ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 138–145
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-138-145

УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДУБИНИНА ДЛЯ ВЕСОВОЙ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА ХЕССЕ С A_1-ВЕСОМ МАКЕНХАУПТА

© 2022 г. **В. А. ШЛЫК**

Аннотация. Для конденсатора Хессе в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, доказана эквивалентность его весовой емкости и его весового модуля с A_1-весом Макенхаупта. Это дает решение одной задачи Дубинина об оценке емкости конденсатора с упомянутым весом.

Ключевые слова: емкость конденсатора, модуль семейства кривых, вес Макенхаупта.

ON ONE DUBININ PROBLEM FOR THE WEIGHT CAPACITANCE OF A HESSE CONDENSER WITH A_1-MACKENHAUPT WEIGHT

© 2022 **V. A. SHLYK**

Abstract. For the Hesse condenser in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, the equivalence of its weight capacitance and its weight modulus with A_1-Muckenhoupt weight is proved. This gives a solution of the Dubinin problem on estimating the capacitance of a capacitor with the weight mentioned.

Keywords and phrases: capacitance, modulus of a family of curves, Muckenhoupt weight.

AMS Subject Classification: 46E35

1. Введение. Равенство p-емкости и p-модуля конденсатора с двумя пластинами для $p \in (1, +\infty)$ и его приложения достаточно полно изложены в литературе (см., например, [3, 5, 10]). Недавно В. Н. Дубинин в [6] поставил задачу о нахождении аналога упомянутого выше равенства в конформном случае, когда число пластин конечно и больше двух. В [1] дано решение этой задачи в более общей постановке для весовой емкости конденсатора с A_p-весом Макенхаупта (см. [9]), где $p \in (1, +\infty)$. Ниже мы распространяем этот результат на случай весовой емкости конденсатора Хессе (см. [8]) с A_1-весом Макенхаупта.

2. Основные определения и обозначения. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ одноточечную компактификацию евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Все топологические рассмотрения проводятся ниже проводятся в метрическом пространстве $(\overline{\mathbb{R}^n}, h)$, где h — хордальная метрика, определяемая с помощью стереографической проекции.

Если $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, то $\bar{F}$, ∂F обозначают соответственно замыкание и границу множества F в топологии $\overline{\mathbb{R}^n}$. Норму точки (вектора) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и скалярное произведение зададим формулами

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}, \quad x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Если $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$, то $h(a, F)$ означает хордальное расстояние от a до $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Соответственно, если $a \in \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{dist}(a, F)$ будет означать евклидово расстояние от a до $F \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим множество натуральных чисел через $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Для заданного $r > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}; \quad B(\infty, r) = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(0, 1/r).$$

Множество

$$O(F, \varepsilon) = \bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$$

назовем ε-окрестностью множества $F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$. Обозначим n-мерную меру Лебега через m_n и положим $m_n(F) = |F|$ для m_n-измеримого множества $F \subset \mathbb{R}^n$. Будем использовать аббревиатуру «п.в.» для словосочетаний «почти всюду» или «почти везде» по отношению к m_n-мере. Аналогично используем понятия «измеримая» и «локально интегрируемая» относительно меры m_n.

Пусть F — измеримое подмножество из $\mathbb{R}^n$ и u — измеримая вещественнозначная функция на F. Для $1 \leqslant p < \infty$ положим

$$\|u\|_{L_p(F)} = \left(\int\limits_F |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Ниже в тексте Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть u — измеримая функция на Ω. Мы будем писать, что $u \in L_p(\Omega, loc)$, если $\|u\|_{L_p(F)} < \infty$ для каждого компактного множества $F \subset \Omega$. Класс всех функций u удовлетворяющих условию $\|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, обозначим через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Следуя Макенхаупту (см. [9]), функцию $w \colon \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$, где $w \in L_1(\mathbb{R}^n, loc)$, назовем A_1-весом, если существует такая постоянная A, что для каждого шара $B = B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w dx \right) \cdot \operatorname*{ess\,sup}_B \frac{1}{w(x)} \right\} \leqslant A.$$

Обозначим через A_1 класс всех A_1-весов. Далее в тексте w будет означать некоторый вес из A_1.

Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$M(w(x)) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int\limits_{B(x, r)} w(y) dy.$$

Кроме того, определим $L_{1,w}(\Omega)$ как множество всех измеримых функций u на Ω с

$$\|u\|_{L_{1,w}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u| w dx < \infty$$

и обозначим через $L_{1,w}(\Omega, loc)$ множество всех измеримых функций u на Ω, удовлетворяющих условию $uw \in L_1(\Omega, loc)$.

Пусть $E_0, E_1, \dots, E_m \subset \overline{\Omega}$ — попарно непересекающиеся непустые компакты (в топологии $\overline{\mathbb{R}^n}$); $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_m$ — попарно различные вещественные числа, $m \geqslant 1$. Тогда тройку $\mathcal{K} = (\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$, где $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=0}^m$ и $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^m$, назовем конденсатором на $\bar{\Omega}$. Множества E_i и $\Omega \setminus E$, где

$$E = \bigcup_{i=0}^m E_i,$$

назовем соответственно пластинами и полем конденсатора $\mathcal{K}$. Число δ_i назовем потенциалом пластины E_i, $i = 0, 1, \dots, m$.

Если $E \subset \Omega$, либо $E_0 = \partial\Omega$ и, следовательно, $E_1, \dots, E_m \subset \Omega$, то $\mathcal{K}$ будем называть конденсатором Хессе (см. [8]) в $\mathbb{R}^n$.

Величину

$$\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K} = \inf_u \int\limits_\Omega |\nabla u| w dx$$

назовем $(1, w)$-емкостью конденсатора $\mathcal{K}$. Здесь инфимум берется по всем вещественнозначным функциям u, удовлетворяющим локально условию Липшица на Ω и равным δ_i в некоторой окрестности множества E_i, $i = 0, \dots, m$. Класс таких функций, допустимых для $\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K}$, обозначим через $\mathrm{Adm}_{1,w}\mathcal{K} = \mathrm{Adm}(\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$. Здесь отметим, что по теореме Радемахера (см. [4, Theorem 3.16]) любая функция $u \in \mathrm{Adm}\,\mathcal{K}$ дифференцируема п.в. на Ω и в точках ее дифференцируемости на Ω мы имеем $|\nabla u| = L(x, u)$, где

$$L(x,u) = \limsup_{\Delta x \to 0} \left| \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right|$$

является борелевской функцией на Ω (см. [11, Sec. 5]). Поэтому ниже мы будем считать, что $|\nabla u(x)| = L(x, u)$ в тех точках Ω, где u не дифференцируема. Данное требование не повлияет на величину

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u| w dx$$

для $u \in \mathrm{Adm}_{1,w}\mathcal{K}$.

Под кривой γ в $\mathbb{R}^n$ будем понимать образ невырожденного числового интервала (a, b) или сегмента $[a, b]$ при его непрерывном отображении $x = x(t)$ в $\mathbb{R}^n$. В последующем мы полагаем, что отображение $x = x(t)$ не является постоянным на любом невырожденном отрезке из (a, b) и определяет параметризацию кривой γ. Мы будем говорить, что кривая γ соединяет множества $F, K \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, если ее параметризация $x = x(t)$, $a < t < b$, удовлетворяет условиям

$$\liminf_{t \to a} h(x(t), F) = \liminf_{t \to b} h(x(t), K) = 0. \tag{1}$$

Если условия (1) выполнены, то мы будем говорить, что кривая γ ориентирована в направлении от F к K.

По заданной борелевской функции $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ и локально спрямляемой кривой γ, используя ее натуральную параметризацию $x = x(s)$, $s \in S$ (подробнее см., например, [10, Sec. 2.1]), определим

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds$$

как интеграл Лебега

$$\int\limits_{S} \rho(x(s)) ds.$$

С конденсатором $\mathcal{K} = (\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$ мы ассоциируем конфигурацию

$$\alpha H = (\alpha_{01} H_{01}, \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m}).$$

Здесь H_{ij} — семейство всех локально спрямляемых кривых γ в $\Omega \setminus E$, которые соединяют множества E_i и E_j, $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$, $H = \{H_{01}, \ldots, H_{m-1,m}\}$, $\alpha = \{\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{m-1,m}\}$. Кроме того, каждая кривая $\gamma \in H_{ij}$ ориентирована в направлении от E_i к E_j, если $\delta_i < \delta_j$, и в противоположном направлении, если $\delta_i > \delta_j$.

Определим $(1, w)$-модуль конфигурации αH, или, иначе, $(1, w)$-модуль конденсатора $\mathcal{K}$ как величину

$$m_{1,w}(\alpha H) = \inf \int\limits_{\Omega} \rho w dx.$$

Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho\colon \Omega \to [0; +\infty]$, удовлетворяющим условию

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant \alpha_{ij}$$

для всех $\gamma \in H_{ij}$ с $0 \leqslant i < j \leqslant m$ и $H_{ij} \neq \emptyset$. Класс всех таких функций, называемых в дальнейшем допустимыми метриками для $m_{1,w}(\alpha H)$, будем обозначать через $\mathrm{adm}_{1,w}(\alpha H) = \mathrm{adm}_{1,w}(\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$. По определению $m_{1,w}(\alpha H) = 0$, если $H_{ij} = \emptyset$ для всех $0 \leqslant i < j \leqslant m$. В этом случае $\mathrm{adm}_{1,w}(\alpha H)$ представляет собой множество всех борелевских функций $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$.

Как следует из теоремы Витали—Каратеодори (см. [11, с. 57, Theorem 2.24]), для $\rho \in L_{1,w}(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{adm}_{1,w}(\alpha H)$ существует полунепрерывная снизу на $\mathbb{R}^n$ функция $g \geqslant \rho$ с нормой $\|g\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)}$, сколь угодно близкой к $\|\rho\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)}$. Отсюда нетрудно заметить, что

$$m_{1,w}(\alpha H) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho w dx : \rho \text{ полунепрерывна снизу на } \mathbb{R}^n \text{ и } \rho \in \mathrm{adm}_{1,w}(\mathcal{K}) \right\}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — конденсатор Хессе. Для $\frac{1}{k}$-окрестностей $O(E_i, 1/k)$ его пластин E_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, $k \in \mathbb{N}$, выберем $\tilde{k}_0$ так, чтобы замыкания этих окрестностей попарно не пересекались при $k = \tilde{k}_0$. Пусть $O_i(k) \subset O(E_i, 1/k)$ — открытые множества с кусочно-гладкой границей и $E_i \subset \overline{O_i(k+1)} \subset O_i(k)$, $k \geqslant \tilde{k}_0$. Также обозначим

$$E(k) = \bigcup_{i=0}^{m} \overline{O_i(k)},$$

$\Omega(k) = \Omega \setminus E(k)$.

Через $H_{ij}(k)$ обозначим семейство локально спрямляемых кривых в $\Omega(k)$, соединяющих $\overline{O_i(k)}$ и $\overline{O_j(k)}$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$. Кривые из $H_{ij}(k)$ считаются ориентированными в направлении от $\overline{O_i(k)}$ до $\overline{O_j(k)}$ при $\delta_i < \delta_j$, и в противоположном направлении, если $\delta_i > \delta_j$. Кроме того, нетрудно заметить, что в случае $H_{ij} = \emptyset$ семейство $H_{ij}(k)$ также будет пустым при всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$.

3. Вспомогательные результаты.

Ниже w — некоторый фиксированный A_1-вес. Нам понадобятся следующие известные свойства A_1-весов.

Предложение 1 (см. [12, Remark 1.2.4, Properties 7-8]). *Существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что неравенства*

$$M(w(x)) \leqslant C_1 w(x), \quad w(x) \geqslant \frac{C_2}{(1+|x|)^n} \tag{3}$$

выполняются п.в. на $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2 (см. [12, Remark 1.2.4, Property 1]). $L_{1,w}(\Omega) \subset L_1(\Omega, loc)$ *и, если Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $L_{1,w}(\Omega) \subset L_1(\Omega)$.*

Как и в случае A_p-весов, $1 < p < \infty$, по стандартной схеме (см. [1, лемма 1]) доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Для заданного конденсатора $\mathcal{K}$ существует функция u_0 на $\overline{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющая следующим условиям*:

(i) *u_0 — бесконечно дифференцируемая функция в $\mathbb{R}^n$ и $u_0 \in \mathrm{Adm}_{1,w}\,\mathcal{K}$;*
(ii) *u_0 равна постоянной C_0 в некоторой окрестности точки ∞, где $C_0 = 0$, если $\infty \notin E$, и $C_0 = \delta_0$, если $\infty \in E_0$.*

Из леммы 1 и свойства $|\nabla u| \in \mathrm{adm}_{1,w}\,\alpha H$, где $u \in \mathrm{Adm}_{1,w}\,\mathcal{K}$, получим еще одно утверждение.

Следствие 1. *Для конденсатора $\mathcal{K}$ справедлива оценка*

$$m_{1,w}(\alpha H) \leqslant \mathrm{Cap}_{1,w}\,\mathcal{K} < \infty. \tag{4}$$

Лемма 2. *По заданному $\beta > 0$ можно указать такую положительную непрерывную на $\mathbb{R}^n$ функцию g, что*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g w dx < \beta.$$

Доказательство. Для $j = 1, 2, \dots$ пусть $A_j = B(0, j+1) \setminus \overline{B(0, j-1)}$. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — C^∞-разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{R}^n$. По построению носитель $\operatorname{supp}\psi_j w \subset A_j$. В силу $w \in L_{1,w}(\mathbb{R}^n, loc)$ можно подобрать такое $\varepsilon_j \in (0,1)$, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon_j w \psi_j dx < \frac{\beta}{2^j}.$$

Тогда можно взять

$$g = \sum_{j \geqslant 1} \varepsilon_j \psi_j,$$

что завершает доказательство. □

Лемма 3. *По данному $\varepsilon > 0$ можно указать метрику $\rho \in \operatorname{adm}_{1,w}(\alpha H) \cap L_{1,w}(\mathbb{R}^n)$, для которой выполняются следующие условия:*

(i) *ρ полунепрерывна снизу, положительна на $\mathbb{R}^n$ и для любого ограниченного замкнутого множества $K \subset \mathbb{R}^n$*

$$\inf_K \rho > 0;$$

(ii) *ρ непрерывна на $\Omega \setminus E$;*

(iii) *выполняются неравенства*

$$m_{1,w}(\alpha H) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho w dx < C_1 m_{1,w}(\alpha H) + \varepsilon,$$

где постоянная C_1 введена в предложении 1 и $C_1 = 1$ в случае $w \equiv 1$.

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ в силу (2), (4) существует такая полунепрерывная снизу на $\mathbb{R}^n$ метрика $\rho_1 \in \operatorname{adm}_{1,w}(\alpha H) \cap L_{1,w}(\mathbb{R}^n)$, что

$$m_{1,w}(\alpha H) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_1 w dx < m_{1,w}(\alpha H) + \frac{\varepsilon}{3C_1}.$$

Определим $d(x)\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ как $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E))$. Известно (см. [4, Sec. 3.2.34]), что $d(x)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^n$ условию Липшица с константой Липшица $Lip(d) \leqslant 1$ и $|\nabla d(x)| = 1$ в точках дифференцируемости $d(x)$ на $\Omega \setminus E$.

Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\rho_{2,k}(x) = T_k(\rho_1(x)) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho_1 \left(x + \frac{d(x)}{2k} y \right) dy, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{N}$ и T_k — усредняющий оператор, изученный детально в [8, Lemma 4.3]. В частности, для всех $k \geqslant 1$ $\rho_{2,k}$ — функция, полунепрерывная снизу на $\mathbb{R}^n$ и непрерывная в $\Omega \setminus E$ в силу того, что $d(x) > 0$ на $\Omega \setminus E$. Отметим, что при фиксированном $y \in B(0,1)$ отображение $\theta_{y,k}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное по правилу

$$\theta_{y,k}(x) = x + \frac{d(x)}{2k} y,$$

удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right) |x - x'| \leqslant |\theta_{y,k}(x) - \theta_{y,k}(x')| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2k}\right) |x - x'| \tag{6}$$

для любых $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Другими словами, $\theta_{y,k}$ — квазиизометрический гомеоморфизм области $\mathbb{R}^n$ на $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n)$. По теореме Брауэра (см. [2]) $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n) = G$ — область в $\mathbb{R}^n$ и поскольку $\theta_{y,k}(x)| < \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то G не имеет в $\mathbb{R}^n$ конечных граничных точек. Действительно, пусть $z_0 \in \partial G$ и $|z_0| < \infty$. Тогда существует прямолинейный отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$, где $[a,b) \subset G$, $b \in \partial G$. В силу (6) $\theta_{y,k}^{-1}$ можно доопределить до непрерывной функции на $[a,b]$ так, что $\theta_{y,k}^{-1}(b) = x_0$ будет конечной точкой в $\mathbb{R}^n$. Это противоречит тому, что по теореме Брауэра $\theta_{y,k}(B(x_0, r_0))$ — область в G для

$r_0 > 0$ и, следовательно, $b \in G$. Отсюда заключаем, что $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Ввиду того, что $d(x) = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)$ также заключаем, что $\theta_{y,k}(\mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)) = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \setminus E)$ и, значит,

$$\theta_{y,k}(\Omega \setminus E) = \Omega \setminus E. \tag{7}$$

Кроме того, якобиан $J(x, \theta_{y,k})$ отображения $\theta_{y,k}$ равен $1 + \frac{y \cdot \nabla d(x)}{2k}$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, в силу (6)

$$1 - \frac{1}{2k} \leqslant J(x, \theta_{y,k}) \leqslant 1 + \frac{1}{2k} \tag{8}$$

п.в. на $\mathbb{R}^n$.

Из (5) интегрированием получим, что

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{|B(0,1)|} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_1 \left(x + \frac{d(x)}{2k} y \right) w(x) dx.$$

Применив во внутреннем интеграле справа замену $z = x + \frac{d(x)}{2k} y$, из (8) и свойств $\theta_{y,k}$, меняя порядок интегрирования, придем к оценке

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2k}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} w(x(z)) dy \right) \rho_1(z) dz.$$

Ввиду предложения 2 и соотношения $x = z - \dfrac{d(x(z))}{2k} y$ заключим, что

$$\frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} w \left(z - \frac{1}{2k} d(x(z)) y \right) dy = \frac{1}{\left| B\left(z, \frac{d(x(z))}{2k}\right) \right|} \int\limits_{B\left(z, \frac{d(x(z))}{2k}\right)} w(y) dy \leqslant M(w(z)) \leqslant C_1 w(z)$$

п.в. на $\mathbb{R}^n$. Отсюда

$$\|\rho_{2,k}\|_{L_{1,w}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{C_1}{1 - \frac{1}{2k}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_1(z) w(z) dz. \tag{9}$$

Очевидно, что в случае $w \equiv 1$ выполняется равенство $M(w(x)) = 1$ на $\mathbb{R}^n$ и в (3), (9) можно положить $C_1 = 1$.

Покажем теперь, что

$$\rho_{3,k} = \left(1 + \frac{1}{2k} \right) \rho_{2,k} \in \operatorname{adm}_{1,w} \alpha H.$$

Рассмотрим кривую $\gamma \in H_{ij}$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$. Поскольку согласно (7)

$$z = \theta_{y,k}(x) = x + \frac{d(x)}{2k} y$$

— квазиизометрический гомеоморфизм множества $\Omega \setminus E$ на $\Omega \setminus E$ при каждом $y \in B(0,1)$, то по теореме Фубини (см. [4, теорема 2.6.2]) имеем

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{2,k} ds = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} dy \int\limits_{\gamma} \rho_1 \left(x + \frac{1}{2k} d(x) y \right) ds_x.$$

Для внутреннего интеграла очевидным образом получим оценку

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1 \left(x + \frac{1}{2k} d(x) y \right) ds_x = \int\limits_{z^{-1}(\gamma)} \rho_1(z) \frac{ds_x}{ds_z} ds_z \geqslant \frac{\alpha_{ij}}{1 + \frac{1}{2k}},$$

поскольку в силу (6) справедлива оценка

$$\frac{ds_z}{ds_x} = \left| \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2k} d'_s(x) y \right| \leqslant 1 + \frac{1}{2k}$$

для всех $s = s_x$ из области определения натуральной параметризации кривой γ, исключая множество нулевой линейной меры, и кривая $z^{-1}(\gamma) \in \operatorname{adm}_{1,w} \alpha H$. Это влечет нужное свойство $\rho_{3,k} \in \operatorname{adm}_{1,w} \alpha H$. Кроме того, из выбора ρ_1, $\rho_{3,k}$ следует, что

$$m_{1,w}(\alpha H) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_{3,k} w dx < C_1 m_{1,w}(\alpha H) + \frac{\varepsilon}{3} + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $k \to \infty$. Выберем число $k' \in \mathbb{N}$, для которого $o(1) < \varepsilon/3$ и положим $\rho = \rho_{3,k'} + g$, где g — функция из леммы 2 с $0 < \beta < \varepsilon/3$. Очевидно, что ρ удовлетворяет условиям леммы, и это завершает доказательство. □

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{K}$ — конденсатор Хессе в $\mathbb{R}^n$ и пусть метрика $\rho \in \operatorname{adm}_{1,w} \alpha H$ удовлетворяет условиям леммы 3 с заданным $\varepsilon > 0$. Тогда для $\eta \in (0,1)$ и всех $H_{ij} \neq \emptyset$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$, существует такое натуральное число $k_0 \geqslant \tilde{k}$, что*

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds > \alpha_{ij}(1-\eta) \tag{10}$$

для всех $\gamma \in H_{ij}(k)$ и всех $k \geqslant k_0$. Здесь $\tilde{k}$, $H_{ij}(k)$ из п. 2.

Лемма 4 доказывается по схеме, предложенной в [1, лемма 5] для произвольных конденсаторов в $\mathbb{R}^n$ с A_p-весом Макенхаупта, $1 < p < \infty$. В силу топологического условия $\overline{(\partial\Omega \setminus E)} \cap E = \emptyset$ для конденсаторов Хессе эта схема значительно упрощается и позволяет заменить показатель суммируемости $p \in (1, +\infty)$ на $p = 1$, поэтому доказательство этой леммы опускаем.

4. Формулировка и доказательство основного результата.

Теорема 1. *Пусть w — некоторый A_1-вес и $\mathcal{K}$ — конденсатор Хессе в $\mathbb{R}^n$. Тогда емкость $\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K}$ эквивалентна модулю $m_{1,w}(\alpha H)$. Другими словами,*

$$m_{1,w}(\alpha H) \leqslant \operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leqslant C_1 m_{1,w}(\alpha H),$$

где положительная постоянная C_1 введена в предложении 1 и $C_1 = 1$ в случае $w \equiv 1$.

Доказательство. В силу следствия 1 достаточно доказать, что $\operatorname{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leqslant C_1 m_{1,w}(\alpha H)$. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и пусть метрика ρ удовлетворяет условиям леммы 3 с указанным ε.

Применим лемму 4 к этой метрике ρ с заданным наперед $\eta \in (0, 1/2)$ и найдем для ρ, η соответствующее натуральное число $k_0 = k_0(\eta, \rho)$, для которого выполняются неравенства (10) с $k \geqslant k_0$.

Пусть

$$\rho_0 = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-2\eta}, & x \in \Omega(k_0), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(k_0). \end{cases}$$

Тогда $\rho_0 \in \operatorname{adm}_{1,w} \alpha H$ и по построению ρ_0 непрерывна на $\Omega(k_0) = \Omega \setminus E(k_0)$, равна нулю на

$$E(k_0) = \bigcup_{i=0}^{m} \overline{O_i(k_0)}$$

и, следовательно, ρ_0 локально ограничена на

$$\Omega_{k_0+1} = \Omega \bigcup \left(\bigcup_{i=0}^{m} O_i(k_0+1) \right)$$

и п.в. непрерывна на Ω_{k_0+1}.

Положим $u_i = \delta_i$ на $\overline{O_i(k_0+2)}$ и

$$u_i(x) = \delta_i + \inf_{\gamma_x} \int\limits_{\gamma_x} \rho_0 ds$$

для всех $\Omega_{k_0+1} \setminus \overline{O_i(k_0+2)}$, где инфимум берется по всем спрямляемым кривым, $\gamma_x \subset \Omega_{k_0+1} \setminus \overline{O_i(k_0+2)}$, соединяющим точку x и $\overline{O_i(k_0+2)}$. Если таких кривых не найдется, то положим

$$u_i(x) = \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \delta_j.$$

В силу известных свойств функций типа

$$\inf_{\gamma_x} \int_{\gamma_x} \rho_0 ds$$

(см. [8, Lemma 5.3]) $u_i(x)$ удовлетворяет на Ω_{k_0+1} локально условию Липшица (поскольку ρ_0 локально ограничена на Ω_{k_0+1}) и $|\nabla u_i(x)| \leqslant \rho_0(x)$ п.в. на Ω_{k_0+1} (в точках, где ρ_0 непрерывна на Ω_{k_0+1}). Кроме того, $u_i = \delta_i$ в окрестности E_i и либо $u_i(x) \geqslant \delta_i + \alpha_{ij} = \delta_i + |\delta_i - \delta_j| \geqslant \delta_j$, либо

$$u_i(x) = \max_{0 \leqslant l \leqslant m} \delta_l \geqslant \delta_j$$

в точках $x \in O_j(k_0+2)$ для всех $0 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq i$.

Положим

$$u(x) = \min_{0 \leqslant i \leqslant m} u_i(x)$$

на Ω_{k_0+1}. Как срезка (см. [7, Theorem 1.20]) $u(x)$ удовлетворяет на $\Omega_{k_0+1} \supset \Omega$ локально условию Липшица и равна δ_i в некоторой окрестности множества E_i и, следовательно, $u(x) \in \mathrm{Adm}_{1,w} \mathcal{K}$, $|\nabla u(x)| \leqslant \rho_0(x)$ п.в. на Ω_{k_0+1}. Отсюда

$$\mathrm{Cap}_{1,w} \mathcal{K} \leqslant \int_{\Omega} |\nabla u| w dx \leqslant \int_{\Omega} \rho_0 w dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \rho w dx + o(1) \leqslant C_1 m_{1,w}(\alpha H) + o(1) + \varepsilon,$$

где $o(1) \to 0$ при $\eta \to 0$.

Устремляя последовательно $\eta \to 0$, $\varepsilon \to 0$, получим утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дымченко Ю. В., Шлык В. А.* Об одной задаче Дубинина для емкости конденсатора с конечным числом пластин// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 6. — С. 841–852.
2. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. — М.: Наука, 1964.
3. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. — Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.
5. *Ahlfors L. V.* Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory. — New York: McGraw-Hill, 1973.
6. *Dubinin V.* Some unsolved problems about condenser capacities on the plane// in: Complex Analysis and Dynamical Systems (*Agranovsky M., Golberg A., Jacobzon F., Shoikhet D., Zalcman L. Complex*, eds.). — Cham: Birkhäuser, 2018. — P. 81–92.
7. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations. — New York: Dover, 2012.
8. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality// Ark. Mat. — 1975. — *13*, № 1. — С. 131–144.
9. *Muckenhoupt B.* Weighted norm unequalities for the Hardy maximal functions// Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — *192*. — P. 207–226.
10. *Ohtsuka M.* Extremal Length and Precise Functions. — Tokyo: Gakkōtosho, 2003.
11. *Rudin W.* Real and Complex Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1987.
12. *Turesson B.* Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces. — Berlin: Springer, 2000.

Шлык Владимир Алексеевич
Российская таможенная академия, Владивостокский филиал;
Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток
E-mail: `shlykva@yandex.ru`