ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 224 (2023). С. 28–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-28-34

УДК 517.956.2

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 г. **Е. А. ГОЛОВКО**

Аннотация. При помощи преобразования Фурье изучается первая краевая задача для двух эллиптических систем в полупространстве. Показано, что для обеих систем однородная задача имеет бесконечно много решений, зависящих от одной произвольной функции. При этом одна из систем является сильно связанной при определенных условиях на коэффициенты системы, а вторая система всегда сильно связана.

Ключевые слова: эллиптическая система, первая краевая задача, задача Дирихле, сильно связанные системы, преобразование Фурье.

FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF ELLIPTIC SYSTEMS IN A HALF-SPACE

© 2023 **E. A. GOLOVKO**

Abstract. Using the Fourier transform, we examine the first boundary-value problem for two elliptic systems in a half-space. We prove that for both systems, the homogeneous problem has infinitely many solutions depending on one arbitrary function. At the same time, one of the systems is strongly connected under certain conditions for the coefficients of the system, whereas the second system is always strongly connected.

Keywords and phrases: elliptic system, first boundary-value problem, Dirichlet problem, strongly connected systems, Fourier transform.

AMS Subject Classification: 35J57

В случае одного равномерно эллиптического уравнения второго порядка фредгольмовость задачи Дирихле зависит только от характера главных частей. В общем же случае для сильно связанных систем встречаются различные новые явления в характере разрешимости первой краевой задачи, не имеющие аналогов в случае одного уравнения второго порядка. Среди таких явлений следует отметить эффект потери гладкости и влияние младших производных на разрешимость граничных задач. Впервые влияние младших членов было рассмотрено в работах Р. С. Сакса и Н. Е. Товмасяна. Позднее эти вопросы рассматривались в работах А. И. Янушаускаса и его учеников.

В теории многомерных эллиптических систем имеется еще много неясных вопросов. Одним из них является вопрос о том, как влияет структура системы на корректность задачи Дирихле. В настоящей работе рассмотрены две эллиптические системы в трехмерном пространстве. Показано, что одна из них является сильно связанной при определенных условиях на коэффициенты системы, а вторая система всегда сильно связана.

В трехмерном пространстве рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
&-\Delta u + a_{11}\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z) + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z) + a_{13}\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z) = 0;\\
&-\Delta v + a_{21}\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z) + a_{22}\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z) + a_{23}\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z) = 0;\\
&-\Delta w + a_{31}\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z) + a_{32}\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z) + a_{33}\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Введем обозначения

$$u_x+v_y+w_z = H, \quad \Delta\omega = H.$$

Тогда систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= a_{11}H_x + a_{12}H_y + a_{13}H_z;\\
\Delta v &= a_{21}H_x + a_{22}H_y + a_{23}H_z;\\
\Delta w &= a_{31}H_x + a_{32}H_y + a_{33}H_z.
\end{aligned} \tag{2}$$

Если считать H известной функцией, то можно утверждать, что в системе (2) каждое уравнение содержит только одну неизвестную функцию. Решение этой системы можно представить в виде

$$\begin{aligned}
u &= u_1 + a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + a_{13}\omega_z;\\
v &= v_1 + a_{21}\omega_x + a_{22}\omega_y + a_{23}\omega_z;\\
w &= w_1 + a_{31}\omega_x + a_{32}\omega_y + a_{33}\omega_z
\end{aligned} \tag{3}$$

где u_1, v_1, w_1 — произвольные гармонические функции. Продифференцируем уравнения системы (3) по x, y и z соответственно и складывая результаты дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned}
(u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z + (a_{11}-1)\omega_{xx} + (a_{22}-1)\omega_{yy} + (a_{33}-1)\omega_{zz} +\\
+ (a_{12}+a_{21})\omega_{xy} + (a_{13}+a_{31})\omega_{xz} + (a_{23}+a_{32})\omega_{yz} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Изменяя подходящим образом одну из функций u_1, v_1, w_1, можно утверждать, что

$$(u_1)_x + (v_1)_y + (w_1)_z = 0;$$

$$\begin{aligned}
(a_{11}-1)\omega_{xx} + (a_{22}-1)\omega_{yy} + (a_{33}-1)\omega_{zz} +\\
+ (a_{12}+a_{21})\omega_{xy} + (a_{13}+a_{31})\omega_{xz} + (a_{23}+a_{32})\omega_{yz} = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Если положить $u_1 = \varphi_z$, $v_1 = \psi_z$, $w_1 = -\varphi_x - \psi_y$, где $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$ — произвольные гармонические функции, то общее решение (3) системы (1) можно записать так:

$$\begin{aligned}
u &= \varphi_z + a_{11}\omega_x + a_{12}\omega_y + a_{13}\omega_z;\\
v &= \psi_z + a_{21}\omega_x + a_{22}\omega_y + a_{23}\omega_z;\\
w &= -\varphi_x - \psi_y + a_{31}\omega_x + a_{32}\omega_y + a_{33}\omega_z,
\end{aligned}$$

где $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$ — произвольные гармонические функции, а $\omega(x,y,z)$ — произвольное регулярное решение уравнения (5). Понятно, что система (1) эллиптична тогда и только тогда, когда будет эллиптично уравнение (5).

Установим ряд условий сильной связанности систем вида (1). Поскольку определение сильной связанности многомерных эллиптических систем основано на нарушении коррекции первой краевой задачи в полупространстве, рассмотрим задачу Дирихле для системы (1): найти регулярное решение системы (1) в полупространстве $D = \{z > 0\}$, удовлетворяющее на границе $\Gamma = \{z = 0\}$ этого полупространства условиям:

$$u\big|_{z=0} = f_1(x,y), \quad v\big|_{z=0} = f_2(x,y), \quad w\big|_{z=0} = f_3(x,y), \tag{6}$$

где f_1, f_2, f_3 — заданные достаточно гладкие функции.

Предположим теперь, что матрица $\|a_{ij}\|$, $i,j = 1,2,3$, системы (1) является кососимметрической, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$, $i \neq j$. Тогда уравнение (4) перепишется так:

$$(a_{11}-1)\omega_{xx} + (a_{22}-1)\omega_{yy} + (a_{33}-1)\omega_{zz} = 0. \tag{7}$$

Это уравнение будет уравнением эллиптического типа, если все a_{ii}, $i = 1, 2, 3$, будут одновременно больше единицы или одновременно меньше единицы. Следовательно, и система (1) будет системой эллиптического типа при этих же условиях.

Пусть $\widetilde{\varphi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\psi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\omega}(\xi,\eta,z)$ — преобразования Фурье для функций $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\omega(x,y,z)$ по переменным x и y. Так как φ и ψ — гармонические функции, т.е. $\Delta\varphi = 0$ и $\Delta\psi = 0$, а ω удовлетворяет уравнению (7), то преобразования Фурье ограниченных на бесконечности функций φ, ψ и ω имеют вид

$$\widetilde{\varphi}(\xi,\eta,z) = A(\xi,\eta)e^{-\rho z}, \quad \widetilde{\psi}(\xi,\eta,z) = B(\xi,\eta)e^{-\rho z}, \quad \widetilde{\omega}(\xi,\eta,z) = C(\xi,\eta)e^{-\rho_1 z},$$

где $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$, $C(\xi,\eta)$ — произвольные функции,

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{a_{11}-1}{a_{33}-1}\xi^2 + \frac{a_{22}-1}{a_3 3-1}\eta^2}.$$

Теперь в терминах преобразования Фурье можем записать решение системы (1):

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} &= -\rho A(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \big(i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1\big)C(\xi,\eta)e^{-\rho_1 z};\\
\widetilde{v} &= -\rho B(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \big(-i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1\big)C(\xi,\eta)e^{-\rho_1 z};\\
\widetilde{w} &= \big(-i\xi A(\xi,\eta) - i\eta B(\xi,\eta)\big)e^{-\rho z} + \big(-i\xi a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1\big)C(\xi,\eta)e^{-\rho_1 z}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Применим преобразование Фурье к граничным условиям (6):

$$\widetilde{u}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_1(\xi,\eta), \quad \widetilde{v}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_2(\xi,\eta), \quad \widetilde{w}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_3(\xi,\eta). \tag{9}$$

Подставим решение (8) в условия (9). Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения произвольных функций $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$, $C(\xi,\eta)$:

$$\begin{aligned}
-\rho A(\xi,\eta) + \big(i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1\big)C(\xi,\eta) &= \widetilde{f}_1(\xi,\eta);\\
-\rho B(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \big(-i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1\big)C(\xi,\eta) &= \widetilde{f}_2(\xi,\eta);\\
-i\xi A(\xi,\eta) - i\eta B(\xi,\eta) + \big(-i\xi a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1\big)C(\xi,\eta) &= \widetilde{f}_3(\xi,\eta).
\end{aligned} \tag{10}$$

Если определитель Δ системы (10) тождественно равен нулю, то корректность задачи Дирихле заведомо нарушается. Тогда тождество $\Delta \equiv 0$ является критерием сильной связанности системы (1). Вычислим этот определитель:

$$\begin{aligned}
\Delta = \begin{vmatrix} -\rho & 0 & i\xi a_{11} + i\eta a_{12} - a_{13}\rho_1 \\ 0 & -\rho & -i\xi a_{12} + i\eta a_{22} - a_{23}\rho_1 \\ -i\xi & -i\eta & -i\xi\gamma - a_{13} - i\eta a_{23} - a_{33}\rho_1 \end{vmatrix} &= \\
= \rho\big(a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 - a_{33}\rho\cdot\rho_1\big) - i\rho\big(a_{13}\xi + a_{23}\eta\big)(\rho-\rho_1) &= \\
= \rho(\rho-\rho_1)\Big[\big(\rho - (a_{33}-1)\rho_1\big) + i\big(a_{13}\xi + a_{23}\eta\big)\Big]&.
\end{aligned}$$

Вещественная часть данного определителя тождественно обращается в нуль либо за счет того, что $\rho \equiv \rho_1$, либо за счет того, что $\rho - (a_{33}-1)\rho_1 \equiv 0$. В первом случае имеем

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2} = \sqrt{\frac{a_{11}-1}{a_{33}-1}\xi^2 + \frac{a_{22}-1}{a_3 3-1}\eta^2},$$

откуда

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Во втором случае имеем:

$$\rho-(a_{33}-1)\rho_1=\frac{(\rho-(a_{33}-1)\rho_1)(\rho+(a_{33}-1)\rho_1)}{\rho+(a_{33}-1)\rho_1}=$$
$$=\frac{\xi^2+\eta^2-(a_{33}-1)(a_{11}-1)\xi^2-(a_{33}-1)(a_{22}-1)\eta^2}{\rho+(a_{33}-1)\rho_1}=$$
$$=\frac{\xi^2(a_{11}+a_{33}(1-a_{11}))+\eta^2(a_{33}(1-a_{22})+a_{22})}{\rho+(a_{33}-1)\rho_1}=0.$$

Следовательно,

$$\xi^2\big(a_{11}+a_{33}(1-a_{11})\big)+\eta^2\big(a_{33}(1-a_{22})+a_{22}\big)=0.$$

Отсюда следуют равенства

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{33}=1+\frac{1}{a_{11}-1},$$

причем

$$a_{11}>1,\quad a_{22}>1,\quad a_{33}>1.$$

Мнимая часть определителя Δ обращается в нуль тождественно при $a_{13}=a_{23}=0$. Эти условия гарантируют сильную связанность системы (1). Следовательно, система

$$-\Delta u+\alpha H_x+\beta H_y=0;\quad -\Delta v-\beta H_x+\alpha H_y=0;\quad -\Delta w+\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)H_z=0 \tag{11}$$

сильно связана при $\alpha>1$ и любом β.

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для системы (11). Все нетривиальные решения этой задачи можно записать так:

$$u=\varphi_z+\alpha\omega_x,\quad v=\psi_z+\alpha\omega_y,\quad w=-\varphi_x-\psi_y+\frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z,$$

где

$$\varphi=-\alpha\frac{\partial H(x,y,\zeta)}{\partial x}\Big|_{\zeta=z},\quad \psi=-\alpha\frac{\partial H(x,y,\zeta)}{\partial y}\Big|_{\zeta=z},\quad \omega=\frac{\partial H(x,y,\zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=(\alpha-1)z},$$

а $H(x,y,\zeta)$ — произвольная регулярная в полупространстве $\zeta>0$ гармоническая функция.

Теорема 1. *Однородная задача Дирихле для системы* (11) *в полупространстве* $z>0$ *имеет бесконечно много линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной регулярной гармонической функции трех независимых переменных.*

Рассмотрим еще одну систему, которая является эллиптической по Петровскому системой при $\alpha>1$:

$$\begin{aligned}
&-\Delta u+\alpha\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z)+\beta\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z)+\gamma\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z)=0;\\
&-\Delta v-\beta\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z)+\alpha\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z)+h\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z)=0;\\
&-\Delta w-\gamma\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y+w_z)-h\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y+w_z)+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial z}(u_x+v_y+w_z)=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Системы более простого вида рассмотрены в работах А. И. Янушаускаса (см. [3]) и его учеников (см. [2]).

Первую краевую задачу для системы (12) будем рассматривать в следующей постановке: найти регулярные в полупространстве $D=\{z>0\}$ решения системы (12), удовлетворяющие на границе этого полупространства $\Gamma=\{z=0\}$ условиям

$$u\big|_{z=0}=f_1(x,y),\quad v\big|_{z=0}=f_2(x,y),\quad w\big|_{z=0}=f_3(x,y). \tag{13}$$

В системе (12) положим

$$u_x+v_y+w_z=H,\quad \Delta\omega=H.$$

С учетом этих обозначений систему (12) можно переписать так:

$$\Delta(u-\alpha\omega_x-\beta\omega_y-\gamma\omega_z)=0;,\quad \Delta(v+\beta\omega_x-\alpha\omega_y-h\omega_z=0,\quad \Delta(w+\gamma\omega_x+h\omega_y-\frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z)=0,$$

откуда

$$u=u_1+\alpha\omega_x+\beta\omega_y+\gamma\omega_z,\quad v=v_1-\beta\omega_x+\alpha\omega_y+h\omega_z,\quad w=w_1-\gamma\omega_x-h\omega_y+\frac{\alpha}{\alpha-1}\omega_z,\tag{14}$$

где u_1, v_1, w_1 — произвольные гармонические функции.

Продифференцируем равенства (14) по x, y и z соответственно и сложим результаты:

$$(u_1)_x+(v_1)_y+(w_1)_z+(\alpha-1)\omega_{xx}+(\alpha-1)\omega_{yy}+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)\omega_{zz}=0.\tag{15}$$

Из равенства (15) следует

$$(u_1)_x+(v_1)_y+(w_1)_z=0;\tag{16}$$

$$(\alpha-1)\omega_{xx}+(\alpha-1)\omega_{yy}+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)\omega_{zz}=0.\tag{17}$$

Соотношение (16) выполнится, если положить

$$u_1=\varphi_z,\quad v_1=\psi_z,\quad w_1=-\varphi_x-\psi_y,$$

где φ и ψ — произвольные гармонические функции.

Далее задачу будем решать с помощью преобразования Фурье. Пусть $\widetilde{\varphi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\psi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\omega}(\xi,\eta,z)$ — преобразования Фурье для функций $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\omega(x,y,z)$ по переменным x и y. Применяя преобразование Фурье по переменным x и y к уравнению (17), получим

$$-\xi^2(\alpha-1)\widetilde{\omega}-\eta^2(\alpha-1)\widetilde{\omega}+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}-1\right)\widetilde{\omega}_{zz}=0.\tag{18}$$

Ограниченные на бесконечности решения уравнения (18) имеют вид

$$\widetilde{\omega}=C(\xi,\eta)e^{-\rho_1 z},\tag{19}$$

где $C(\xi,\eta)$ — произвольная функция, а

$$\rho_1=\sqrt{\frac{(\alpha-1)\xi^2+(\alpha-1)\eta^2}{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1}}.$$

Поскольку $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$ — гармонические функции, то их преобразования Фурье с учетом ограниченности на бесконечности можно записать в виде

$$\widetilde{\varphi}(\xi,\eta,z)=A(\xi,\eta)e^{-\rho z},\quad \widetilde{\psi}(\xi,\eta,z)=B(\xi,\eta)e^{-\rho z},$$

где $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$ — произвольные функции, $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Применим преобразование Фурье к представлению решений (14):

$$\begin{aligned}\widetilde{u}&=\widetilde{\varphi}_z+i\alpha\xi\widetilde{\omega}+i\beta\eta\widetilde{\omega}+\gamma\widetilde{\omega}_z,\\ \widetilde{v}&=\widetilde{\psi}_z-i\beta\xi\widetilde{\omega}+i\alpha\eta\widetilde{\omega}+h\widetilde{\omega}_z,\\ \widetilde{w}&=-i\xi\widetilde{\varphi}-i\eta\widetilde{\psi}-i\xi\gamma\widetilde{\omega}-i\eta h\widetilde{\omega}+\frac{\alpha}{\alpha-1}\widetilde{\omega}_z.\end{aligned}$$

Учитывая найденные функции $\widetilde{\varphi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\psi}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{\omega}(\xi,\eta,z)$ и граничные условия (13), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}-\rho A(\xi,\eta)+\big(i\alpha\xi+i\beta\eta-\gamma\rho_1\big)C(\xi,\eta)&=\widetilde{f}_1;\\ -\rho B(\xi,\eta)+\big(-i\beta\xi+i\alpha\eta-h\rho_1\big)C(\xi,\eta)&=\widetilde{f}_2;\\ -i\xi A(\xi,\eta)-i\eta B(\xi,\eta)+\left(-i\xi\gamma-i\eta h-\frac{\alpha\rho_1}{\alpha-1}\right)C(\xi,\eta)&=\widetilde{f}_3.\end{aligned}\tag{20}$$

Если определитель этой системы равен нулю, то система имеет бесконечное множество решений. Корректность рассматриваемой задачи Дирихле будет в этом случае заведомо нарушена. Вычислим определитель системы (20):

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\rho & 0 & i\alpha\xi + i\beta\eta - \gamma\rho_1 \\ 0 & -\rho & -i\beta\xi + i\alpha\eta - h\rho_1 \\ -i\xi & -i\eta & -i\xi\gamma - i\eta h - \frac{\alpha\rho_1}{\alpha-1} \end{vmatrix} = i\rho(\rho-\rho_1)(\gamma\xi + h\eta). \tag{21}$$

Определитель (21) всегда обращается в нуль на прямой $\gamma\xi + h\eta = 0$.

В системе (12) перейдем к новым независимым переменным s, t, z и новым неизвестных функциям u_1, v_1, w по формулам:

$$s = \frac{\gamma x + hy}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad t = \frac{\gamma y - hx}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad z = z; \quad u_1 = \frac{\gamma u + hv}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad v_1 = \frac{\gamma v - hu}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}}, \quad w = w.$$

В новых переменных система (12) запишется так:

$$\begin{aligned} &-\Delta u_1 + \alpha H_s + \beta H_t + \sqrt{\gamma^2 + h^2} H_z = 0, \\ &-\Delta v_1 - \beta H_s + \alpha H_t = 0, \\ &-\Delta w - \sqrt{\gamma^2 + h^2} H_s + \frac{\alpha}{\alpha - 1} H_z = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$H = \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Если будем интересоваться только теми решениями, которые не зависят от s, система (22) примет вид:

$$\begin{aligned} &-\Delta u_1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \sqrt{\gamma^2 + h^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0; \\ &-\Delta v_1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0; \\ &-\Delta w + \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что в системе (23) два последних уравнения не содержат функцию u_1. Поэтому их можно рассматривать как отдельную систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Системы такого вида рассматривались автором ранее. Все её решения можно представить с виде:

$$v_1 = \varphi_z + \alpha\omega_t, \quad w = -\varphi_t + \frac{\alpha}{\alpha - 1}\omega_z,$$

где функция φ — регулярная гармоническая функция, а ω — регулярное решение уравнения

$$(\alpha - 1)^2 \omega_{tt} + \omega_{zz} = 0, \quad \alpha > 1.$$

Функции φ и ω можно выразить через одну гармоническую функцию по формулам

$$\varphi = -\alpha \frac{\partial H(t,\zeta)}{\partial t}\Big|_{\zeta = z}, \quad \omega = \frac{\partial H(t,\zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta = (\alpha-1)z}.$$

Здесь H — произвольная регулярная в полуплоскости $\zeta > 0$ гармоническая функция.

Далее остается найти функцию u_1, решив первое уравнение системы (23). Если функции v_1 и w известны, то это уравнение является уравнением Пуассона в полуплоскости $z > 0$, причем его решение обращается в нуль при $z = 0$. Как известно, такое решение можно выписать в явном виде (см. [1]).

Теорема 2. *Однородная задача Дирихле для системы* (12) *в полупространстве* $z > 0$ *имеет бесконечно много линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной регулярной гармонической функции двух независимых переменных.*

Следовательно, система (12) всегда сильно связана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
2. *Черняева Т. Н.* Решение не сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных// Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2015. — *46*, № 2. — С. 29–32.
3. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

Головко Елена Анатольевна
Иркутский государственный университет
E-mail: elena-golovko@mail.ru