



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 221 (2023). С. 71–92
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-221-71-92

УДК 517.958; 629.7.052

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ. II

© 2023 г. В. М. МОРОЗОВ, В. И. КАЛЕНОВА, М. Г. РАК

Аннотация. Рассматриваются задачи стабилизации стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях в предположении, что центр масс движется по круговой орбите. Математическими моделями рассматриваемых задач являются системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Представлен строгий аналитический подход к изучению этой проблемы, который позволяет эффективно и корректно строить алгоритмы стабилизации. Метод основан на приводимости нестационарных систем, описывающих указанные задачи, к стационарным системам. Предложены решения ряда задач стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных систем. Представлены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов, подтверждающие эффективность разработанной методики. Настоящая статья является второй частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 220. — С. 71–85.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, приводимость, стационарные движения, линеаризованные уравнения движений спутника, стабилизация, управляемость, алгоритмы управления.

STABILIZATION OF STATIONARY MOTIONS OF A SATELLITE NEAR THE CENTER OF MASS IN A GEOMAGNETIC FIELD. II

© 2023 V. M. MOROZOV, V. I. KALENOVA, M. G. RAK

ABSTRACT. In this paper, we consider problems of stabilization of stationary motions (equilibrium positions and regular precessions) of a satellite near the center of mass in gravitational and magnetic fields under the assumption that the center of mass moves in a circular orbit. Mathematical models of the problems considered are systems of differential equations with periodic coefficients. We present a rigorous analytical approach to this problem, which allows efficient and correct construction of stabilization algorithms. The method is based on the reducibility of nonstationary systems that describe these problems to stationary systems. Solutions for a number of problems of stabilizing stationary motions of a satellite with the help of magnetic systems are proposed. We present the results of mathematical modeling of the algorithms, which confirm the effectiveness of the developed methodology. This paper is the second part of the work. The first part is: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2023. — 220. — P. 71–85.

Keywords and phrases: linear nonstationary system, reducibility, stationary motions, linearized equations of satellite motions, stabilization, controllability, control algorithms.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 2. Анализ и синтез приводимых линейных нестационарных систем управления . . .	72
2.1. Основные понятия линейной теории управления	72
2.2. Приведение линейных систем, нестационарных по управлению и наблюдению к стационарным системам	76
2.3. Алгоритмы оценивания и управления	78
2.4. Методические примеры	85
Список литературы	89

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе кратко изложены подходы к решению задач управления и оценивания линейных нестационарных систем (ЛНС) определенного класса, приводимых к стационарным системам. Более подробно эта теория изложена в [7].

В разделе 2.1 формулируются основные понятия линейной теории управления.

В разделе 2.2 рассмотрен класс ЛНС, содержащих управления и измерения, которые допускают приведение к стационарным системам большего порядка, чем исходная система.

В разделе 2.3 рассматриваются алгоритмы управления и оценивания для приводимых нестационарных систем.

В разделе 2.4 приведены методические примеры, иллюстрирующие представленные теоретические результаты.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается динамическая система, поведение которой описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad \sigma = C(t)x. \quad (2.1.1)$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор состояния линейной системы; $u(t)$ — r -мерный вектор входных переменных (управляющих воздействий или возмущений); $\sigma(t)$ — l -мерный вектор наблюдаемых переменных системы (или измерений); $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — известные матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n \times n)$, $(n \times r)$, $(l \times n)$ соответственно.

Задачи оценивания и управления, часто возникающие на практике, можно сформулировать следующим образом.

Задача оценивания. По измерениям величин $\sigma(\tau)$ и $u(\tau)$ на отрезке $\tau \in [t_0, t]$ определить к моменту времени t вектор состояния системы (2.1.1).

Задача управления. Пусть заданы начальное $x(t_0)$ и конечное $x(t)$ состояния системы (2.1.1). Требуется сформировать такое управление $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, которое переводило бы систему из состояния $x(t_0)$ в состояние $x(t)$.

Одной из задач управления является задача стабилизации, т. е. построение управления в виде обратной связи по состоянию, которое обеспечит асимптотическую устойчивость нулевого решения системы, замкнутой этим управлением.

Совместная задача оценивания и управления.

По измерениям величины $\sigma(\tau)$, на отрезке $\tau \in [t_0, t]$ сформировать такое управление $u(\tau)$ ($t_0 \leq \tau \leq t$), которое переводило бы систему из начального состояния $x(t_0)$ в некоторое заданное состояние $x(t)$.

Очевидно, что приступать к решению указанных задач разумно лишь в случае, когда установлено, что они разрешимы. Разрешимость этих задач математически формализуется при помощи понятий наблюдаемости и управляемости, введенных Р. Е. Калманом [10, 11, 54].

2.1.1. Наблюдаемость. По известному вектору измерений $\sigma(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ требуется определить вектор состояния, считая функцию $u(t)$ известной на интервале $[t_0, t_1]$.

Определение 2.1. Система (2.1.1) называется наблюдаемой в момент времени t , если существует конечный момент $t_0 < t$ такой, что можно определить состояние системы $x(t)$ по вектору измерений $\sigma(\tau)$ при $\tau \in [t_0, t]$.

Система

$$C(t)x(t) = \sigma(t)$$

представляет собой систему l уравнений с n неизвестными. В большинстве практических случаев количество измерений меньше размерности вектора состояния, поэтому $l < n$,

Знание вектора $\sigma(t)$ в фиксированный момент времени t не дает достаточной информации для восстановления вектора состояния x . Для решения поставленной задачи следует учитывать всю имеющуюся информацию $\sigma(\tau)$ о векторе $x(\tau)$ на отрезке времени $\tau \in [t_0, t]$.

Далее при исследовании наблюдаемости рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \sigma = C(t)x. \quad (2.1.2)$$

Вектор $\sigma(\tau)$ в момент $\tau \in [t_0, t]$ можно представить в виде

$$\sigma(\tau) = C(\tau)\Phi(\tau, t)x(t), \quad (2.1.3)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E_n.$$

Уравнение (2.1.3) должно удовлетворяться при единственном значении $x(t)$ для любого $\tau \in [t_0, t]$.

Введем матрицу

$$G(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t)C^\top(\tau)C(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau. \quad (2.1.4)$$

Очевидно, что матрица $G(t, t_0)$ является симметрической и неотрицательно определенной (это означает, что для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^n$ квадратичная форма $\eta^\top G \eta \geq 0$).

Имеет место следующий общий критерий наблюдаемости системы (2.1.2) [7, 11, 54].

Теорема 2.1. Система (2.1.2) наблюдаема в момент времени t тогда и только тогда, когда существует такой момент времени $t_0 < t$, что матрица $G(t, t_0)$ является положительно определенной.

Доказательство этой теоремы можно найти в [11, 54].

Основной недостаток критерия наблюдаемости, даваемого этой теоремой, состоит в том, что фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ системы (2.1.2) должна быть известна. Но, за исключением специальных случаев, матрица $\Phi(t, t_0)$ не может быть найдена в замкнутой форме.

Для системы (2.1.2), элементы матриц $A(t)$ и $C(t)$ которой являются непрерывно дифференцируемыми функциями $n - 2$ и $n - 1$ раз соответственно, существует алгебраический достаточный критерий наблюдаемости, не требующий знания фундаментальной матрицы системы. Имеет место

Теорема 2.2 (см. [7, 13, 43]). Если на отрезке $[t_0, t]$ можно указать точку t_* , в которой

$$\begin{aligned} \text{rank}(N(t_*)) &= n, \quad N(t_*) = [L_1(t_*), \dots, L_n(t_*)], \\ L_1(t_*) &= C^\top(t_*), \quad L_k(t_*) = A^\top(t_*)L_{k-1}(t_*) + \dot{L}_{k-1}(t_*) \quad (k = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

то система (2.1.2) является наблюдаемой в момент t .

2.1.2. Управляемость.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u. \quad (2.1.6)$$

Определение 2.2. Система (2.1.6) называется управляемой в момент t_0 , если для любой пары точек ξ и η в пространстве состояний $\{x\}$ существуют конечный момент $t \geq t_0$ и допустимое управление $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, переводящее систему (2.1.6) из состояния $x(t_0) = \xi$ в состояние $x(t) = \eta$.

Управление $u(\tau)$ называется допустимым, если оно ограничено и кусочно-непрерывно на $[t_0, t]$.

Введем симметричную неотрицательно определенную матрицу (Грамиан управляемости)

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) d\tau.$$

Теорема 2.3 (см. [7, 11, 54]). Система (2.1.6) управляема в момент t_0 тогда и только тогда, когда существует такой конечный момент времени $t \geq t_0$, для которого матрица $W(t, t_0)$ положительно определена.

Достаточное условие управляемости для класса нестационарных систем (2.1.6), элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ которых являются непрерывно дифференцируемыми функциями соответственно $n-2$ и $n-1$ раз, дается следующей теоремой.

Теорема 2.4 (см. [7, 13, 43]). Если на отрезке $[t_0, t]$ можно указать такую точку t_* , в которой

$$\begin{aligned} \text{rank } U(t_*) &= n, \quad U(t_*) = [L_1(t_*), \dots, L_n(t_*)], \\ L_1(t_*) &= B(t_*), \quad L_k(t_*) = A(t_*)L_{k-1}(t_*) - \dot{L}_{k-1}(t_*) \quad (k = 2, \dots, n), \end{aligned}$$

то система (2.1.6) является управляемой в момент t_0 .

Доказательство теорем из п. 2.1.1 и п. 2.1.2 можно найти в [13, 43].

2.1.3. Принцип двойственности задач наблюдения и управления.

Рассмотрим две системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad \sigma = C(t)x, \quad (2.1.7)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -A^\top(t)\xi + C^\top(t)v, \quad \zeta = B^\top(t)\xi. \quad (2.1.8)$$

Обозначим их переходные матрицы через $\Phi(t, t_0)$ и $\Psi(t, t_0)$

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E_n,$$

$$\frac{d\Psi(t, t_0)}{dt} = -A^\top(t)\Psi(t, t_0), \quad \Psi(t_0, t_0) = E_n.$$

Матрицы управляемости и наблюдаемости систем (2.1.7) и (2.1.8) имеют соответственно вид

$$G_x(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t) C^\top(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau,$$

$$W_x(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) d\tau,$$

$$G_\xi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Psi^\top(\tau, t) C^\top(\tau) C(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau,$$

$$W_{\xi}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau) B(\tau) B^{\top}(\tau) \Psi^{\top}(t, \tau) d\tau.$$

Из свойств сопряженных систем следует

$$\Phi(t, t_0) \Psi(t, t_0) = E_n \quad \text{или} \quad \Phi^{\top}(t, t_0) = \Psi(t_0, t),$$

откуда

$$G_x(t, t_0) = W_{\xi}(t, t_0); \quad W_x(t, t_0) = G_{\xi}(t, t_0).$$

Это означает, что справедлива

Теорема 2.5 (см. [25, 54]). Система (2.1.7) управляема (соответственно наблюдаема) тогда и только тогда, когда наблюдаема (соответственно управляема) сопряженная ей система (2.1.8).

Содержание теоремы составляет принцип двойственности задач наблюдения и управления.

Двойственность этих задач имеет большое значение и в теоретическом, и в практическом отношении, так как позволяет переносить результаты, полученные в задаче наблюдения (управления) на задачи управления (наблюдения).

В ряде случаев двойственность оказывает существенную помощь при доказательствах. Принцип двойственности может быть эффективен при решении практических задач, так как однотипность математического аппарата позволяет использовать одинаковые вычислительные программы при решении как задач управления (стабилизации), так и оценивания.

2.1.4. Критерии управляемости и наблюдаемости для стационарных систем. Для стационарных систем имеют место эффективные критерии управляемости и наблюдаемости, выраженные через элементы матриц A , B , C .

Теорема 2.6 (см. [2, 7, 13, 25, 54]). Для наблюдаемости линейной стационарной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad \sigma = Cx \quad (2.1.9)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } N = n$, где

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} -$$

матрица наблюдаемости.

Теорема 2.7 (см. [7, 50]). Линейная стационарная система (2.1.9) наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda E_n \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad (2.1.10)$$

где $\Lambda = \{\lambda : \det(\lambda E_n - A) = 0\}$.

Теорема 2.8 (см. [2, 7, 13, 25, 54]). Для управляемости линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1.11)$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг

$$\text{rank } U = n,$$

где $U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ — матрица управляемости.

Замечание 2.1. Если в системе (2.1.11) существует линейный интеграл, не зависящий от управления, то система, очевидно, не является управляемой.

Теорема 2.9 (см. [7, 50]). *Стационарная система (2.1.11) управляема тогда и только тогда, когда*

$$\text{rank} [A - \lambda E_n \quad B] = n \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \Lambda = \{\lambda : \det(\lambda E_n - A) = 0\}. \quad (2.1.12)$$

Критерии наблюдаемости (2.1.10) и управляемости (2.1.12) особенно удобны, если известны собственные значения матрицы системы. С их помощью можно устанавливать и достаточные условия ненаблюдаемости (неуправляемости), т. к. если хотя бы для одного собственного значения матрицы A нарушаются условия (2.1.10), ((2.1.12)), то система ненаблюдаема (неуправляема).

2.1.5. Критерии управляемости и наблюдаемости для стационарных многомерных систем второго порядка. Рассмотрим стационарную систему

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx &= Bu, \\ \sigma &= C_1x + C_2\dot{x}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Здесь x — вектор ($n \times 1$), M, D, K — постоянные квадратные ($n \times n$)-матрицы, матрица M является положительно определенной, u ($r \times 1$) — вектор управляющих воздействий, B — постоянная ($n \times r$)-матрица, σ ($l \times 1$) — вектор измерений, C_1, C_2 — постоянные ($l \times n$)-матрицы.

Теорема 2.10 (см. [7, 55]). *Для управляемости системы (2.1.13) необходимо и достаточно, чтобы $\forall \lambda \in \Lambda \quad \Lambda = \{\lambda : \det(M\lambda^2 + D\lambda + K) = 0\}$ выполнялось условие*

$$\text{rank} [M\lambda^2 + D\lambda + K \quad B] = n. \quad (2.1.14)$$

Теорема 2.11 (см. [7, 55]). *Для наблюдаемости системы (2.1.13) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M\lambda^2 + D\lambda + K \\ C_1 + C_2\lambda \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \Lambda = \{\lambda : \det(M\lambda^2 + D\lambda + K) = 0\}. \quad (2.1.15)$$

Критерии управляемости (2.1.14) и наблюдаемости (2.1.15) особенно удобны для механических систем, так как уравнения движения записываются, как правило, в виде уравнений второго порядка (уравнения Лагранжа 2-го рода).

Критерии управляемости и наблюдаемости для нестационарных систем, сформулированные в этом параграфе, достаточно сложны и не очень конструктивны, в отличие от критериев для стационарных систем, поэтому целесообразно выделить те классы ЛНС, для которых эти критерии будут подобны критериям для стационарных систем. Об этом пойдет речь в разделе 2.2.

2.2. ПРИВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ И НАБЛЮДЕНИЮ К СТАЦИОНАРНЫМ СИСТЕМАМ

Понятие приводимости, введенное Ляпуновым для линейных однородных нестационарных систем, было распространено на линейные нестационарные системы, содержащие управления и наблюдения [7].

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \quad \sigma = C(t)x, \quad (2.2.1)$$

где x ($n \times 1$) — вектор состояния системы; u ($r \times 1$) — вектор управляющих воздействий; σ ($l \times 1$) — вектор измерений; A ($n \times n$) = const, $B(t)$ ($n \times r$), $C(t)$ ($l \times n$) — матрицы, элементы которых непрерывно дифференцируемые функции t , $t \in I$, $I = [0 \leq t_0 \leq t < \infty)$.

Нестационарная система (2.2.1) может быть преобразована в полностью стационарную систему того же порядка в очень редких случаях [7]. Более реалистичным и применимым на практике, в частности для тех задач, которые рассматриваются в этой работе, является случай, когда возможно приведение исходной нестационарной системы к стационарной системе большего порядка.

Далее рассмотрим отдельно приведение к стационарным системам, систем, нестационарных по управлению

$$\dot{x} = Ax + B(t)u \quad (2.2.2)$$

и систем, нестационарных по наблюдению

$$\dot{x} = Ax, \quad \sigma = C(t)x. \quad (2.2.3)$$

2.2.1. Приведение систем, нестационарных по управлению. Рассмотрим линейную систему (2.2.2), нестационарную по управлению.

Пусть матрица $B(t)$ представляется в виде

$$B(t) = \sum_{j=1}^s \beta_j(t) B_j, \quad (2.2.4)$$

где $B_j (n \times r)$ — постоянные матрицы; $\beta_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) — линейно независимые непрерывно дифференцируемые функции времени t .

Будем предполагать, что функции $\beta_j(t)$ таковы, что можно ввести вектор $f(t) (m \times 1)$, s компонент которого представляют собой функции $\beta_j(t)$, а остальные компоненты $f_j(t)$ ($j = s+1, \dots, m$) выбраны так, чтобы поведение вектора $f(t)$ описывалось некоторой линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{f}(t) = S f(t), \quad S (m \times m) = \text{const}. \quad (2.2.5)$$

Это означает, что к выделенному таким образом классу функций $\beta_j(t)$, входящих в матрицу $B(t)$, относятся такие функции $f_i(t)$ как полиномы, экспоненты, синусы, косинусы произвольных частот и всевозможные комбинации этих функций.

Замечание 2.2. Вектор-функция $\beta(t) = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_s]^\top$ в общем случае не удовлетворяет системе вида (2.2.5) порядка s (пример см. ниже).

Замена переменных

$$x = F^\top(t) y, \quad F^\top(t) = f^\top(t) \otimes E_n \quad (2.2.6)$$

приводит систему (2.2.2) к стационарной системе большей размерности

$$\dot{y} = G y + B_y u, \quad y (mn \times 1), \quad (2.2.7)$$

где

$$G_{(mn \times mn)} = E_m \otimes A - S^\top \otimes E_n, \quad B_y^\top_{(r \times mn)} = \begin{bmatrix} B_1^\top & \dots & B_s^\top & O & \dots & O \\ (r \times n) & & (r \times n) & (r \times n) & & (r \times n) \end{bmatrix};$$

$O_{(r \times n)}$ — нулевая матрица; символом \otimes обозначено кронекеровское произведение [7, 42].

Кронекеровским произведением матриц $P_{(k \times l)} = [p_{ij}]$ и $Q_{(k' \times l')} = [q_{ij}]$ называется — блочная матрица $R = P \otimes Q$ ($kk' \times ll'$), определяемая по формуле $R = [p_{ij} Q]$ [42].

Преобразование (2.2.6), в котором вектор y удовлетворяет системе (2.2.7) с начальным условием $y(t_0) = y_0$, дает возможность связать вектор y с вектором состояния x , поведение которого описывается системой (2.2.2) с начальным условием $x(t_0) = F^\top(t_0) y(t_0)$.

2.2.2. Приведение систем, нестационарных по наблюдению. Рассмотрим линейную систему (2.2.3), нестационарную по наблюдению.

Пусть матрица $C(t)$ представима в виде

$$C(t) = \sum_{j=1}^p \alpha_j(t) C_j \quad (p \leq ln); \quad C_j = \text{const}, \quad (2.2.8)$$

где $\alpha_j(t)$ — линейно независимые функции, являющиеся решениями некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Обозначим через $f(t)$ вектор $f(t) = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m]^\top$, первые компонент являются функциями $\alpha_1(t), \dots, \alpha_p(t)$, который удовлетворяет уравнению вида (2.2.5) с соответствующей матрицей S .

Замена переменных

$$y = F(t) x, \quad F(t)_{(mn \times n)} = f(t) \otimes E_n \quad (2.2.9)$$

приводит систему (2.2.3) к стационарной системе большего порядка

$$\dot{y} = Gy, \quad \sigma = C_y y, \quad (2.2.10)$$

где $y(mn \times 1)$ — вектор состояния,

$$\underset{(mn \times mn)}{G} = S \otimes E_n + E_m \otimes A, \quad \underset{(l \times mn)}{C_y} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p \ O \ \dots \ O].$$

2.2.3. Приведение линейных нестационарных систем второго порядка. Рассмотрим систему второго порядка, нестационарную по управлению

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + Nx = B(t)u, \quad (2.2.11)$$

где $x(n \times 1)$ — вектор состояния системы; $u(r \times 1)$ — вектор управляющих воздействий; $D(n \times n) = \text{const}$, $N(n \times n) = \text{const}$, $B(t)(n \times r)$ — матрица, элементы которой непрерывно дифференцируемые функции t , $t \in I$, $I = [0 \leq t_0 \leq t < \infty)$.

Матрица $B(t)$ представима в виде (2.2.4):

$$B(t) = \sum_{j=1}^s \beta_j(t) B_j, \quad f^\top = [\beta_1 \ \dots \ \beta_s \ f_{s+1} \ \dots \ f_m], \quad \dot{f}(t) = Sf(t), \quad (2.2.12)$$

где $B_j(n \times r)$, $S(m \times m) = \text{const}$. Нестационарная по управлению система (2.2.10), в которой матрица $B(t)$ удовлетворяет условиям (2.2.11), при помощи преобразования

$$x = F^\top(t)y, \quad F^\top(t) = f^\top(t) \otimes E_n \quad (2.2.13)$$

приводится к стационарной системе с расширенным mn -мерным вектором состояния $y(t)$ [7, 8]

$$\ddot{y} + 2G\dot{y} + My = Qu, \quad (2.2.14)$$

где

$$G = S^\top \otimes E_n + E_m \otimes D, \quad M = (S^\top)^2 \otimes E_n + 2(S^\top \otimes D) + E_m \otimes N,$$

$$\underset{(r \times mn)}{Q}^\top = \left[\underset{(r \times n)}{B_1^\top}, \dots, \underset{(r \times n)}{B_s^\top}, \underset{(r \times n)}{O}, \dots, \underset{(r \times n)}{O} \right].$$

Отметим, что управляемость и наблюдаемость приводимых ЛНС можно исследовать, как исходя из нестационарных систем, так и анализируя соответствующие приведенные стационарные системы. Как уже указывалось, полученные стационарные системы являются избыточными по отношению к исходным системам. Если приведенная стационарная система управляема (наблюдаема), то управляема (наблюдаема) и исходная нестационарная система. Однако, в силу ее избыточности, неуправляемость (ненаблюдаемость) стационарной системы может и не повлечь неуправляемость (ненаблюдаемость) исходной нестационарной системы.

2.3. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Наличие свойств наблюдаемости и управляемости линейных систем позволяет строить алгоритмы оценивания и управления с заранее заданными свойствами.

2.3.1. Алгоритмы оценивания. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + q(t), \quad (2.3.1)$$

$$z(t) = C(t)x + r(t). \quad (2.3.2)$$

Здесь $x(t)$ — n -мерный вектор состояния; $z(t)$ — l -мерный вектор выходных переменных (измерений); $A(t)$, $C(t)$ — известные ограниченные матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n \times n)$, $(l \times n)$ соответственно; функции $q(t)$ — n -мерный вектор погрешностей в системе и $r(t)$ — l -мерный вектор погрешностей измерения, состоящие из систематических и случайных составляющих.

Задача оценивания вектора состояния линейной системы (2.3.1) по данным измерениям (2.3.2) заключается в том, чтобы на некотором интервале времени $t \in [t_0, T]$ найти оценку $\tilde{x}(t)$, в определенном смысле близкую к вектору состояния $x(t)$, при этом критерии малости ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ могут быть различными.

Существуют различные типы алгоритмов оценивания вектора состояния, зависящие от моделей погрешностей $q(t)$ и $r(t)$, и выбранного критерия малости ошибок оценки.

Известно, что структура линейного фильтра для нахождения оценок \tilde{x} вектора x имеет вид [2, 7, 54]

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + L(t)(z - C(t)\tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0. \quad (2.3.3)$$

Матрица $L(t)(n \times l)$ подлежит выбору. Поведение ошибок оценки описывается уравнением

$$\Delta \dot{x} = [A(t) - L(t)C(t)]\Delta x + q(t) - L(t)r(t), \quad \Delta x(t_0) = \Delta x_0. \quad (2.3.4)$$

Для работоспособности алгоритма оценивания (2.3.3) необходимо, чтобы имела место асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнений ошибок оценки (2.3.4) при $q = 0$, $r = 0$. Если система наблюдаема, то выполнение этого условия при наличии наблюдаемости системы можно обеспечить путем соответствующего выбора матрицы $L(t)$.

Если в качестве моделей погрешностей принять случайные процессы типа белого шума с нулевыми средними и заданными корреляционными матрицами

$$\begin{aligned} M [q(t) \quad q^\top(\tau)] &= Q(t)\delta(t - \tau), \\ M [r(t) \quad r^\top(\tau)] &= R(t)\delta(t - \tau) \end{aligned}$$

(где $Q(t)(n \times n)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица, $R(t)(l \times l)$ — симметрическая положительно определенная матрица, $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция Дирака), то алгоритм, доставляющий минимум дисперсии ошибок оценки, имеет структуру (2.3.3), в которой матрица $L(t)$ определяется из соотношений [2, 7, 54]

$$L(t) = P(t)C^\top(t)R^{-1}C(t), \quad (2.3.5)$$

где $P(t)$ — решение матричного уравнения Риккати

$$\dot{P} = A(t)P + PA^\top(t) - PC^\top(t)R^{-1}C(t)P + Q(t), \quad P(t_0) = P_0. \quad (2.3.6)$$

Здесь $P(t) = M [\Delta x(t)\Delta x^\top(t)]$ — ковариационная матрица ошибок оценки; P_0 — заданная неотрицательно определенная матрица. Алгоритм, описываемый уравнениями (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6) называется оптимальным фильтром Калмана—Бьюси [2, 7, 11, 25].

2.3.2. Алгоритмы управления.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + q(t), \quad (2.3.7)$$

где $x(t)$ — n -мерный вектор состояния; $u(t)$ — r -мерный вектор входных переменных; $q(t)$ — вектор возмущений; $A(t)$, $B(t)$ — известные ограниченные при всех $t \geq t_0$ матрицы с действительными кусочно-непрерывными элементами размерности $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно.

Цель задачи управления — сконструировать такой закон управления, чтобы вектор состояния соответствующей замкнутой системы обладал желаемыми свойствами.

Рассмотрим линейный закон управления в предположении, что измеряются все компоненты вектора $x(t)$. Сформируем закон управления в виде

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad (2.3.8)$$

где $K(t)(r \times n)$ — некоторая матрица, подлежащая выбору. Система, замкнутая управлением (2.3.8), имеет вид

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + q(t). \quad (2.3.9)$$

Одна из задач управления состоит в выборе $u(t)$, переводящего систему (2.3.7) из произвольного состояния $x(t_0)$ в начало координат за конечное время $t_1 - t_0 > 0$ при $q = 0$. Другая задача (задача стабилизации) состоит в том, чтобы построить такое управление (2.3.8), при котором замкнутая система (2.3.9) при $q = 0$ была бы асимптотически устойчива в смысле Ляпунова. В этом

случае говорят, что система (2.3.7) стабилизируема при помощи стабилизирующей обратной связи (2.3.8).

Предположим теперь, что при формировании закона управления измерению доступны не все компоненты вектора состояния x , а лишь их l линейных комбинаций (2.3.2). Тогда, если пара $(A(t), C(t))$ наблюдаема, то справедлива оценка $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$, определяемая уравнением

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)u(t) + L(t)(\sigma - C(t)\tilde{x}), \quad (2.3.10)$$

при этом уравнение ошибок оценки будет асимптотически устойчивым (при $q = 0, r = 0$).

Далее построим закон управления в форме обратной связи по оценке

$$u(t) = -K(t)\tilde{x}(t). \quad (2.3.11)$$

Подставив выражение (2.3.11) в систему (2.3.7) и (2.3.10), будем иметь замкнутую систему размерности $2n$ относительно переменных x и \tilde{x}

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x - B(t)K(t)\tilde{x} + q(t), \\ \dot{\tilde{x}} &= [A(t) - B(t)K(t) - L(t)C(t)]\tilde{x} + L(t)C(t)x + L(t)r(t). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Введя ошибку оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, преобразуем систему (2.3.12) к виду

$$\Delta \dot{x} = [A(t) - L(t)C(t)]\Delta x + q(t) - L(t)r(t), \quad (2.3.13)$$

$$\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)]x + B(t)K(t)\Delta x + q(t). \quad (2.3.14)$$

Поведение решений уравнений (2.3.13), (2.3.14) определяется свойствами матриц $A(t) - L(t)C(t)$ и $A(t) - B(t)K(t)$, в которых матрицы $L(t)$ и $K(t)$ при сформулированных выше условиях могут быть независимо выбраны так, что при $q = 0, r = 0$ уравнения (2.3.13), (2.3.14) будут асимптотически устойчивы.

2.3.3. Алгоритмы управления и оценивания для стационарных систем. Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \sigma = Cx. \quad (2.3.15)$$

Здесь $x(t)(n \times 1)$ — вектор состояния; $u(r \times 1)$ — вектор управляющих воздействий, $\sigma(l \times 1)$ — вектор измерений (наблюдений); $A(n \times n)$, $B(n \times r)$, $C(l \times n)$ — постоянные матрицы.

Будем предполагать, что система (2.3.15) управляема и наблюдаема. Тогда для нее можно строить как оптимальные, так и асимптотические алгоритмы управления и оценивания.

Предположим, что вектор состояния $x(t)$ доступен точному измерению в любой момент времени. Тогда можно реализовать закон управления в виде линейной обратной связи

$$u(t) = -Kx(t), \quad (2.3.16)$$

где $K(r \times n)$ — постоянная матрица коэффициентов усиления.

Система (2.3.15), замкнутая управлением (2.3.16), имеет вид

$$\dot{x} = (A - BK)x. \quad (2.3.17)$$

При наличии измерения $\sigma(t)$ оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ можно строить согласно алгоритму

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu(t) + L(\sigma - C\tilde{x}), \quad L(n \times l) = \text{const}. \quad (2.3.18)$$

Уравнения ошибок оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ имеют вид

$$\Delta \dot{x} = (A - LC)\Delta x. \quad (2.3.19)$$

Постоянные матрицы K и L в асимптотических алгоритмах управления (2.3.16) и оценивания (2.3.18) могут быть выбраны на основании следующих утверждений [2, 7, 54].

Тогда постоянную матрицу K в законе управления (2.3.16) можно выбрать так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы (2.3.17) совпадал с любым наперед заданным многочленом n -ой степени с действительными коэффициентами.

В уравнениях (2.3.18) постоянную матрицу L можно выбрать так, чтобы характеристический многочлен уравнений ошибок оценки (2.3.19) совпадал с любым наперед заданным многочленом n -ой степени с действительными коэффициентами.

На основании этих утверждений матрицы K и L можно выбрать так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость уравнений (2.3.17) и (2.3.19), т. е. так, чтобы $x(t) \rightarrow 0$ и $\Delta x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ с любой скоростью сходимости.

Другой вариант выбора коэффициентов управления в системе (2.3.15) — выбор из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^{\top}(t)Wx(t) + u^{\top}(t)W_u u(t)] dt.$$

Здесь $W(n \times n)$, $W_u(r \times r)$ — неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно.

Если система (2.3.15) управляема, то оптимальное управление имеет вид [2, 7, 54]

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = W_u^{-1}B^{\top}P.$$

Матрица P размерности $n \times n$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^{\top}P - PBW_u^{-1}B^{\top}P + W = 0.$$

Система (2.3.15), замкнутая этим управлением, будет асимптотически устойчива.

2.3.4. Управление и оценивание нестационарных приводимых систем. Для приводимых нестационарных систем, описанных в разделе 2.2, решение задачи управления состоит из следующих этапов:

1. приведение данной нестационарной системы к стационарной системе большего порядка;
2. анализ управляемости (наблюдаемости) для полученной стационарной системы;
3. построение алгоритмов управления (оценивания) для полученной стационарной системы;
4. обратный переход к соответствующим исходным переменным.

Рассмотрим построение закона управления в системе

$$\dot{x} = Ax + B(t)u, \quad (2.3.20)$$

матрица $B(t)$ которой удовлетворяет условиям (2.2.4), (2.2.5).

Система (2.3.20), нестационарная по управлению, приводится к стационарной системе вида (2.2.7) к стационарной системе большего порядка

$$\dot{y} = Gy + B_y u, \quad y(mn \times 1), \quad (2.3.21)$$

где

$$G_{(mn \times mn)} = E_m \otimes A - S^{\top} \otimes E_n, \quad B_y^{\top}_{(r \times mn)} = \begin{bmatrix} B_1^{\top} & \dots & B_s^{\top} & O & \dots & O \\ (r \times n) & & (r \times n)(r \times n) & & & (r \times n) \end{bmatrix};$$

при помощи замены переменных (2.2.6)

$$x = F^{\top}(t)y, \quad F^{\top}(t) = f^{\top}(t) \otimes E_n. \quad (2.3.22)$$

Будем предполагать, что система (2.3.21) управляема. Тогда закон управления в виде обратной связи имеет вид

$$u(t) = -Ky(t), \quad (mn \times 1)y(t), \quad K_{(r \times mn)} = \text{const}. \quad (2.3.23)$$

Матрицу K можно выбрать так, чтобы обеспечить любую степень затухания замкнутой системы

$$\dot{y} = G_k y, \quad G_k = G - B_y K. \quad (2.3.24)$$

Тогда при указанном выборе элементов матрицы K вектор $y(t) \rightarrow 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leq r_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $r_1 = \text{const} > 0$, $\gamma_1 > 0$ — заданная величина.

Вектор $x(t)$ согласно (2.3.22) подчиняется неравенству

$$\|x(t)\| \leq \|F^\top(t)\| \cdot \|y(t)\|, \quad t \geq 0. \quad (2.3.25)$$

Элементы $f_{ij}(t)$ матрицы $F(t)$ есть решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.2.5) ($\dot{f} = Sf$), поэтому

$$\|F^\top(t)\| \leq r_2 e^{\gamma_2 t}, \quad t \geq 0, \quad r_2 = \text{const} > 0,$$

где γ_2 — некоторая постоянная величина.

Неравенство (2.3.25) можно переписать в виде

$$\|x(t)\| \leq r_1 r_2 e^{(\gamma_1 + \gamma_2)t}, \quad t \geq 0.$$

Выбирая γ_1 таким образом, чтобы $\gamma_1 + \gamma_2 \leq -\gamma_0 < 0$, где γ_0 — желаемая степень затухания переменных $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), получаем

$$\|x(t)\| \leq r_3 e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, управление (2.3.23) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.3.24).

Если в законе управления (2.3.23) матрица K выбирается из условия оптимизации функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^\top(t) W_y y(t) + u^\top(t) W_u u(t)] dt$$

(здесь $W_y (mn \times mn)$, $W_u (r \times r)$ — неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно), тогда $K = W_u^{-1} B_y^\top P$.

Матрица P размерности $mn \times mn$ является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PG + G^\top P - PB_y W_u^{-1} B_y^\top P + W_y = 0.$$

В таком случае γ_* — степень затухания $y(t)$ уже не является задаваемой, а определяется видом функционала.

Тогда

$$\|y(t)\| \leq r_{10} e^{-\gamma_* t}, \quad t \geq 0, \quad r_{10} = \text{const} > 0.$$

Элементы $f_{ij}(t)$ матрицы $F(t)$ ограничены, поэтому

$$\|F^\top(t)\| \leq r_{20}, \quad t \geq 0, \quad r_{20} = \text{const} > 0.$$

Тогда для оценки вектора состояния исходной системы $x(t)$ имеет место неравенство

$$\|x(t)\| \leq r_{10} r_{20} e^{\gamma_* t}, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, и в этом случае управление (2.3.23) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.3.24).

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие $u = -Ky$ необходимо вводить непосредственно в исходную систему.

Введем mn -мерный вектор

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix},$$

первые n компонент которого представляют собой вектор x , а дополнительный вектор x_d имеет размерность $(mn - n) \times 1$.

Выберем матрицу $F_d^\top(t)$ размерности $((mn - n) \times mn)$ таким образом, чтобы квадратная матрица

$$T(t) = \begin{bmatrix} F^\top(t) \\ F_d^\top(t) \end{bmatrix},$$

первые n строк которой составляет матрица $F^\top(t)$, была невырожденной.

Представим обратную матрицу $T^{-1}(t)$ в блочной форме

$$T^{-1}(t) = \begin{bmatrix} L_1(t) & L_2(t) \\ (mn \times n) & (mn \times (mn-n)) \end{bmatrix}.$$

Из соотношения $T(t)T^{-1}(t) = E_{mn}$ следуют условия для матриц $F(t)$, $F_d(t)$, $L_1(t)$, $L_2(t)$, а именно

$$F^\top L_1 = E_n, \quad F^\top L_2 = O_n, \quad F_d^\top L_1 = O_n, \quad F_d^\top L_2 = E_{mn-n}. \quad (2.3.26)$$

Рассмотрим невырожденное преобразование

$$X = T(t)y, \quad y = T^{-1}(t)X \quad (2.3.27)$$

или

$$x = F^\top(t)y, \quad x_d = F_d^\top(t)y, \quad y = L_1(t)x + L_2(t)x_d. \quad (2.3.28)$$

Учитывая, что

$$\dot{F}^\top = F^\top H, \quad H = (S^\top \otimes E_n), \quad (2.3.29)$$

можно считать, что матрица $F_d^\top(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot{F}_d^\top = F_d^\top H. \quad (2.3.30)$$

Дифференцируя соотношения (2.3.28), используя уравнения (2.3.29), (2.3.30) и свойства кронекеровского произведения, получим $F^\top(E_m \otimes A) = (f^\top \otimes E_n)(E_m \otimes A) = A(f^\top \otimes E_n) = AF^\top$, $F^\top(t)Q = B(t)$.

Тогда система уравнений, содержащая исходную нестационарную систему и уравнения для дополнительных переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(t)u, \\ \dot{x}_d &= F_d^\top(t)(E_m \otimes A)(L_1(t)x + L_2(t)x_d) + B_d(t)u, \quad B_d(t) = F_d^\top(t)Q. \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Уравнения относительно компонент x , x_d системы, замкнутой управлением

$$u = -Ky = -K(L_1(t)x + L_2(t)x_d), \quad (2.3.32)$$

в которой матрица K выбрана из условий асимптотической устойчивости стационарной системы (2.3.24), имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B(t)K(L_1(t)x + L_2(t)x_d), \\ \dot{x}_d &= F_d^\top(t)[E_m \otimes A - B_y K](L_1(t)x + L_2(t)x_d). \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Решения $x(t)$, $x_d(t)$ этой системы стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, причем с заданной степенью затухания, в силу выбора матрицы K , так как компоненты векторов $x(t)$, $x_d(t)$ связаны с компонентами вектора y преобразованием (2.3.28). В самом деле, матрица $T(t)$ допускает в силу (2.3.29), (2.3.30) оценку $\|T(t)\| \leq \delta e^{\kappa t}$, а вектор $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ с любой наперед заданной степенью затухания.

Замечание 2.3. Следует отметить, что если $m = 2$, матрицу $F_d^\top(t)$ можно представить в виде, аналогичном (2.2.8), $F_d^\top(t) = f_d^\top(t) \otimes E_n$ ($f_d(t)$ — двумерный вектор). В этом случае система уравнений (2.3.31) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(t)u, \\ \dot{x}_d &= Ax_d + B_d(t)u. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Рассмотрим вопрос о построении оценки вектора состояния системы

$$\dot{x} = Ax, \quad \sigma = C(t)x, \quad A(n \times n) = \text{const}, \quad (2.3.35)$$

где матрица $C(t)$ удовлетворяет условиям

$$C(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i(t)C_i, \quad f = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_p \quad f_{p+1} \quad \dots \quad f_m]^\top, \quad \dot{f} = Sf. \quad (2.3.36)$$

Здесь C_i ($i = 1, 2, \dots, p$), S_i — постоянные матрицы. Система (2.3.35) при помощи преобразования (2.2.8)

$$y = F(t)x, \quad F(t) = (f(t) \otimes E_n)x \quad (2.3.37)$$

приводится к стационарной системе

$$\dot{y} = Gy, \quad \sigma = C_y y, \quad (2.3.38)$$

где $y(mn \times 1)$ — вектор состояния,

$$\underset{(mn \times mn)}{G} = S \otimes E_n + E_m \otimes A, \quad \underset{(l \times mn)}{C_y} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p \ O \ \dots \ O].$$

Будем предполагать, что стационарная система (2.3.38) является наблюдаемой. Алгоритм оценивания строится на основании стационарной системы (2.3.38)

$$\dot{\tilde{y}} = G\tilde{y} + L(\sigma - C_y \dot{\tilde{y}}), \quad \sigma = C_y y, \quad \tilde{y}(t_0) = 0. \quad (2.3.39)$$

Постоянную матрицу $L(mn \times l)$ можно выбирать из условий асимптотической устойчивости с любой степенью затухания ошибки оценки Δy

$$\Delta \dot{y} = (G - LC_y)\Delta y, \quad \Delta y(t_0) = y(t_0). \quad (2.3.40)$$

Ошибка оценки Δy удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta y(t)\| \leq M_1 \exp(\gamma_1 t),$$

где $M_1 = \text{const} > 0$, а $\gamma_1 < 0$ — любое наперед заданное число.

Покажем, что выбор матрицы L можно осуществить так, чтобы обеспечить любую степень затухания ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ вектора состояния исходной системы. Оценки векторов $x(t)$ и соответствующие им ошибки оценок $\Delta x(t)$ связаны с \tilde{y} , $\Delta y(t)$, согласно (2.3.37), соотношениями

$$\tilde{y} = F(t)\tilde{x}, \quad \Delta y = F(t)\Delta x. \quad (2.3.41)$$

Системы (2.3.41) представляют собой переопределенные системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент векторов \tilde{x} , Δx . Из соотношений (2.3.41) выразим \tilde{x} , Δx

$$\tilde{x} = D(t)\tilde{y}, \quad \Delta x = D(t)\Delta y, \quad (2.3.42)$$

где $D(t)$ — матрица, удовлетворяющая уравнению $D(t)F(t) = E_n$.

В частности,

$$D(t) = [F^\top(t)F(t)]^{-1}F^\top(t). \quad (2.3.43)$$

Элементы матрицы $F(t)$ являются решениями линейной системы с постоянными коэффициентами (2.2.5). Учитывая соотношение (2.3.43), будем иметь

$$\|D(t)\| \leq M_2 \exp(\gamma_2 t),$$

где $M_2 = \text{const} > 0$, а γ_2 — некоторое число.

Тогда

$$\|\Delta x(t)\| \leq \|D(t)\| \cdot \|\Delta z(t)\| \leq M_1 M_2 \exp((\gamma_1 + \gamma_2)t).$$

Выбирая $\gamma_1 < -\gamma_0 - \gamma_2$, можно добиться любой наперед заданной степени затухания $\gamma_0 > 0$ ошибки оценки $\Delta x(t)$.

Алгоритм оценивания исходной системы размерности n включает в себя:

1. алгоритм оценивания стационарной системы (2.3.39),
2. вычисление матрицы $D(t)$ (в том числе обращение матрицы $F^\top F$ размерности $n \times n$),
3. переход от оценок \tilde{y} к оценкам \tilde{x} по формулам (2.3.42).

2.4. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим простую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u \sin \omega t, \\ \dot{x}_2 &= u \cos \omega t.\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Запишем ее в матричном виде

$$\dot{X} = b(t)u, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Вектор $b(t)$ представим в виде (2.2.4)

$$b(t) = \sin \omega t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \omega t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (r = 1, \quad s = 2).$$

Очевидно, этот вектор удовлетворяет уравнению (2.2.5)

$$\dot{b} = Sb, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

и может быть записан в виде

$$b(t) = e^{St}b(0), \quad b(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных (2.2.6)

$$X = e^{St}Y\tag{2.4.2}$$

приводит систему (2.4.1) к стационарной системе

$$\dot{Y} = -S^T Y + b(0)u$$

или в скалярной форме

$$\dot{y}_1 = -\omega y_2, \quad \dot{y}_2 = \omega y_1 + u.\tag{2.4.3}$$

Система (2.4.3), очевидно, управляема.

Управление с виде обратной связи имеет вид

$$u = -K_y^T Y, \quad K_y^T = [k_1 \quad k_2].$$

Замкнутая этим управлением система (2.4.3):

$$\dot{y}_1 = -\omega y_2, \quad \dot{y}_2 = (\omega - k_1)y_1 - k_2 y_2.\tag{2.4.4}$$

Параметры k_1, k_2 могут быть выбраны из условия асимптотической устойчивости системы (2.4.4).

Управление, которое следует вводить в исходную систему, имеет вид

$$u(t) = -K_y^T e^{-St} X(t).\tag{2.4.5}$$

Нестационарная система (2.4.1), замкнутая этим управлением, может быть записана в форме

$$\dot{X} = N(t)X, \quad N(t) = -e^{St}b(0)K_y^T e^{-St}X\tag{2.4.6}$$

или в скалярном виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -[(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t)x_1 + (-k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t)x_2] \sin \omega t, \\ \dot{x}_2 &= -[(k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t)x_1 + (-k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t)x_2] \cos \omega t.\end{aligned}$$

Однородная нестационарная система (2.4.6) асимптотически устойчива, так как стационарная система (2.4.4) в соответствии с выбором k_1, k_2 асимптотически устойчива, а преобразование (2.4.2) ограничено.

Замечание 2.4. Матрица N удовлетворяет уравнению

$$\dot{N} = SN - NS,$$

т. е. система (2.4.6) относится к классу приводимых однородных систем [7].

Теперь рассмотрим другой пример:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= u \cos \omega t \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

или

$$\dot{X} = b(t)u,$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Вектор $b(t)$ представляется в виде (2.2.4)

$$b(t) = 1,0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos \omega t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В представлении (2.2.4) $r = 1$, $s = 2$. Но в этом случае вектор-функция $b(t)$ не удовлетворяет уравнению вида (2.2.5), поэтому добавим функцию $\sin \omega t$ и рассмотрим вектор-функцию

$$f(t) = \underset{(3 \times 1)}{[1 \quad \cos \omega t \quad \sin \omega t]^\top},$$

которая удовлетворяет уравнению (2.2.5) с матрицей

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных (2.2.6) ($n = 2$, $m = 3$) в данном случае имеет вид

$$\underset{(2 \times 1)}{x} = \underset{(2 \times 6)}{F^\top(t)} \underset{(6 \times 1)}{Y}$$

или

$$x_1 = y_1 + \cos \omega t y_3 + \sin \omega t y_5, \quad x_2 = y_2 + \cos \omega t y_4 + \sin \omega t y_6. \quad (2.4.8)$$

Дифференцируя выражения (2.4.8), подставляя их в систему (2.4.7) и приравнявая коэффициенты при функциях: 1 , $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, получим стационарную систему уравнений

$$\dot{Y} = GY + Qu. \quad (2.4.9)$$

Матрица системы уравнений (2.4.7) в данном случае равна нулю ($A = 0$), поэтому матрицы стационарной системы (2.4.9), согласно (2.2.7) имеют вид

$$\underset{(6 \times 6)}{G} = -S^\top \otimes E_2 = \begin{bmatrix} O_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & -\omega E_2 \\ O_2 & \omega E_2 & O_2 \end{bmatrix}, \quad \underset{(1 \times 6)}{Q}^\top = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.4.10)$$

В скалярном виде система (2.4.9)

$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = -\omega y_5, \quad \dot{y}_4 = -\omega y_6 + u, \quad \dot{y}_5 = \omega y_3, \quad \dot{y}_6 = \omega y_4. \quad (2.4.11)$$

Применяя критерий Красовского (см. п. 2.1) легко получить, что исходная нестационарная система (2.4.7) 2-го порядка управляема. Стационарная система 6-го порядка (2.4.10) расщепляется на две подсистемы

$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_4 = -\omega y_6 + u, \quad \dot{y}_6 = \omega y_4, \quad (2.4.12)$$

$$\dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = -\omega y_5, \quad \dot{y}_5 = \omega y_3. \quad (2.4.13)$$

Однородная система (2.4.12) относительно переменных y_2 , y_3 , y_5 , очевидно, неуправляема. Подсистема (2.4.11) относительно переменных $Y_1 = [y_1 y_4 y_6]^\top$ имеет вид

$$\dot{Y}_1 = G_1 Y_1 + Q_1 u, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.14)$$

Эта система управляема, при этом вектор $Y_1 = [y_1 y_4 y_6]^T$ содержит информацию о всех компонентах исходного вектора состояния x_1, x_2 , поэтому переменные y_2, y_3, y_5 можно положить тождественно равными нулю. В таком случае замена переменных (2.4.2) примет вид

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_4 \cos \omega t + y_6 \sin \omega t. \quad (2.4.15)$$

Для системы (2.4.13) можно построить управление в виде обратной связи

$$u = -K_y^T Y, \quad K_y^T = [k_1 k_2 k_3], \quad (k_i = \text{const})$$

или

$$u = -k_1 y_1 - k_2 y_4 - k_3 y_6, \quad (2.4.16)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы:

$$\dot{Y}_1 = G_k Y_1, \quad G_k = G_1 - Q K_y^T. \quad (2.4.17)$$

Чтобы ввести управление (2.4.15) в исходную нестационарную систему (2.4.7), выразим переменные y_1, y_4, y_6 через исходные переменные x_1, x_2 и дополнительную переменную, введенную так, чтобы преобразование от переменных x_1, x_2, x_d к переменным y_1, y_4, y_6 было невырожденным. Дополнительную переменную представим в виде $x_d = -\sin \omega t y_4 + \cos \omega t y_6$. Эта переменная подчиняется уравнению

$$\dot{x}_d = -u \sin \omega t. \quad (2.4.18)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$Y = e^{St} X, \quad y_1 = x_1, \quad y_4 = x_2 \cos \omega t - x_d \sin \omega t, \quad y_6 = x_2 \sin \omega t + x_d \cos \omega t. \quad (2.4.19)$$

Выразим управление, построенное для стационарной системы (2.4.16), при помощи обратного преобразования (2.4.18) через переменные x_1, x_2, x_d

$$u = -k_1 x_1 - (k_2 \cos \omega t + k_3 \sin \omega t) x_2 + (k_2 \sin \omega t - k_3 \cos \omega t) x_d. \quad (2.4.20)$$

Управление (2.4.19) вводится в расширенную нестационарную систему (соответствующую системе (2.3.19)), содержащую исходную систему (2.4.7) и уравнение (2.4.17). Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (2.4.7), (2.4.17) замкнутой управлением (2.4.19).

Замечание 2.5. Система (2.4.7), (2.4.17) имеет вид

$$\dot{X} = N(t)u, \quad X = [x_1 \ x_2 \ x_d]^T, \quad N(t) = [1 \ \cos \omega t \ -\sin \omega t]^T. \quad (2.4.21)$$

Система, замкнутая управлением (2.4.15), введенным при помощи преобразования (2.4.18), представляется в виде

$$\dot{X} = N_k(t)X, \quad N_k = -e^{-St} N_0 k^T e^{St}, \quad N_0 = [1 \ 1 \ 0]^T. \quad (2.4.22)$$

Матрица системы (2.4.21) удовлетворяет уравнению

$$\dot{N}_k = S N_k - N_k S.$$

Это означает, что однородная нестационарная система уравнений (2.4.21) относится к классу приводимых однородных систем, описанному в [7].

Проводилось моделирование двух вариантов стабилизации: оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на линейно-квадратичном функционале J ; алгоритм стабилизации, при котором постоянные коэффициенты управления выбираются так, чтобы характеристический многочлен уравнений замкнутой системы (2.4.16) совпадал с любым наперед заданным многочленом с действительными коэффициентами.

Значения параметров задачи: $\omega = 1,0$; начальные условия $x_1(0) = 1,0$; $x_2(0) = 0,0$; $x_d(0) = 0,0$.

Параметры функционала J : $W = wE_3$; $w = 1,0$; $R = 0,1$.

Поведение переменных $y_i(t)$ ($i = 1, 2$) — компонент вектора состояния стационарной системы (2.4.11) и переменных $x_i(t)$, ($i = 1, 2$) — вектора состояния исходной нестационарной системы (2.4.7) при введении управления, построенного на основании оптимального алгоритма показано на рисунке 2.1.

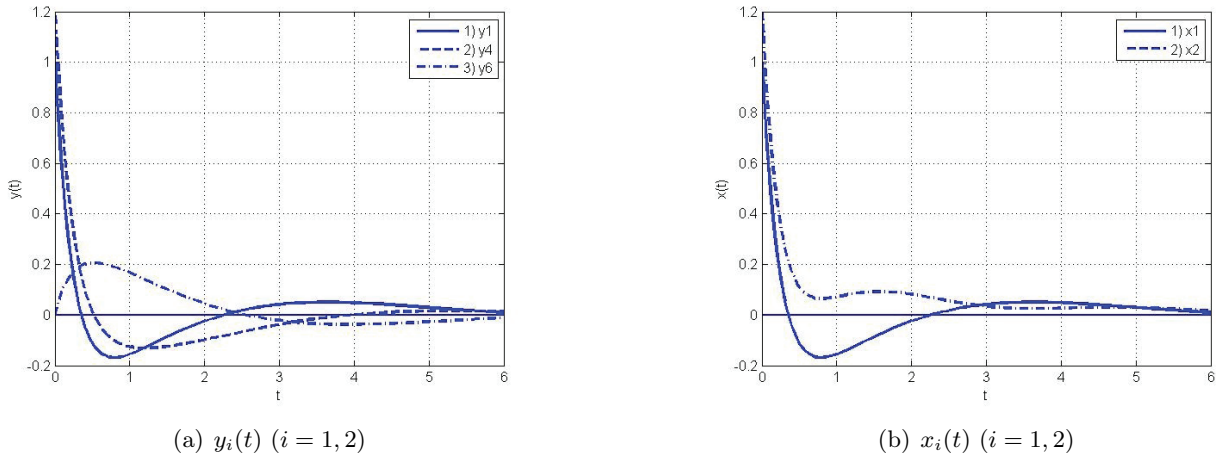


Рис. 2.1. Поведение переменных $y_i(t)$, $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) при использовании оптимального алгоритма.

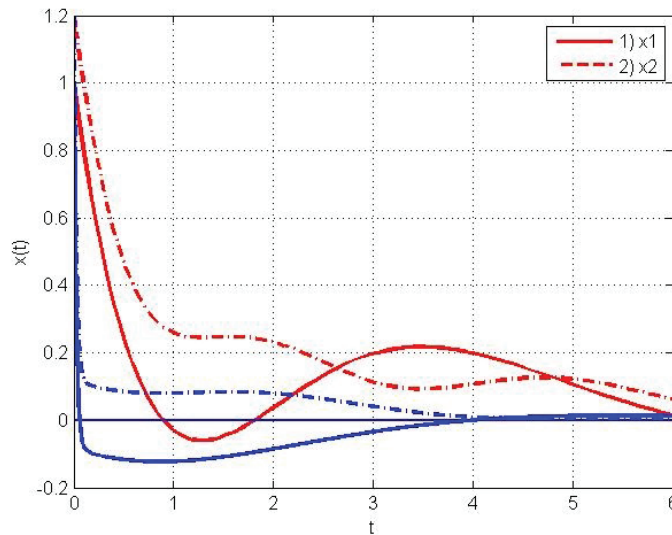


Рис. 2.2. Поведение переменных $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) при различных значениях параметра R (красные кривые $R = 1,0$, синие $R = 0,001$).

Влияние параметра R в функционале на поведение компонент вектора состояния можно видеть на рисунке 2.2.

Коэффициенты управления для стационарной системы, вычисленные по стандартной программе LQR при $R = 0,1$, имеют вид $K_y^T = [3,1623 \quad 2,1177 \quad 3,9390]$.

Корни характеристического уравнения системы, замкнутой этим управлением, имеют следующие значения $\lambda_1 = -4,3029$, $\lambda_{2,3} = -0,48 \pm 0,7045i$.

При втором способе стабилизации коэффициенты управления выбираются так, чтобы характеристический многочлен уравнений замкнутой системы (2.4.10) совпадал с любым наперед заданным многочленом

Величину затухания можно выбирать из тех или иных соображений, например, в соответствии с ограничениями на время затухания или на величину перерегулирования в процессах затухания.

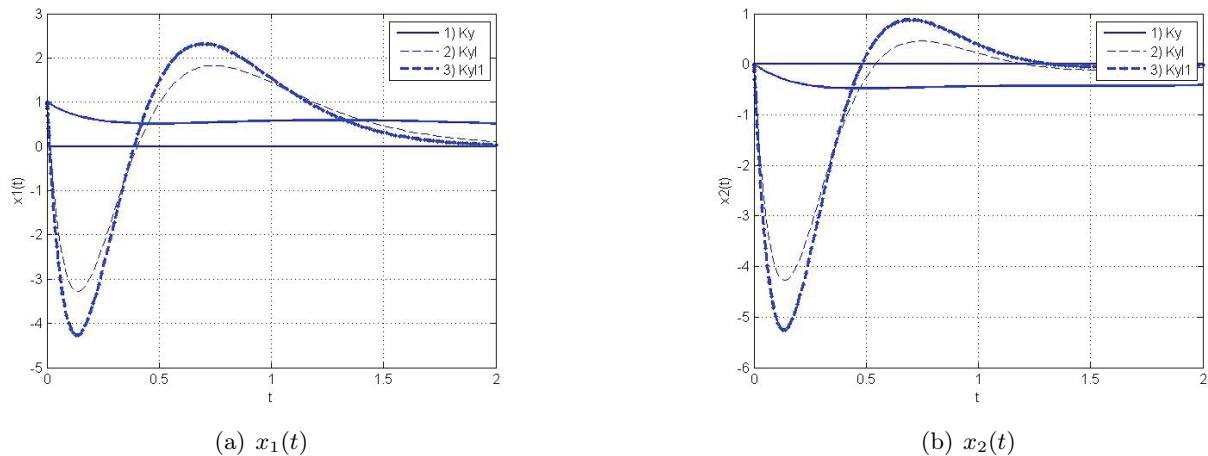


Рис. 2.3. Поведение переменных $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) при различных значениях λ_i .

При $\gamma = -4,3$ постоянные коэффициенты k_i в управлении $u = -K_y^\top y$ (2.4.9) имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \gamma, \quad K_y^\top = [79,5070 \quad -66,6070 \quad 54,4700];$$

$$\lambda_1 = \gamma, \quad \lambda_{2,3} = \gamma \pm 2,15i, \quad K_y^\top = [99,3837 \quad -86,4837 \quad 59,0925].$$

Сравнение поведения процессов стабилизации, проведенных при использовании указанных способов выбора коэффициентов управления, представлено на рисунке 2.3.

Здесь введены обозначения: K_y — коэффициенты управления, построенные согласно оптимальному алгоритму; K_{yl} — коэффициенты выбраны по второму способу при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \gamma$; K_{yl1} — коэффициенты выбраны по второму способу при $\bar{\lambda}_1 = \gamma$, $\bar{\lambda}_{2,3} = \gamma \pm \beta i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. Астрон. — 2012. — № 2. — С. 79–90.
2. Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: Курс, 2018.
3. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
5. Белецкий В. В., Хентов А. А. Вращательное движение намагниченного спутника. — М.: Наука, 1985.
6. Дубошин Г. Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюлл. ИТА АН СССР. — 1960. — 7, № 7. — С. 511–520.
7. Каленова В. И., Морозов В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — М.: Физматлит, 2010.
8. Каленова В. И., Морозов В. М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением // Прикл. мат. мех. — 2012. — 76, № 4. — С. 576–588.
9. Каленова В. И., Морозов В. М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 3. — С. 6–15.
10. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // в кн.: Тр. Конгр. ИФАК. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 521–547.
11. Калман Р. Е., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
12. Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // Прикл. мех. техн. физ. — 1960. — 36, № 5. — С. 890–901.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.

14. *Лурье А. А.* Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961.
15. *Морозов В. М.* Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов// Космич. исслед. — 1967. — 5, № 5. — С. 727–732.
16. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов// Космич. исслед. — 1969. — 7, № 3. — С. 395–401.
17. *Морозов В. М.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1968. — № 6. — С. 109–111.
18. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов// в кн.: Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНТИ, 1971. — С. 1–83.
19. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации// Космич. исслед. — 2020. — 58, № 3. — С. 199–207.
20. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов// Космич. исслед. — 2021. — 59, № 5. — С. 393–407.
21. *Морозов В. М., Каленова В. И., Рак М. Г.* О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов// Прикл. мат. мех. — 2021. — 85, № 4. — С. 436–453.
22. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил// Космич. исслед. — 2022. — 60, № 3. — С. 246–253.
23. *Овчинников М. Ю., Пеньков В. И., Ролдугин Д. С., Иванов Д. С.* Магнитные системы ориентации малых спутников. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
24. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С.* Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников// Космические аппараты и технологии. — 2019. — 3, № 2 (28). — С. 73–86.
25. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
26. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. — М.: ВЦ АН СССР, 1967.
27. *Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю.* Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 296–306.
28. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. — М.: ВИНТИ, 1978.
29. *Сарычев В. А.* Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов// в кн.: Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. — М.: Физматлит, 2009. — С. 111–126.
30. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли// в кн.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 23. — М.: ВИНТИ, 1985.
31. *Тихонов А. А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле// Космич. исслед. — 2003. — 41, № 1. — С. 69–79.
32. *Хентов А. А.* Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли// 31 — 1967. — С. 947–950.
33. *Хентов А. А.* Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг своего центра масс// Космич. исслед. — 1968. — 6, № 5. — С. 793–795.
34. *Черноуцко Ф. Л.* Об устойчивости регулярных прецессий спутника// Прикл. мат. мех. — 1964. — 28, № 1. — С. 155–157.
35. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system// Adv. Space Res. — 2018. — 62. — P. 142–151.
36. *Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the König frame// Nonlinear Dyn. — 2015. — 82. — P. 1493–1505.
37. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite// Aerospace Sci. Techn. — 2020. — № 3. — P. 1–12.
38. *Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of an artificial Earth satellite in the orbital coordinate system via control with distributed delay// IEEE Access. — 2021. — 9. — 132623–132630.
39. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation// Geomagnetism and Aeronomy. — 2013. — 53, № 2. — P. 271–281.
40. *Antipov K. A., Tikhonov A. A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization// Aerospace Sci. Techn. — 2014. — 33. — P. 92–99.

41. *Bin Zhou* Global stabilization of periodic linear systems by bounded controls with application to spacecraft magnetic attitude control// *Automatica*. — 2015. — 60. — P. 145–154.
42. *Brewer J. W.* Kronecker Products and Matrix calculus in system Theory// *IEEE Trans. Circ. Syst.* — 1978. — *CAS-25*, № 9. — P. 772–781.
43. *Chang A.* An algebraic characterization of controllability// *IEEE Trans. Automat. Control*. — 1965. — *AC-10*, № 1. — P. 112–113.
44. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft// *Acta Astronaut.* — 2020. — 169. — P. 108–123.
45. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits// *J. Guid. Control Dynam.* — 2015. — 38. — P. 1947–1958.
46. *Frik M. A.* Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques// *AIAA J.* — 1970. — 8, № 10. — P. 1780–1785.
47. *Giri D. K., Mukherjee B. K., Sinha M.* Three-axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-axis global magnetic attitude control// *Asian J. Control*. — 2017. — 19, № 6. — P. 2028–2041.
48. *Giri D. K. and Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of Earth-pointing satellites// *J. Guid. Control Dynam.* — 2014. — 37, № 6. — P. 1946–1960.
49. *Giri D. K., Sinha M.* Lorentz Force Based Satellite Attitude Control// *J. Inst. Eng. India. Ser. C*. — 2016. — 97. — P. 279–290.
50. *Hautus M. L. J.* Controllability and observability conditions of linear autonomous systems// *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A*. — 1969. — 72. — P. 443–448.
51. *Huang X., Yan Y.* Fully actuated spacecraft attitude control via the hybrid magnetocoulombic and magnetic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2017. — 40, № 12. — P. 1–8.
52. *Ivanov D. S., Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Doronin D. M., Ovchinnikov A. V.* Advanced numerical study of the three-axis magnetic attitude control and determination with uncertainties// *Acta Astronaut.* — 2017. — 132. — P. 103–110.
53. *Kalenova V. I., Morozov V. M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces// *Aerospace. Sci. Technol.* — 2020. — 106. — 106105.
54. *Kalman R. E.* *Lectures on Controllability and Observability*. — Bologna, Italy: C.I.M.E., 1969.
55. *Laub A. J., Arnold W. F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models// *IEEE Trans. Automat. Control*. — 1984. — 29, № 2. — P. 163–165.
56. *Likins P. W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame// *J. Astronaut. Sci.* — 1965. — 12, № 1. — P. 18–24.
57. *Morozov V. M., Kalenova V. I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems// *AIP Conf. Proc.* — 2018. — 1959. — 020003.
58. *Mostaza-Prieto D., Roberts P. C. E.* Methodology to analyze attitude stability of satellites subjected to aerodynamic torques// *J. Guid. Control Dynam.* — 2016. — 39. — P. 437–449.
59. *Nababi M., Barati M.* Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application// *Appl. Math. Model.* — 2017. — 46. — P. 365–381.
60. *Ovchinnikov M. Yu., Penkov V. I., Roldugin D. S., Pichuzhkina A. V.* Geomagnetic field models for satellite angular motion studies// *Acta Astronaut.* — 2018. — 144. — P. 171–180.
61. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites// *Progr. Aerospace Sci.* — 2019. — 109. — 100546.
62. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study// *Acta Astronaut.* — 2015. — 110. — P. 279–286.
63. *Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Ivanov D. S., Penkov V. I.* Choosing control parameters for three axis magnetic stabilization in orbital frame// *Acta Astronaut.* — 2015. — 116. — P. 74–68.
64. *Psiaki M.* Magnetic torque attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation// *J. Guid. Control Dynam.* — 2001. — 24, № 2. — P. 386–394.
65. *Psiaki M. L.* Nanosatellite attitude stabilization using passive aerodynamics and active magnetic torquing// *J. Guid. Control Dynam.* — 2004. — 27. — P. 347–355.
66. *Psiaki M. L., Martel F., Pal P. K.* Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data// *J. Guid. Control Dynam.* — 1990. — 13, № 3. — P. 506–514.

67. *Psiaki M. L., Oshman Y.* Spacecraft attitude rate estimation from geomagnetic field measurements// J. Guid. Control Dynam. — 2003. — 26, № 2. — P. 244–252.
68. *Sarychev V. A., Mirer S. A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2000. — 76, № 1. — P. 55–68.
69. *Sarychev V. A., Mirer S. A., Degtyarev A. A., Duarte E. K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques// Celestial Mech. Dynam. Astronom. — 2007. — 97, № 4. — P. 267–287.
70. *Searcy J. D., Pernicka H. J.* Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach// J. Guid. Control Dynam. — 2012. — 35, № 6. — P. 1693–1701.
71. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results// Control Eng. Pract. — 2005. — 13. — P. 357–371.
72. *Sofyal A., Jafarov E. M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode// Aerospace Sci. Technol. — 2018. — 76. — P. 91–104.
73. *Sukhov E.* Numerical approach for bifurcation and orbital stability analysis of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1925. — 012013.
74. *Sutherland R., Kolmanovsky I. K., Girard A. R.* Attitude control of a 2U cubesat by magnetic and air drag torques// IEEE Trans. Control Syst. Techn. — 2018. — 27, № 3. — P. 1047–1059.
75. *Tortora P., Oshman Y., Santoni F.* Spacecraft angular rate estimation from magnetometer data on using and analytic predictor// J. Guid. Control Dynam. — 2004. — 27, № 3. — P. 365–373.
76. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. — Dordrecht: D. Reidel, 1978.
77. *Yang Y.* Controllability of spacecraft using only magnetic torques// IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. — 2016. — 52, № 2. — P. 955–962.
78. *Zhou K., Huang H., Wang X., Sun L.* Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient// Aerospace Sci. Techn. — 2017. — 60. — P. 115–123.

Морозов Виктор Михайлович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Каленова Вера Ильинична

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: kalenova44@mail.ru

Рак Михаил Геннадьевич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: mihailrak@mail.ru