий класс отображений.

Определение 4. Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ называют *почти геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.

Предположим, что пространство аффинной связности A_n допускает отображение f на пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. *Тензором деформации* связностей отображения f называют тензор

$$P^h_{ij}(x) = \overline{\Gamma}^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ij}(x), \tag{7}$$

где $\Gamma^h_{ij}(x)$ и $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\overline{A}_n$, соответственно, в указанной системе координат.

Известно [2, 24, 25, 34, 43, 45, 74, 81, 93], что для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям (*уравнения Леви-Чивиты*)

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i, \tag{8}$$

где ψ_i — произвольный вектор и δ^h_i — символы Кронекера.

Известно [31, 33–35], что для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\overline{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P^h_{ij}(x)$ удовлетворял условиям

$$A^h_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\cdot P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\cdot\lambda^h,$$

где λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$, а тензор A^h_{ijk} определен следующим образом

$$A^h_{ijk} = P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k}.$$

Почти геодезические отображения пространств аффинной связности введены в расмотрение Н. С. Синюковым [31, 33–35]. Им, в соответствии с характером зависимости функций a и b от координат $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ вектора λ, были выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3.

Отображения π_1, π_2 и π_3 характеризуются соответственно условиями:

$$\pi_1 : P^h_{(ij,k)} + P^h_{\alpha(i}P^\alpha_{jk)} = \delta^h_{(i}a_{jk)} + b_{(i}P^h_{jk)};$$
$$\pi_2 : P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)}; \quad F^h_{(i,j)} - F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\varphi_{j)} = \delta^h_{(i}\mu_{j)} + F^h_{(i}\rho_{j)};$$
$$\pi_3 : P^h_{ij} = \delta^h_{(i}\psi_{j)} + \varphi^h a_{ij}; \quad \varphi^h_{,i} = \varphi^h\theta_i + \rho\delta^h_i,$$

где φ_i, ψ_i, b_i, a_{ij}, φ^h, θ_i, ρ, F^h_i — тензоры соответствующих валентностей.

Заметим, что геодезические отображения можно рассматривать как тривиальные случаи почти геодезических отображений всех типов, например, π_2 при $\varphi_i = 0$ и π_3 при $a_{ij} = 0$.

В. Е. Березовский и Й. Микеш доказали полноту этой классификации (см. [61, 62]). Вопросы пересечения типов почти геодезических отображений изучены в [61].

4. Геодезические отображения и почти геодезические линии.

Теорема 2. *При геодезическом отображении $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ $(n \geqslant 3)$ сохраняются почти геодезические линии.*

Доказательство. Пусть пространство аффинной связности A_n допускает геодезическое отображение f на пространство $\overline{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению f системе координат x. Рассмотрим кривую ℓ и ее образ $\bar{\ell} = f(\ell)$, которые характеризуются общими уравнениями $x^h = x^h(t)$.

Далее предположим, что ℓ — почти геодезическая линия в пространстве A_n. Тогда выполняются уравнения (3), которые запишем в более развернутой форме

$$\lambda^h_2 \equiv \nabla_t\lambda^h_1 \equiv d\lambda^h_1(t)/dt + \Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i_1(t)\lambda^j(t) = a(t)\lambda^h(t) + b(t)\lambda^h_1(t), \tag{9}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции параметра t,

$$\lambda^h = dx^h(t)/dt \quad \text{и} \quad \lambda^h_1 = \nabla_t\lambda^h = d\lambda^h(t)/dt + \Gamma^h_{ij}(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t). \tag{10}$$

Напомним классическую запись уравнений Леви-Чивиты

$$\bar\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i\psi_j + \delta^h_j\psi_i. \tag{11}$$

Учитывая определение тензора деформации (7) они равносильны условиям (8).

Вычислим соответствующие аналогические объекты пространства $\overline{A}_n$:

$$\bar\lambda^h, \quad \bar\lambda^h_1 = d\bar\lambda^h(t)/dt + \bar\Gamma^h_{ij}(x(t))\bar\lambda^i(t)\bar\lambda^j(t), \quad \bar\lambda^h_2 = d\bar\lambda^h_1(t)/dt + \bar\Gamma^h_{ij}(x(t))\bar\lambda^i_1(t)\bar\lambda^j(t).$$

Исключая $\bar\Gamma^h_{ij}$ при помощи (11) и учитывая формулы (10), получим

$$\bar\lambda^h = \lambda^h, \quad \bar\lambda^h_1 = \lambda^h_1 + 2\psi_i\lambda^i\cdot\lambda^h, \quad \bar\lambda^h_2 = \lambda^h_2 + 2\psi_i\lambda^i\cdot\lambda^h_1 + 2d(\psi_i\lambda^i)/dt\cdot\lambda^h.$$

После несложных вычислений на основании формул (9) убедимся, что

$$\bar\lambda^h_2 = \bar a(t)\bar\lambda^h(t) + \bar b(t)\bar\lambda^h_1(t),$$

где $\bar a(t)$ и $\bar b(t)$ — некоторые функции параметра t. Эти формулы — основные уравнения почти геодезических линий (3) в пространстве $\bar A_n$. Следовательно, кривая $\bar\ell$ — почти геодезическая в пространстве $\bar A_n$. □

5. Отображения, сохраняющие почти геодезические линии.

Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Отображение $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ $(n \geqslant 3)$ является геодезическим тогда и только тогда, когда при этом отображении все почти геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что при отображении $f\colon A_n \to \overline{A}_n$ все почти геодезические линии ℓ пространства A_n переходят в почти геодезические линии $\bar\ell = f(\ell)$ пространства $\overline{A}_n$.

Пространства A_n и $\overline{A}_n$ отнесены к общей по отображению f системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. В этом случае почти геодезические линии $\ell \subset A_n$ и $\bar\ell \subset \overline{A}_n$ определяются идентичными уравнениями $x^h = x^h(t)$.

Для почти геодезической линии ℓ пространства A_n выполняются уравнения (9) и (10):

$$\lambda_2^h \equiv \nabla_t \lambda_1^h \equiv \frac{d\lambda_1^h(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^h(x(t))\lambda_1^i(t)\lambda^j(t) = a(t)\lambda^h(t) + b(t)\lambda_1^h(t),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции параметра t,

$$\lambda^h = \frac{dx^h(t)}{dt}, \quad \lambda_1^h = \nabla_t \lambda^h = \frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma_{ij}^h(x(t))\lambda^i(t)\lambda^j(t).$$

Используя формулу

$$\bar\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + P_{ij}^h,$$

которая вытекает из уравнений (7), вычислим

$$\bar\lambda^h, \quad \bar\lambda_1^h = \frac{d\bar\lambda^h(t)}{dt} + \bar\Gamma_{ij}^h(x(t))\bar\lambda^i(t)\bar\lambda^j(t), \quad \bar\lambda_2^h = \frac{d\bar\lambda_1^h(t)}{dt} + \bar\Gamma_{ij}^h(x(t))\bar\lambda_1^i(t)\bar\lambda^j(t).$$

Принимая во внимание формулы (9) и (10), получим

$$\bar\lambda^h = \lambda^h, \quad \bar\lambda_1^h = \lambda_1^h + P_{ij}^h\lambda^i\lambda^j, \quad \bar\lambda_2^h = \bar\nabla_{\bar\lambda}(\bar\lambda_1^h) = \nabla_\lambda(\lambda_1^h + P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta) + P_{ij}^h(\lambda_1^i + P_{\alpha\beta}^i\lambda^\alpha\lambda^\beta)\lambda^j.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\bar\lambda_2^h = \lambda_2^h + 3P_{\alpha\beta}^h y^\alpha\lambda^\beta + (\nabla_\gamma P_{\alpha\beta}^h + P_{\alpha\delta}^h P_{\beta\gamma}^\delta)\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma. \tag{12}$$

Если линии ℓ и $\bar\ell = f(\ell)$ являются почти геодезическими, то имеют место уравнение (9) и аналогичное уравнение

$$\bar\lambda_2^h = \bar a(t)\bar\lambda^h(t) + \bar b(t)\bar\lambda_1^h(t),$$

где $\bar a(t)$ и $\bar b(t)$ — некоторые функции параметра t.

Исключая из (12) векторы λ_2^h и $\bar\lambda_2^h$, получим

$$3P_{\alpha\beta}^h y^\alpha\lambda^\beta + (\nabla_\gamma P_{\alpha\beta}^h + P_{\alpha\delta}^h P_{\beta\gamma}^\delta)\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \tilde a \cdot \lambda^h + \tilde b \cdot y^h + \tilde c \cdot P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta, \tag{13}$$

где $\tilde a$, $\tilde b$, $\tilde c$ — некоторые функции $x^1, \dots, x^n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$. Здесь $y^h = \lambda_1^h$.

Формула (13) выполняется тождественно в любой фиксированной точке $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ для произвольных значений переменных $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$.

Легко показать, что функции $\tilde a$, $\tilde b$, $\tilde c$ — дифференцируемы и если их разложить по первым степеням $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ и $y^1, \dots, y^n$, то сравнением коэффициентов этого полинома при этих переменных легко убедиться, что имеют место уравнения Леви-Чивиты (7) и отображение — геодезическое.

Детально различные методики доказательства изложены в работе [78] для установления основных уравнений геодезических и F-планарных отображений новыми методами. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность, очевидно, вытекает из теоремы 2. Этим теорема полностью доказана. □

6. Преобразования, сохраняющие почти геодезические линии. Аналогичным способом можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Преобразование пространства аффинной связности A_n ($n \geqslant 3$) является проективным тогда и только тогда, когда при этом преобразовании все почти геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\overline{A}_n$.*

Напомним, что преобразование называется *проективным*, если при нем сохраняются геодезические линии, см. [2, 34, 45, 75, 93]. Эти преобразования характеризуются выполнением обобщенных уравнений Киллинга

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \psi_i \delta^h_j + \psi_j \delta^h_i,$$

где L_ξ — производная Ли вдоль векторного поля ξ, которое называется *проективным.*

Легко показать, что теоремы 2, 3 и 4 имеют место для пространств аффинной связности с кручением. Это вытекает из факта, что геодезические линии не зависят от кручения аффинной связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аббасси М. Т. К., Микеш Й., Ванжурова А., Бежан К. Л., Белова О. О.* Ушел из жизни профессор Олдржих Ковальский// Диффер. геом. многообр. фигур. — 2021. — *52*. — С. 5–16.
2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
3. *Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й.* О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 3. — С. 463–466.
4. *Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й.* Геодезические отображения эквиаффинных и Риччи-симметрических пространств// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 2. — С. 309–312.
5. *Березовский В. Е., Микеш Й.* Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно риччи-симметрические пространства// Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *151*, № 4. — С. 9–14.
6. *Березовский В. Е., Микеш Й.* О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 2. — С. 3–8.
7. *Березовский В. Е., Микеш Й., Худа Г., Чепурная Е. Е.* Канонические почти геодезические отображения, сохраняющие тензор проективной кривизны// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 6. — С. 3–8.
8. *Ваврживкова Х., Микеш Й., Покорна О., Старко Г.* Об основных уравнениях почти геодезических отображений $\pi_2(e)$// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 1. — С. 10–15.
9. *Веденяпин Д. В.* Об $(n-2)$-проективном пространстве// Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. — 1959. — *6*. — С. 119–126.
10. *Каган В. Ф.* Субпроективные пространства. — М., 1961.
11. *Микеш Й.* Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств. — Деп. в ВИНИТИ. — No. 3924-76, 1976.
12. *Микеш Й.* О некоторых классах римановых пространств, замкнутых соответственно на геодезические отображения// VII Всесоюз. конф. «Современная дифференциальная геометрия». — Минск, 1979. — С. 126.
13. *Микеш Й.* О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 2. — С. 313–317.
14. *Микеш Й.* О геодезических отображениях пространств Эйнштейна// Мат. заметки. — 1980. — *28*, № 6. — С. 935–938.
15. *Микеш Й.* Проективно-симметричные и проективно-рекуррентные пространства аффинной связности// Тр. геом. семин. — 1981. — *13*. — С. 61–62.
16. *Микеш Й.* Об эквидистантных келеровых пространствах// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 627–633.
17. *Микеш Й.* О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах// Докл. АН СССР. — 1986. — *291*, № 1. — С. 33–36.
18. *Микеш Й.* О существовании n-мерных компактных римановых пространств, допускающих нетривиальные проективные преобразования «в целом»// Докл. АН СССР. — 1989. — *305*, № 3. — С. 534–536.
19. *Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И.* Геодезические отображения «в целом» Риччи-плоских пространств с n полными геодезическими линиями// Мат. заметки. — 2020. — *108*, № 2. — С. 306–310.
20. *Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л.* Поворотные отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 1. — С. 151–154.
21. *Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л.* Почти геодезические отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 3. — С. 476–480.

22. *Микеш Й., Рыпарова Л., Худа Г.* К теории поворотных отображений// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 4. — С. 637–640.
23. *Микеш Й., Синюков Н. С.* О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 55–61.
24. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
25. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
26. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964.
27. *Синюков Н. С.* О геодезических отображениях римановых многообразий на симметрические пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*. — С. 21–23.
28. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*. — С. 766–767.
29. *Синюков Н. С.* Об эквидистантных пространствах// Вестн. Одесск. ун-та. — 1957. — С. 133–135.
30. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
31. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффиносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
32. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770–772.
33. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и e-структуры// Мат. заметки. — 1970. — *7*, № 4. — С. 449–459.
34. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
35. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1982. — *13*. — С. 3–26.
36. *Собчук В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на симметрические римановы пространства// Мат. заметки. — 1975. — *17*, № 5. — С. 757–763.
37. *Solodovnikov A. S.* Projective transformations of Riemannian spaces// Usp. Mat. Nauk. — 1956. — *11*, № 4. — С. 45–116.
38. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — *11*. — С. 43–102.
39. *Солодовников А. С.* Геометрическое описание всех возможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивиты// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — *12*. — С. 131–173.
40. *Шадный В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны// Мат. заметки. — 1979. — *25*, № 2. — С. 293–298.
41. *Шапиро Я. Л.* О квазигеодезическом отображении// Изв. вузов. Мат. — 1980. — № 9. — С. 53–55.
42. *П. А. Широков* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966.
43. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
44. *Яблонская Н. В.* О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 1. — С. 78–80.
45. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
46. *Bejan C.-L., Druţă-Romaniuc S.-L.* Walker manifolds and Killing magnetic curves// Differ. Geom. Appl. — 2014. — *35, Suppl.*. — P. 106–116.
47. *Belova O., Mikeš J.* Almost geodesics and special affine connection// Res. Math. — 2020. — *75*, № 3. — 127.
48. *Belova O., Mikeš J., Sherkuziyev M., Sherkuziyeva N.* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane// Res. Math. — 2021. — *76*, № 2. — 56.
49. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Complex curves as lines of geometries// Res. Math. — 2017. — *71*, № 1-2. — P. 145–165.
50. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Geodesics and almost geodesics curves// Res. Math. — 2018. — *73*, № 4. — 154.
51. *Belova O. et al.* Our friend and mathematician Karl Strambach// Res. Math. — 2020. — *75*, № 2. — 69.
52. *Beltrami E.* Risoluzione del problema: riportari i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentante da linee rette// Ann. Mat. — 1865. — *1*, № 7. — P. 185–204.
53. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazi di curvatura constante// Ann. Mat. — 1868. — *2*, № 2. — P. 232–255.

54. *Berezovski V., Bácsó S., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature// Ann. Math. Inf. — 2015. — *45.* — P. 3–10.
55. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Hinterleitner I., Mikeš J.* Canonical almost geodesic mappings of the first type onto generalized Ricci symmetric spaces// Filomat. — 2022. — *36*, № 4. — P. 1089–1097.
56. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Leshchenko S., Mikeš J.* Canonical almost geodesic mappings of the first type of spaces with affine connection onto generalized 2-Ricci-symmetric spaces// Geom. Integr. Quant. — 2021. — *22.* — P. 78–87.
57. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Mikeš J., Rýparová L.* Canonical almost geodesic mappings of the first type of spaces with affine connections onto generalized m-Ricci-symmetric spaces// Mathematics. — 2021. — *9*, № 4. — 437.
58. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Rýparová L.* Conformal and geodesic mappings onto some special spaces// Mathematics. — 2019. — *7*, № 8. — 664.
59. *Berezovski V. E., Jukl M., Juklová L.* Almost geodesic mappings of the first type onto symmetric spaces// Proc. 16th Conf. APLIMAT 2017. — Bratislava, 2017. — P. 126–131.
60. *Berezovski V. E., Kuzmina I. A., Mikeš J.* Canonical F-planar mappings of spaces with affine connection to two symmetric spaces// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 533–538.
61. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces// Proc. Conf. “Differential Geometry and Applications” (Dubrovnik, 1988). — 1989. — P. 41–48.
62. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces// Acta Univ. Palacki. Olomuc. Math. — 1996. — *35.* — P. 21–24.
63. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of the type π_1 of Riemannian spaces preserving a system of n-orthogonal hypersurfaces// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1999. — *59.* — P. 103–108.
64. *Berezovski V. E., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of spaces with affine connection// J. Math. Sci. — 2015. — *207*, № 3. — P. 389–409.
65. *Berezovski V. E., Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* On canonical f-planar mappings of spaces with affine connection// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1273–1278.
66. *Berezovski V. E., Mikeš J., Radulović Ž.* Almost geodesic mappings of type π_1^* of spaces with affine connection// Math. Montisnigri. — 2021. — *52.* — P. 30–36.
67. *Berezovski V. E., Mikeš J., Rýparová L.* Geodesic mappings of spaces with affine connnection onto generalized Ricci symmetric spaces// Filomat. — 2019. — *33*, № 14. — P. 4475–4480.
68. *Berezovskii V., Mikeš J., Rýparová L.* Conformal and geodesic mappings onto Ricci symmetric spaces// Proc. 19th Conf. APLIMAT 2020 — 2020. — *20.* — P. 65–72.
69. *Berezovskii V. E., Mikeš J., Rýparová L., Sabykanov A.* On canonical almost geodesic mappings of type $\pi_2(e)$// Mathematics. — 2020. — *8*, № 1. — 54.
70. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds// Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyhaziensis. — 2010. — *26.* — P. 221–230.
71. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type π_1// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2014. — *37.* — P. 647–659.
72. *Chudá H., Mikeš J.* Conformally geodesic mappings satisfying a certain initial condition// Arch. Math. — 2011. — *47*, № 5. — P. 389–394.
73. *Ćirić M. S., Zlatanović M. Lj., Stanković M. S., Velimirović Lj. S.* On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Comput. — 2012. — *218*, № 12. — P. 6648–6655.
74. *Eisenhart L. P.* Non-Riemannian Geometry. — Mineola, NY: Dover, 2005.
75. *Eisenhart L. P.* Continuous Groups of Transformations. — New York: Dover, 1961.
76. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2011. — *174*, № 5. — P. 537–554.
77. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// Miskolc. Math. Notes. — 2013. — *14*, № 2. — P. 575–582.
78. *Hinterleitner I., Mikeš J., Peška P.* Fundamental equations of F-planar mappings// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 4. — P. 653–659.
79. *Kozak A., Borowiec A.* Palatini frames in scalar-tensor theories of gravity// Eur. Phys. J. — 2019. — *79.* — 335.
80. *Křížek J., Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* Extremals and isoperimetric extremals of the rotations in the plane// Geom. Integr. Quant. — 2021. — *22.* — P. 136–141.
81. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni dello equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24.* — P. 252–300.

82. *Mikeš J.* Geodesic mappings of special Riemannian spaces// Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. — 1988. — *46.* — P. 793–813.
83. *Mikeš J.* Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// J. Math. Sci. — 1996. — *78*, № 3. — P. 311–333.
84. *Mikeš J.* Holomorphically projective mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 1998. — *89*, № 3. — P. 1334–1353.
85. *Mikeš J., Berezovski V. E., Stepanova E., Chudá H.* Geodesic mappings and their generalizations// J. Math. Sci. — 2016. — *217*, № 5. — P. 607–623.
86. *Mikeš J., Chudá H., Hinterleitner I.* Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition// Int. J. Geom. Meth. Modern Phys. — 2014. — *11*, № 5. — 1450044.
87. *Mikeš J., Jukl M., Juklová L.* Some results on traceless decomposition of tensors// J. Math. Sci. — 2011. — *174*, № 5. — P. 627–640.
88. *Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* Isoperimetric extremals of rotation on sphere// Geom. Integr. Quant. — 2020. — *21.* — P. 181–185.
89. *Mikeš J., Pokorná O., Starko G. A., Vavříková H.* On almost geodesic mappings $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$// Proc. Conf. APLIMAT. — Bratislava, 2005. — P. 315–321.
90. *Mikeš J., Rýparová L.* Rotary mappings of spaces with affine connection// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1147–1152.
91. *Mikeš J., Strambach K.* Differentiable structures on elementary geometries// Res. Math. — 2009. — *53*, № 1-2. — P. 153–172.
92. *Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.
93. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
94. *Najdanović M. S., Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I.* Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 2015. — *98 (112).* — P. 71–84.
95. *Peška P., Mikeš J., Rýparová L.* Almost geodesic curves as intersections of n-dimensional spheres// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 687–690.
96. *Petrov A. Z.* Modeling of physical fields// Gravit. Gen. Relat. — 1968. — *4.* — P. 7–21.
97. *Petrović M. Z.* Canonical almost geodesic mappings of type ${}_\theta\pi_2(0,F)$, $\theta \in \{1,2\}$ between generalized parabolic Kähler manifolds// Miskolc. Math. Notes. — 2018. — *19.* — P. 469–482.
98. *Petrović M. Z.* Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2019. — *42.* — P. 707–727.
99. *Petrović M. Z., Stanković M. S.* Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — *40.* — P. 1353–1362.
100. *Radulovich Zh., Mikeš J., Gavril'chenko M. L.* Geodesic Mappings and Deformations of Riemannian Spaces. — Podgorica: CID, 1997.
101. *Rýparová L., Křížek J., Mike ˇ s J.* On fundamental equations of rotary vector fields// Proc. 18th Conf. Appl. Math. APLIMAT 2019, 2019. — P. 1031–1035.
102. *Rýparová L., Mikeš J.* On global geodesic mappings of quadrics of revolution// Proc. 16th Conf. Appl. Math. APLIMAT 2017, 2017. — P. 1342–1348.
103. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations// Geom. Integr. Quant. — 2017. — *18.* — P. 217–224.
104. *Rýparová L., Mikeš J.* Bifurcation of closed geodesiscs// Geom. Integr. Quant. — 2018. — *19.* — P. 188–192.
105. *Rýparová L., Mikeš J.* Infinitesimal rotary transformation// Filomat. — 2019. — *33*, № 4. — P. 1153–1157.
106. *Rýparová L., Mikeš J., Sabykanov A.* On geodesic bifurcations of product spaces// J. Math. Sci. — 2019. — *239*, № 1. — P. 86–91.
107. *Shandra I. G., Mikeš J.* Geodesic mappings of semi-Riemannian manifolds with a degenerate metric// Mathematics. — 2022. — *10*, № 1. — 154.
108. *Sobchuk V. S., Mikeš J., Pokorná O.* On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces// Novi Sad J. Math. — 1999. — *9.* — P. 309–312.
109. *Stanković M. S.* On canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces// Filomat. — 1999. — *13.* — P. 105–144.
110. *Stanković M. S., Ćirić M. S., Zlatanović M. Lj.* Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion// Filomat. — 2012. — *26*, № 3. — P. 439–451.

111. *Stanković M. S., Minčić S. M., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — *124.* — P. 77–90.
112. *Stanković M. S., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* Equitorsion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind// Int. Electron. J. Geom. — 2010. — *3*, № 2. — P. 26–39.
113. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity// Czech. Math. J. — 2015. — *65.* — P. 787–799.
114. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity// Czech. Math. J. — 2015. — *65.* — P. 787–799.
115. *Stepanov S. E., Mikeš J.* Betti and Tachibana numbers of compact Riemannian manifolds// Differ. Geom. Appl. — 2013. — *31*, № 4. — P. 486–495.
116. *Stepanov S., Mikeš J.* Application of the Hopf maximum principle to the theory of geodesic mappings// Kragujevac J. Math. — 2021. — *45*, № 5. — P. 781–786.
117. *Stepanov S., Mikeš J.* What is the Bochner technique and where is it applied?// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — P. 709–719.
118. *Thomas J. M.* Asymmetric displacement of a vector// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — *28*, № 4. — P. 658–670.
119. *Thomas T. Y.* On projective and equiprojective geometries of paths// Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1925. — *11.* — P. 198–203.
120. *Thomas T. Y.* Note on the projective geometry of paths// Bull. Am. Math. Soc. — 1925. — *31.* — P. 318–322.
121. *Vesić N. O., Stanković M. S.* Invariants of special second-type almost geodesic mappings of generalized Riemannian space// Mediterr. J. Math. — 2018. — *15*, № 60.
122. *Vesić N. O., Velimirović L. S., Stanković M. S.* Some invariants of equitorsion third type almost geodesic mappings// Mediterr. J. Math. — 2016. — *13.* — P. 4581–4590.
123. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj.* Invariants for geodesic and F-planar mappings of generalized Riemannian spaces// Quaest. Math. — 2021. — *44*, № 7. — P. 983–996.
124. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj., Velimirović A. M.* Projective invariants for equitorsion geodesic mappings of semi-symmetric affine connection spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *472*, № 2. — P. 1571–1580.
125. *Vrançeanu G.* Proprietati globale ale spatiilor bui Riemann cu conexiune abina constanta// Stud. Cerc. Mat. Acad. RPR. — 1963. — *14*, № 1. — P. 7–22.
126. *Weyl H.* Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung// Göttinger Nachrichten. — 1921. — P. 99–112.
127. *Zlatanović M. Lj.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized Riemannian spaces// Appl. Math. Lett. — 2011. — *24*, № 5. — P. 665–671.
128. *Zlatanović M. Lj.* New projective tensors for equitorsion geodesic mappings// Appl. Math. Lett. — 2012. — *25*, № 5. — P. 890–897.
129. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* On equitorsion concircular tensors of generalized Riemannian spaces// Filomat. — 2014. — *28*, № 3. — P. 463–471.
130. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* Geodesic mapping onto Kählerian spaces of the first kind// Czech. Math. J. — 2014. — *64*, № 4. — P. 1113–1122.
131. *Zlatanović M. Lj., Stanković V.* Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *450*, № 1. — P. 480–489.
132. *Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S., Stanković M. S.* Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *435*, № 1. — P. 578–592.

Ryparova Lenka
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `lenka.ryparova01@upol.cz`

Mikeš Josef
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `josef.mikes@upol.cz`

Peška Patrik
Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия
E-mail: `patrik.peska@upol.cz`