



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 107–124
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-107-124

УДК 517.977, 519.7

О ПОСТАНОВКЕ И РАЗРЕШИМОСТИ l -ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. С. С. ПОСТНОВ

Аннотация. Работа обобщает полученные ранее результаты анализа применимости метода моментов к исследованию задач оптимального управления линейными системами дробного порядка с сосредоточенными параметрами на новые типы систем, отличающиеся выбором оператора дробного дифференцирования в определяющих уравнениях. Исследована постановка и разрешимость l -проблемы моментов для простейших одно- и двумерных систем с операторами Прабхакара, Сайго, Гринько. В ряде случаев получены точные аналитические решения этой проблемы.

Ключевые слова: динамическая система дробного порядка, оптимальное управление, дробная производная, l -проблема моментов.

ON THE STATEMENT AND SOLVABILITY OF THE l -PROBLEM OF MOMENTS FOR FRACTIONAL SYSTEMS

© 2022 S. S. POSTNOV

ABSTRACT. In this paper, we generalize the method of moments for optimal control problems for fractional linear systems with concentrated parameters to new types of systems. We analyze the statement and solvability of the l -problem of moments for the simplest one- and two-dimensional systems with Prabhakar, Saigo, and Grinko operators. In some cases, we obtain exact analytical solutions of this problem.

Keywords and phrases: fractional order dynamical system, optimal control, fractional derivative, l -problem of moments.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 93C23, 34K35, 34A08

1. Введение. В ходе ранее выполненных исследований было проанализировано влияние типа оператора дробного дифференцирования в уравнении, описывающем динамику системы, на свойства решений задачи оптимального управления для данной системы (см. [5] и ссылки в ней). Были рассмотрены операторы Хильфера, Адамара, Эрдейи–Кобера, Катугамполы, Капуто–Фабрицио, Атанганы–Балеану. В целом, на основе полученных результатов можно отметить два основных момента. Во-первых, для всех операторов, за исключением оператора Капуто–Фабрицио, при постановке l -проблемы моментов возникают дополнительные условия её корректности, связывающие показатели оператора дробного дифференцирования с индексом лебегова пространства, в котором определено управление. Это качественно отличает исследованные системы дробного порядка от аналогичных систем целого порядка, при этом полученные дополнительные условия, как правило, тривиально выполняются при целых значениях показателей оператора дифференцирования. Кроме того, выполнение условий корректности l -проблемы моментов, для исследованных систем влечёт за собой выполнение условий её разрешимости, которые

принято проверять для систем целого порядка. Во-вторых, сравнение решений задачи оптимального управления, полученных в вышеупомянутых работах методом моментов, показало наличие как весьма схожих, так и кардинально отличающихся тенденций в их поведении. Например, граничные траектории систем Римана—Лиувилля и Капуто оказываются весьма близки, но зависимости нормы оптимального управления от показателя дробной производной различаются как количественно, так и качественно. В то же время, зависимости нормы оптимального управления от показателя дробной производной в случае операторов Римана—Лиувилля и Адамара оказываются близки качественно, а в определённом диапазоне изменения показателя производной — и количественно. Отмеченные факты подтверждают, что динамические системы дробного порядка с управлением обладают характерными особенностями, не только отличающими их от аналогичных систем целого порядка, но и позволяющих характеризовать их разновидности, соответствующие разным определениям оператора дробного дифференцирования. В свою очередь, это делает актуальной затронутую проблематику.

Настоящая работа продолжает упомянутые исследования и содержит аналогичные результаты для уравнений с операторами Прабхакара, Сайго и Гринько. Данные операторы являются многопараметрическими и содержат в ядре как дробно-степенную функцию, так и одну из специальных функций — соответственно функцию Прабхакара, гипергеометрическую функцию Гаусса или вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера.

2. Предварительные сведения. В данном разделе приводятся определения используемых в дальнейшем левосторонних операторов дробного интегрирования и дифференцирования. Правосторонние операторы могут быть определены аналогичным образом.

Определение 1. Дробный интеграл Прабхакара от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^P I_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu}^\gamma[\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1 - \mu}} q(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь $E_{\rho, \mu}^\gamma[z]$ — функция Прабхакара, являющаяся обобщением функции Миттаг-Леффлера:

$$E_{\rho, \mu}^\gamma[z] = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\rho k + \mu)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

$\gamma, \rho, \mu, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\operatorname{Re}(\mu) > 0$.

Определение 2. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Прабхакара типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^{PRL} D_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^P I_{\rho, 1 - \mu, \omega, t}^{-\gamma} q(t), \quad (3)$$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0, 1)$.

Определение 3. Пусть задана функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q'(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Прабхакара типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле (см. [8]):

$${}_0^{PC} D_{\rho, \mu, \omega, t}^\gamma q(t) = {}_0^P I_{\rho, 1 - \mu, \omega, t}^{-\gamma} q'(t), \quad (4)$$

$\gamma, \rho, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\mu \in (0, 1)$.

Определение 4. Дробный интеграл Сайго от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^S I_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = \frac{t^{-\alpha - \beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_2F_1\left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t}\right)}{(t - \tau)^{1 - \alpha}} q(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Здесь

$${}_2F_1\left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t}\right)$$

— гипергеометрическая функция Эйлера, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Определение 5. Пусть задана функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q'(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Сайго типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^{SC}D_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = {}_0^SI_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q'(t), \quad (6)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 6. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Сайго типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [7]):

$${}_0^{SRL}D_t^{\alpha, \beta, \gamma} q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^SI_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q(t), \quad (7)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Определение 7. Дробный интеграл Гринько от некоторой функции $q(t) \in L_1(0, T)$ может быть вычислен по следующей формуле (см. [3, 9]):

$${}_0^GI_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t-\tau)]}{(t-\tau)^{1-\alpha}} q(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь ${}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t-\tau)]$ — гипергеометрическая функция Куммера, $\alpha, \beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Определение 8. Пусть задана функция $q(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Гринько типа Римана—Лиувилля может быть вычислена по следующей формуле (см. [3, 9]):

$${}_0^{GRL}D_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = \frac{d}{dt} {}_0^GI_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q(t), \quad (9)$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Определение 9. Пусть задана функция $q(t)$, удовлетворяющая условию $q'(t) \in L_1(0, T)$. Тогда дробная производная Гринько типа Капуто может быть вычислена по следующей формуле:

$${}_0^{GC}D_t^{\alpha, \beta, \eta} q(t) = {}_0^GI_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q'(t), \quad (10)$$

$\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$.

3. Постановка задачи. Будем полагать, что состояние системы $q(t)$ и управление $u(t)$ определены на полуинтервале $t \in (0, T]$, и рассмотрим две простейшие линейные системы дробного порядка с сосредоточенными параметрами — одиночный и двойной интеграторы.

Определение 10. Одиночным интегратором будем называть систему, динамика которой определяется уравнением следующего вида:

$${}_0D_t^\sigma q(t) = u(t), \quad (11)$$

где ${}_0D_t^\sigma$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования, $t \in (0, T]$.

Определение 11. Двойным интегратором будем называть систему, динамика которой определяется уравнениями следующего вида:

$${}_0D_t^{\sigma_1} q_1(t) = q_2(t), \quad {}_0D_t^{\sigma_2} q_2(t) = u(t), \quad t \in (0, T]. \quad (12)$$

Показатели дробного дифференцирования σ и $\sigma_{1,2}$ в уравнениях (11)—(12) являются в общем случае составными, подразумевая набор из нескольких чисел в соответствии с используемым определением оператора дробного дифференцирования.

Допустимые управления $u(t)$ считаются элементами пространства $L_p(0, T]$, $p > 1$.

В следующем разделе будут рассмотрены случаи, когда оператор ${}_0D_t^\sigma$ в уравнениях (11)–(12) понимается в смысле Прабхакара, Сайго или Гринько. Соответственно, системы, которые описываются уравнениями (11) или (12) с одним из перечисленных операторов дробного дифференцирования, будут называться системами Прабхакара, Сайго или Гринько.

Для систем (11) и (12) начальные условия задаются в локальном или нелокальном виде, в зависимости от типа выбранного определения оператора дробного дифференцирования (см. след. раздел). Конечные условия для этих систем задаются единообразно:

$$q(T) = q^T(T), \quad (13)$$

где в случае системы (11) функция $q(T)$ является скаляром, а в случае системы (12) — вектор-функцией $q(T) = (q_1(T), q_2(T))$. Подразумевается также, что правая часть выражения (13) может параметрически зависеть от выбора конечного момента T .

Задача 1 (задача оптимального управления). Найти такое управление $u(t)$, $t \in (0, T]$, чтобы исследуемая система перешла из заданного начального состояния в заданное конечное состояние и при этом было выполнено одно из следующих условий:

- (i) норма управления в пространстве $L_p(0, T]$, $p > 1$, достигла минимального значения, когда значение T задано (задача А);
- (ii) время управления T было минимальным при условии $\|u\|_{L_p} \leq l$, $l > 0$, где l задано (задача Б).

Известно (см. [2, 4]), что для систем целого порядка задача 1 может быть сведена к l -проблеме моментов следующего вида.

Задача 2 (l -проблема моментов). Пусть дана система функций $g_n(\tau) \in L_{p'}(0, T]$ и набор чисел c_n , $n = 1, \dots, N$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, а также задано число $l > 0$. Необходимо построить такую функцию $u(t) \in L_p(0, T]$, $1/p + 1/p' = 1$, что выполняются соотношения

$$\int_0^T g_n(\tau) u(\tau) d\tau = c_n, \quad (14)$$

и условие

$$\|u(t)\|_{L_p} \leq l. \quad (15)$$

Числа c_n в формуле (14), называемые моментами, также могут параметрически зависеть от выбора времени T : $c_n = c_n(T)$.

Определение 12. Будем говорить, что постановка l -проблемы моментов в форме задачи 2 для заданной системы корректна, если для этой системы определена норма функций $g_n(\tau)$ в пространстве $L_{p'}[0, T]$, моменты c_n определены и ограничены и хотя бы один из них отличен от нуля.

Необходимым и достаточным условием разрешимости l -проблемы моментов в форме задачи 2 является линейная независимость функций $g_n(\tau)$ или, что эквивалентно, выполнение условия

$$\Lambda_N > 0 \quad (16)$$

(см. [2, 4]), где число Λ_N определяет норму оптимального (в смысле задачи А) управления и является решением следующей задачи условной минимизации.

Задача 3. Найти

$$\min_{\xi_1, \dots, \xi_N} \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \left(\int_0^T \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{\Lambda_N} \quad (17)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^N \xi_i c_i = \sum_{i=1}^N \xi_i^* c_i = 1. \quad (18)$$

Если задача 3 решена, то оптимальное управление в смысле задачи А даётся формулой

$$u(t) = \Lambda_N^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in (0, T] \quad (19)$$

(см. [2]). Решение задачи Б, в свою очередь, определяется формулой

$$u(t) = l^{p'} \left| \sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^* g_i(t) \right], \quad t \in (0, T^*] \quad (20)$$

(см. [2]), где T^* — минимальный неотрицательный действительный корень уравнения

$$\Lambda_N(T) = l. \quad (21)$$

Далее в данной работе для систем (11) и (12) задача 1 будет сведена к задаче 2, при этом будут получены условия корректности постановки последней и построены её решения.

4. Основные результаты. В данном разделе приведены результаты, касающиеся обоснования корректности и разрешимости l -проблемы моментов для одиночного интегратора дробного порядка в случаях, когда оператор дробного дифференцирования в определяющем уравнении (11) понимается в смысле Прабхакара, Сайго или Гринько. В ряде случаев получены явные аналитические решения l -проблемы моментов для исследуемой системы.

Как известно, непосредственным многомерным обобщением одиночного интегратора является цепочка интеграторов, в частности, двойной интегратор (12). Для такой системы получить общее аналитическое решение l -проблемы моментов уже не удаётся, как и для исследованных ранее двойного интегратора Хильфера, Адамара и Эрдейи—Кобера (см. [5, 6] и ссылки в них). В настоящем разделе приводятся результаты, касающиеся обоснования корректности и разрешимости l -проблемы моментов.

4.1. Постановка и разрешимость l -проблемы моментов: одиночный интегратор. Рассмотрим одиночный интегратор Прабхакара: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (4) или (3) при $\mu \in (0, 1)$. В первом случае начальное условие для уравнения (11) ставится в локальном виде:

$$q(0+) = q^0. \quad (22)$$

Во втором случае начальное условие является нелокальным и может быть записано в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^P I_{\rho, 1-\mu, \omega, t}^{-\gamma} q(t) \right] = s^0. \quad (23)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu}^{\gamma}[\omega(t-\tau)^{\rho}]}{(t-\tau)^{1-\mu}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (24)$$

(см. [8]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (4), и $f(t) = s^0 t^{\mu-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (3).

Решение (24) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (25)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (24),

$$g(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu}^{\gamma}[\omega(T-\tau)^{\rho}]}{(T-\tau)^{1-\mu}}. \quad (26)$$

Теорема 1. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (26), $\gamma > 0$, $\rho > 0$, $\mu \in (0, 1)$, а момент $c(T)$ определяется формулой (25) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия

$$\mu > \frac{1}{p}. \quad (27)$$

Доказательство. Норма функции $g(\tau)$, определяемой формулой (26), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ может быть оценена следующим образом:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \|(T - \tau)^{\mu-1}\|_{L_{p'}} \|E_{\rho, \mu}^\gamma[\omega(T - \tau)^\rho]\|_{L_{p'}}.$$

Поскольку обобщённая функция Миттаг-Леффлера является целой функцией конечного порядка роста (см. [10, Ch. 1]), то второй множитель в правой части неравенства ограничен. Первый же множитель определён, положителен и ограничен при условии

$$p'(\mu - 1) > -1.$$

Учитывая связь $1/p + 1/p' = 1$, получаем отсюда условие (27). Выполнение этого условия означает, что норма функции (26) определена, что с учётом предположения об отличии от нуля момента (25) обуславливает корректность исследуемой проблемы моментов. Параметр Λ_1 можно вычислить, решив одномерную задачу 3. В данном случае $\xi = \xi^* = 1/c$ и параметр Λ_1 выражается через норму функций (26) и момент (25) следующим образом:

$$\Lambda_1 = \frac{|c|}{\|g\|_{L_{p'}}}. \quad (28)$$

Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условия (27) правая часть выражения (28) ограничена и положительна. Следовательно, проблема моментов (14)–(15) с учётом (25)–(26) разрешима. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь одиночный интегратор Сайго: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (6) или (7) при $\alpha \in (0, 1)$. В первом случае, как и выше, начальное условие для уравнения (11) можно поставить в локальном виде (22), а во втором случае начальное условие ставится в нелокальном виде:

$$\frac{\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(\alpha + \gamma)} \lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^S I_t^{1-\alpha, -\beta-1, \alpha+\gamma-1} q(t) \right] = s^0. \quad (29)$$

При этом предполагается выполнение следующих условий (см. [11]):

$$\gamma - \beta > 0, \quad \beta < 0, \quad \alpha + \gamma > 0. \quad (30)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \frac{t^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{t})}{(t - \tau)^{1-\alpha}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (31)$$

(см. [7, 11]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (6), и $f(t) = s^0 t^{-\beta-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (7).

Решение (31) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (32)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (31),

$$g(\tau) = \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{{}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T})}{(T - \tau)^{1-\alpha}}. \quad (33)$$

Теорема 2. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (33), $\alpha \in (0, 1)$, а момент $s(T)$ определяется формулой (32) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:

1. в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Капуто (формулой (6)), — условия

$$\alpha > \frac{1}{p}, \quad \gamma > \beta; \quad (34)$$

2. в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Римана—Лиувилля (формулой (7)) и выполнены условия (30), — условия

$$\alpha > \frac{1}{p} \quad (35)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Капуто. Начальное условие тогда ставится в виде (22) и момент $s(T)$ считается ограниченным и отличным от нуля.

Оценим норму функции $g(\tau)$, определяемой формулой (33), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \|(T-\tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\gamma; \alpha; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}.$$

Если выполнено первое из условий (34), то норма $\|(T-\tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}}$ определена (как и выше, в доказательстве теоремы 1). Выполнение второго из условий (34) означает, что гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста. Т. е., при выполнении условий (34) норма $\|g\|_{L_{p'}}$ определена и ограничена, следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется в смысле Римана—Лиувилля. Начальное условие тогда ставится в виде (29) и определено при выполнении условий (30), тогда момент $s(T)$ может считаться ограниченным и по условию предполагается отличным от нуля. Сделанная выше оценка для нормы функции (33), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ будет справедлива и в этом случае. Соответственно, требование существования нормы $\|(T-\tau)^{\alpha-1}\|_{L_{p'}}$, как и ранее, приводит к условию (35), а первое из условий (30) обеспечивает существование нормы

$$\left\| {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\gamma; \alpha; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}.$$

Таким образом, в этом случае рассматриваемая проблема моментов корректна при выполнении условий (30).

Параметр Λ_1 можно вычислить, как и выше, по формуле (28). Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условий (34) или (35) правая часть выражения (28) будет ограничена и положительна. Следовательно, проблема моментов (14)–(15) с учётом (32)–(33) разрешима. Теорема доказана. $\square$

Наконец, рассмотрим одиночный интегратор Гринько: уравнение (11), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (10) или (9) при $\alpha \in (0, 1)$. Аналогично предыдущему рассмотрению, локальное начальное условие (22) можно поставить для уравнения (11) с оператором (10), а в случае оператора (9) начальное условие нужно ставить в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^G I_t^{1-\alpha, -\beta, \eta} q(t) \right] = s^0. \quad (36)$$

Решение уравнения (11) можно записать в виде

$$q(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(t-\tau)]}{(t-\tau)^{1-\alpha}} u(\tau) d\tau + f(t) \quad (37)$$

(см. [3, 9]), где $f(t) = q^0$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (10), и $f(t) = s^0 t^{\alpha-1}$ в случае, когда оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения (9).

Решение (37) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме одномерной проблемы моментов (14), если положить

$$c(T) = q^T - f(T), \quad (38)$$

где $f(T)$ определяется так же, как и в решении (37),

$$g(\tau) = \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha}}. \quad (39)$$

Теорема 3. Пусть дана одномерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функция $g(\tau)$ определяется формулой (39), $\alpha \in (0, 1)$, а момент $c(T)$ определяется формулой (38) и отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия

$$\alpha > \frac{1}{p}. \quad (40)$$

Доказательство. Оценим норму функции $g(\tau)$ (см. (39)) в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\|g\|_{L_{p'}} \leq \| (T - \tau)^{\alpha-1} \|_{L_{p'}} \| {}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)] \|_{L_{p'}}.$$

Вырожденная гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что при выполнении условия (40) норма $\| (T - \tau)^{\alpha-1} \|_{L_{p'}}$ определена. Следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Как и ранее, параметр Λ_1 можно вычислить по формуле (28). Следовательно, при сделанных в условии теоремы предположениях и при выполнении условия (40) правая часть выражения (28) будет ограничена и положительна, т.е. проблема моментов (14)–(15) с учётом (38)–(39) будет разрешима. Теорема доказана. $\square$

4.2. Решение l -проблемы моментов: одиночный интегратор. Рассмотрим теперь решения l -проблемы моментов для уравнения (11). Имеют место следующие результаты.

Теорема 4. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (4) или (3), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (23) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 1.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{c(T)}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)}, \quad t \in (0, T]. \quad (41)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$ даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (42)$$

где T^* — наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{|c(T)|}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)} = l. \quad (43)$$

Доказательство. Поскольку считается, что выполнены условия теоремы 1, l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (25) и (26) корректна и разрешима. Тогда её решение можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Вычислим в явном виде параметр Λ_1 по формуле (28). Для этого сначала вычислим норму функции (26) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \frac{E_{\rho, \mu}^\gamma [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1-\mu}} \right| dt. \quad (44)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\mu \in (0, 1)$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$ функция Прабхакара $E_{\rho, \mu}^\gamma(z)$ положительно определена и представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (2). Следовательно, можно подставить представление (2) в (44) и выполнить почленное интегрирование:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^\mu}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\rho k + \mu + 1)} \frac{\omega^k}{k!} T^{\rho k + \mu}.$$

Отсюда, с учётом представления (2):

$$\|g\|_{L_1} = T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho).$$

Используя полученное выражение, вычислим (28):

$$\Lambda_1 = \frac{|c(T)|}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)}. \quad (45)$$

Подставим (45) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (26) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\mu \in (0, 1)$, $\gamma > 0$, $\rho > 0$ неотрицательна, следовательно, получим формулу (41).

Аналогично, запишем выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и учтём неотрицательность функции (26) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$. В результате получим формулу (42). Подставив выражение (45) в уравнение (21), получим (43). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. На основе решений (41)–(42) можно вычислить закон движения одиночного интегратора Прабхакара, соответствующий оптимальному управлению. Подставив выражения (41)–(42) в общее решение (24) и вычислив интеграл (с использованием представления (2)), получим:

$$q_A(t) = c(T) \frac{t^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega t^\rho)}{T^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega T^\rho)} + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (46)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] t^\mu E_{\rho, \mu+1}^\gamma(\omega t^\rho) + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (47)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ — соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (41) и (42), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (24). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (46)–(47) выполняется конечное условие (13).

Теорема 5. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (6) или (7), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (29) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 2 и условие $\alpha > \beta$.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1) \Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} T^\beta c(T), \quad t \in (0, T]. \quad (48)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (49)$$

где T^* — наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1) \Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} T^\beta |c| = l. \quad (50)$$

Доказательство. Поскольку считается, что выполнены условия теоремы 2, то l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (32) и (33) является корректной и разрешимой. Следовательно, решение этой проблемы можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Вычислим в явном виде норму функции (33) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \frac{T^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left| \frac{{}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T})}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \right| dt. \quad (51)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha > \beta$ гипергеометрическая функция Гаусса, присутствующая под интегралом в выражении (51), положительно определена. При выполнении условий теоремы 2 упомянутая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом следующего вида:

$${}_2F_1\left(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha; 1 - \frac{\tau}{T}\right) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha + \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + k)\Gamma(-\gamma + k)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{(1 - \frac{\tau}{T})^k}{k!}. \quad (52)$$

Подставив представление (52) в (51) и выполнив почленное интегрирование, получим:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^{-\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1(\alpha + \beta, -\gamma; \alpha + 1; 1).$$

Значение гипергеометрической функции в правой части полученного выражения можно вычислить через значения гамма-функции (см. [1, с. 371]):

$$\|g\|_{L_1} = T^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}.$$

Используя полученное выражение, вычислим параметр Λ_1 по формуле (28):

$$\Lambda_1 = |c(T)| T^\beta \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}. \quad (53)$$

Подставим (53) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (33) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при сделанных предположениях неотрицательна, следовательно, получим формулу (48).

Аналогично, запишем выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и учтём неотрицательность функции (33) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$. В результате получим формулу (49). Подставив выражение (53) в уравнение (21), получим (50). Теорема доказана. $\square$

Замечание. Уравнение (50) имеет единственное решение в случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется выражением (6) и начальное условие ставится в виде (22):

$$T^* = \left(\frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} \frac{l}{|q^T - q^0|} \right)^{1/\beta}.$$

В случае, когда оператор дробного дифференцирования в уравнении (11) определяется выражением (7) и начальное условие ставится в виде (29), явное решение уравнения (50) можно получить при $q^T = 0$:

$$T^* = \frac{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \beta + 1)} \frac{|s^0|}{l}.$$

Следствие 2. На основе решений (48)–(49) можно вычислить закон движения одиночного интегратора Сайго, соответствующий оптимальному управлению. Подставив выражения (48)–(49) в общее решение (31) и, вычислив интеграл (с использованием представления (52)), получим:

$$q_A(t) = c(T) \left(\frac{T}{t} \right)^\beta + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (54)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] t^{-\beta} \frac{\Gamma(\gamma - \beta + 1)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (55)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ — соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (48) и (49), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (31). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (54)–(55) выполняется конечное условие (13).

Теорема 6. Пусть дано уравнение (11), где оператор дробного дифференцирования определён формулой (10) или (9), $u(t) \in L_\infty(0, T]$ и задано начальное условие в локальном (22) или нелокальном (36) виде соответственно и конечное условие в виде (13). Пусть также выполнены условия теоремы 3 и $\beta \geq 0$.

1. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39), имеющее минимальную норму при заданном носителе $t \in (0, T]$ даётся формулой

$$u(t) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta T)} \frac{c(T)}{T^\alpha}, \quad t \in (0, T]. \quad (56)$$

2. Решение l -проблемы моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39), имеющее минимальный носитель $t \in (0, T^*]$, даётся формулой

$$u(t) = l \operatorname{sign}[c(T)], \quad t \in (t_0, T^*], \quad (57)$$

где T^* — наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1(\beta; \alpha + 1; \eta T)} \frac{|c(T)|}{T^\alpha} = l. \quad (58)$$

Доказательство. Условия теоремы 3 считаются выполненными. Следовательно, l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (38) и (39) корректна, разрешима и её решение можно строить по формулам (17)–(18) и (19)–(20).

Воспользуемся формулой (28) и вычислим параметр Λ_1 . Сначала вычислим норму функции (39) в случае $u(t) \in L_\infty(0, T]$, т.е. $g(t) \in L_1(0, T]$:

$$\|g\|_{L_1} = \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \frac{{}_1F_1[\beta; \alpha; \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1-\alpha}} \right| dt. \quad (59)$$

На полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$ вырожденная гипергеометрическая функция положительно определена и представляется абсолютно сходящимся степенным рядом:

$${}_1F_1[\beta, \alpha, \eta(T - \tau)] = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{[\eta(T - \tau)]^k}{k!}. \quad (60)$$

Подставим теперь представление (60) в (59) и, выполнив почленное интегрирование и используя представление (60), получим:

$$\|g\|_{L_1} = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1[\beta, \alpha + 1, \eta T].$$

Используя полученное выражение, вычислим (28):

$$\Lambda_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{{}_1F_1[\beta, \alpha + 1, \eta T]} \frac{|c(T)|}{T^\alpha}. \quad (61)$$

Подставим (61) в выражение (19) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$. Функция (39) на полуинтервале $t \in (0, T]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$ неотрицательна, следовательно, получим формулу (56).

Запишем теперь выражение (20) при $N = 1$, $\xi = \xi^* = 1/c$, $p' = 1$ и, учтя неотрицательность функции (39) на полуинтервале $t \in (0, T^*]$ при $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \geq 0$, получим формулу (57). Подставив выражение (61) в уравнение (21), получим (58). Теорема доказана. $\square$

Следствие 3. Аналогично следствиям 1 и 2 вычислим закон движения одиночного интегратора Гринько, соответствующий оптимальному управлению, подставив выражения (56)–(57) в общее решение (37). Используем представление (60)) чтобы вычислить интеграл в формуле (37), тогда получим:

$$q_A(t) = c(T) \frac{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta t)}{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta T)} \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha + f(t), \quad t \in (0, T], \quad (62)$$

$$q_B(t) = l \operatorname{sign}[c(T)] \frac{{}_1F_1(\beta, \alpha + 1, \eta t)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + f(t), \quad t \in (0, T^*], \quad (63)$$

где $q_A(t)$ и $q_B(t)$ — соответственно законы движения, реализующие оптимальное управление (56) и (57), $f(t)$ определяется так же, как и в выражении (37). Непосредственной проверкой можно убедиться, что для законов движения (62)–(63) выполняется конечное условие (13).

4.3. Постановка и разрешимость l -проблемы моментов: двойной интегратор. Рассмотрим двойной интегратор Прабхакара: систему уравнений (12), в котором оператор дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (4) или (3) при $\mu \in (0, 1)$. В первом случае начальные условия, как и выше, могут быть поставлены в локальном виде:

$$q_i(0+) = q_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (64)$$

Во втором случае начальное условие ставится в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^P I_{\rho_i, 1-\mu_i, \omega_i, t}^{-\gamma_i} q_i(t) \right] = s_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (65)$$

Будем полагать также, что показатели операторов дробного дифференцирования μ_i и γ_i в первом и втором уравнениях системы (12) в общем случае различны, а индексы ρ и ω — одинаковы, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Теорема 7. Пусть задана система уравнений (12), где $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, $\gamma_{1,2} \in \mathbb{C}$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из условий:

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (3) и заданы начальные условия (65);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (4) и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1 - \mu_1 - \mu_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \int_0^t \frac{E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(t - \tau)^\rho]}{(t - \tau)^{1 - \mu_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{\mu_1 - 1} + s_2^0 t^{\mu_1 + \mu_2 - 1} E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1} (\omega t^\rho), \quad f_2(t) = s_2^0 t^{\mu_2 - 1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + q_2^0 t^{\mu_1} E_{\rho, \mu_1 + 1}^{\gamma_1} (\omega t^\rho), \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1}$ и ${}^P I_{\rho, \mu_2, \omega, t}^{\gamma_2}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Прабхакара, получим

$$q_1(t) = {}^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}^P I_{\rho, \mu_2, \omega, t}^{\gamma_2} u(t) + \tilde{f}_2(t) \quad (67)$$

(см. [8]), где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (4), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{\mu_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (3), $i = 1, 2$. Данное представление единственно (см. [8]).

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Прабхакара (см. [8]):

$$q_1(t) = {}^P I_{\rho, \mu_1 + \mu_2, \omega, t}^{\gamma_1 + \gamma_2} u(t) + {}^P I_{\rho, \mu_1, \omega, t}^{\gamma_1} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (68)$$

Сравнив второе выражение в представлении (67) и аналогичное выражение в представлении (66), можно убедиться в их идентичности при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t)$. Далее воспользуемся определением 1 и вычислим второе слагаемое в выражении (68), используя представление (2). В результате получим:

$$q_1(t) = {}^P I_{\rho, \mu_1 + \mu_2, \omega, t}^{\gamma_1 + \gamma_2} u(t) + f_1(t).$$

Теорема доказана. $\square$

Решение (66) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить:

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (69)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (66),

$$g_1(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1 - \mu_1 - \mu_2}}, \quad g_2(\tau) = \frac{E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]}{(T - \tau)^{1 - \mu_2}}. \quad (70)$$

Теорема 8. Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (70), $\gamma_{1,2} > 0$, $\rho > 0$, $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулой (69) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении условия:

$$\mu_2 > \frac{1}{p}. \quad (71)$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (70), в пространстве $L_p'(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\mu_1 + \mu_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|E_{\rho, \mu_1 + \mu_2}^{\gamma_1 + \gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\mu_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|E_{\rho, \mu_2}^{\gamma_2} [\omega(T - \tau)^\rho]\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Обобщённая функция Миттаг-Леффлера является целой функцией конечного порядка роста (см. [10, Ch. 1]), следовательно, второй множитель в правых частях полученных неравенств ограничен. Первые же множители в рассматриваемых неравенствах будут определены, положительны и ограничены при выполнении условий

$$\mu_1 + \mu_2 > \frac{1}{p}, \quad \mu_2 > \frac{1}{p}.$$

Поскольку $\mu_{1,2} \in (0, 1)$, то выполнение второго из этих неравенств влечёт выполнение и первого. Следовательно, в предположении об отличии от нуля хотя бы одного из моментов (69), получаем в качестве условия корректности исследуемой проблемы моментов неравенство (71).

Функции (70) представляют собой произведение функции Прабхакара и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (69)–(70) является разрешимой. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим далее двойной интегратор Сайго: систему уравнений (12), в которой оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определений (6) или (7) при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$.

Как и выше, при использовании операторов (6) начальные условия для уравнений (12) можно поставить в локальном виде (64), а в случае использования операторов (7) начальные условия ставятся в нелокальном виде:

$$\frac{\Gamma(\gamma_i - \beta_i)}{\Gamma(-\beta_i)\Gamma(\alpha_i + \gamma_i)} \lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^S I_t^{1-\alpha_i, -\beta_i-1, \alpha_i+\gamma_i-1} q(t) \right] = s_i^0, \quad i = 1, 2. \quad (72)$$

При этом предполагается выполнение следующих условий (см. [11]):

$$\gamma_i - \beta_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \alpha_i + \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2. \quad (73)$$

Примем также $\gamma_1 = \gamma$ и наложим дополнительное ограничение на показатели операторов дробного дифференцирования в уравнениях (12): $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$.

Теорема 9. Пусть задана система уравнений (12), где $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$, $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (7), выполнены условия (73) и заданы начальные условия (65);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (6), $\gamma - \beta_1 > 0$ и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{t^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2, -\gamma; \alpha_1 + \alpha_2; 1 - \frac{\tau}{t})}{(t - \tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \frac{t^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_2F_1(\alpha_2 + \beta_2, -\gamma - \alpha_1; \alpha_2; 1 - \frac{\tau}{t})}{(t - \tau)^{1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (74)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{-\beta_1-1} + s_2^0 \frac{\Gamma(-\beta_2)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \beta_2)}{\Gamma(\gamma + \alpha_1 - \beta_2)\Gamma(-\beta_1 - \beta_2)} t^{-\beta_1-\beta_2-1}, \quad f_2(t) = s_2^0 t^{-\beta_2-1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + q_2^0 \frac{\Gamma(\gamma - \beta_1 + 1)}{\Gamma(1 - \beta_1)\Gamma(\gamma + \alpha_1 + 1)} t^{-\beta_1}, \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma}$ и ${}_0^S I_t^{\alpha_2, \beta_2, \gamma + \alpha_1}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Сайго (см. [7, 11]), получим

$$q_1(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_2, \beta_2, \gamma + \alpha_1} u(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (75)$$

где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (6), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{-\beta_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (3), $i = 1, 2$. Данное представление единственно (см. [7, 11]).

Очевидно, второе выражение в представлении (67) и аналогичное выражение в представлении (66) идентичны при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t)$.

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Сайго (см. [7]):

$$q_1(t) = {}_0^S I_t^{\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma} u(t) + {}_0^S I_t^{\alpha_1, \beta_1, \gamma} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (76)$$

Воспользовавшись определением 4, вычислим второе слагаемое в выражении (76) и получим искомое второе выражение из решения (74) (при этом используется представление (52), справедливое при $\gamma - \beta_1 > 0$). Теорема доказана. $\square$

Решение (74) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (77)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (74),

$$\begin{aligned} g_1(\tau) &= \frac{T^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \frac{{}_2F_1(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2, -\gamma; \alpha_1+\alpha_2; 1-\frac{\tau}{T})}{(T-\tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}}, \\ g_2(\tau) &= \frac{T^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{{}_2F_1(\alpha_2+\beta_2, -\gamma-\alpha_1; \alpha_2; 1-\frac{\tau}{T})}{(T-\tau)^{1-\alpha_2}}. \end{aligned} \quad (78)$$

Теорема 10. Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (78), $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулами (77) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов будет корректна и разрешима при выполнении следующих условий:

- (i) в случае, когда операторы дробного дифференцирования в системе уравнений (12) определяются формулой (6), — условия

$$\alpha_2 > \frac{1}{p}, \quad \gamma > \beta_1, \quad \gamma > \beta_1 + \beta_2, \quad \gamma + \alpha_1 > \beta_2 \quad (79)$$

- (ii) в случае, когда операторы дробного дифференцирования в системе уравнений (12) определяются формулой (7) и выполнены условия (73) (с учётом $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma + \alpha_1$), — условия

$$\alpha_2 > \frac{1}{p} \quad (80)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда операторы дробного дифференцирования в уравнениях (12) определяются в смысле Капуто и начальные условия ставятся в виде (64). По условию теоремы хотя бы один из моментов $c_{1,2}(T)$ отличен от нуля.

Оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (78), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leq \frac{T^{-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1\left(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2, -\gamma; \alpha_1+\alpha_2; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leq \frac{T^{-\alpha_2-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}} \left\| {}_2F_1\left(\alpha_2+\beta_2, -\gamma-\alpha_1; \alpha_2; 1-\frac{\tau}{T}\right) \right\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Если выполнено первое из условий (79), то норма $\|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$ определена, а учитывая, что $\alpha_1 > 0$ определена и норма $\|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$. Выполнение оставшихся условий в системе неравенств (79) означает, что гипергеометрическая функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и, следовательно, имеет конечный порядок роста и для неё также определена норма в пространстве $L_{p'}(0, T]$.

Рассмотрим теперь случай, когда оператор дробного дифференцирования в уравнениях (12) определяется в смысле Римана—Лиувилля. Начальные условия тогда ставятся в виде (72) и определены при выполнении условий (73), тогда моменты $c_{1,2}(T)$ могут считаться ограниченными. Также по условию теоремы хотя бы один из этих моментов предполагается отличным от нуля. Сделанная выше оценка для нормы функций (78), в пространстве $L_{p'}(0, T]$ будет справедлива и в этом случае. Выполнение последних трёх условий (79) обеспечивает существование нормы гипергеометрических функций, входящих в правую часть выписанных выше неравенств для нормы. Требование существования нормы $\|(T-\tau)^{\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$, как и ранее, приводит к первому условию в системе неравенств (80) и влечёт существование нормы $\|(T-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\|_{L_{p'}}$ (с учётом $\alpha_1 > 0$).

Тем самым, корректность рассматриваемой проблемы моментов обоснована.

Функции (78) представляют собой произведения гипергеометрической функции Эйлера и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие

функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (77)–(78) является разрешимой. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим теперь двойной интегратор Гринько: систему уравнений (12), в котором операторы дробного дифференцирования будем понимать в смысле определений (10) или (9) при $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$. По аналогии с проводившимся выше рассмотрением локальные начальные условия (64) можно поставить для уравнений (12) с операторами (10), а в случае операторов (9) начальные условия ставятся в нелокальном виде:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left[{}^G I_t^{1-\alpha_i, -\beta_i, \eta_i} q(t) \right] = s_i^0, i = 1, 2. \quad (81)$$

Примем также дополнительное ограничение на значения показателей оператора дробного дифференцирования: $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

Теорема 11. Пусть задана система уравнений (12), где $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, $\beta_{1,2} > 0$, $u(t) \in L_p(0, T]$, $p > 1$. Пусть также выполнено одно из условий:

- (i) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (9) и заданы начальные условия (81);
- (ii) $q_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, $q'_{1,2}(t) \in L_1(0, T]$, операторы дробного дифференцирования в (12) понимаются в смысле определения (10) и заданы начальные условия (64).

Тогда решение системы уравнений (12) существует, единственно и определяется формулами

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2; \alpha_1 + \alpha_2; \eta(t - \tau)]}{(t - \tau)^{1-\alpha_1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_1(t), \\ q_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \frac{{}_1F_1[\beta_2; \alpha_2; \eta(t - \tau)]}{(t - \tau)^{1-\alpha_2}} u(\tau) d\tau + f_2(t), \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$f_1(t) = s_1^0 t^{\alpha_1-1} + s_2^0 \frac{\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} t^{\alpha_1+\alpha_2-1} {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1 + \alpha_2; \eta t), \quad f_2(t) = s_2^0 t^{\alpha_2-1},$$

в случае, когда справедливо условие (i), и

$$f_1(t) = q_1^0 + \frac{q_2^0 t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} {}_1F_1(\beta_1; \alpha_1 + 1; \eta t), \quad f_2(t) = q_2^0,$$

в случае, когда справедливо условие (ii).

Доказательство. Подействовав на обе части уравнений системы (12) соответственно операторами ${}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta}$ и ${}_0^G I_t^{\alpha_2, \beta_2, \eta}$ и воспользовавшись правилами композиции операторов Гринько (см. [3, 9]), получим

$$q_1(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta} q_2(t) + \tilde{f}_1(t), \quad q_2(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_2, \beta_2, \eta} u(t) + \tilde{f}_2(t), \quad (83)$$

где $\tilde{f}_i(t) = q_i^0$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (10), и $\tilde{f}_i(t) = s_i^0 t^{\alpha_i-1}$ в случае, когда операторы дробного дифференцирования понимаются в смысле определения (9), $i = 1, 2$. Данное представление единственно (см. [3, 9]).

Очевидно, второе выражение в представлении (83) и аналогичное выражение в представлении (82) идентичны при $\tilde{f}_2(t) = f_2(t)$.

Подставим теперь второе из полученных уравнений в первое и воспользуемся полугрупповым свойством интегралов Гринько (см. [9]):

$$q_1(t) = {}_0^G I_t^{\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \eta} u(t) + {}_0^G I_t^{\alpha_1, \beta_1, \eta} \tilde{f}_2(t) + \tilde{f}_1(t). \quad (84)$$

Воспользовавшись определением 7, вычислим второе слагаемое в выражении (84) и получим искомое второе выражение из решения (82) (при этом используется представление (60)). Теорема доказана. $\square$

Решение (82) при $t = T$ с учётом конечного условия (13) может быть записано в форме двумерной проблемы моментов (14), если положить

$$c_i(T) = q_i^T - f_i(T), \quad i = 1, 2, \quad (85)$$

где $f_i(T)$ определяется так же, как и в решении (82),

$$g_1(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2, \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1 - \alpha_1 - \alpha_2}}, \quad g_2(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{{}_1F_1[\beta_2, \alpha_2, \eta(T - \tau)]}{(T - \tau)^{1 - \alpha_2}}. \quad (86)$$

Теорема 12. Пусть дана двумерная l -проблема моментов (14)–(15), где $u(t) \in L_p(0, T]$, функции $g_{1,2}(\tau)$ определяются формулами (86), $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$, а моменты $c_{1,2}(T)$ определяются формулами (85) и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда эта проблема моментов корректна и разрешима при выполнении условия

$$\alpha_2 > \frac{1}{p}. \quad (87)$$

Доказательство. Оценим норму функций $g_{1,2}(\tau)$, определяемых формулами (86), в пространстве $L_{p'}(0, T]$:

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|{}_1F_1[\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2, \eta(T - \tau)]\|_{L_{p'}}, \\ \|g_2\|_{L_{p'}} &\leq \|(T - \tau)^{\alpha_2 - 1}\|_{L_{p'}} \|{}_1F_1[\beta_2, \alpha_2, \eta(T - \tau)]\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера представляется абсолютно сходящимся степенным рядом (см. [10, Ch. 1]) и имеет конечный порядок роста, следовательно, для неё определена норма в пространстве $L_{p'}(0, T]$. Непосредственной проверкой (как и выше при доказательстве теорем 3, 8 и др.) можно убедиться, что норма $\|(T - \tau)^{\alpha_2 - 1}\|_{L_{p'}}$ определена при выполнении условия (87). Учитывая, что $\alpha_1 > 0$, в этом случае определена и норма $\|(T - \tau)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}\|_{L_{p'}}$.

Следовательно, рассматриваемая проблема моментов корректна.

Функции (86) представляют собой произведения вырожденной гипергеометрической функции Куммера и дробно-степенной функции и отличаются набором показателей этих функций. Следовательно, такие функции являются линейно независимыми, а l -проблема моментов (14)–(15) с учётом (85)–(86) является разрешимой. Теорема доказана. $\square$

5. Заключение. Таким образом, в данной работе исследована l -проблема моментов для одномерных и двумерных линейных систем дробного порядка, которые описываются уравнениями с операторами Прабхакара, Сайго или Гринько. Получены условия, при которых l -проблема моментов будет корректна и разрешима. В ряде случаев, когда выполнены условия корректности и разрешимости l -проблемы моментов, получены точные аналитические решения поставленных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
2. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами. — М.: Наука, 1975.
3. Гринько А. П. Операторы дробного интегрирования с гипергеометрической функцией Куммера в ядре // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 22–31.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
5. Постнов С. С. l -Проблема моментов и оптимальное управление для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими и «несингулярными» производными // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 86–116.
6. Постнов С. С., Постнова Е. А. Об особенностях динамики двумерных линейных систем дробного порядка с управлением // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 182. — С. 101–118.
7. Dutta B. K., Arora L. K. On the existence and uniqueness of solutions of a class of initial value problems of fractional order // Math. Sci. — 2013. — 7. — 17.

8. *Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z.* Hilfer—Prabhakar derivatives and some applications// Appl. Math. Comput. — 2014. — 242. — P. 576–589.
9. *Grinko A. P.* Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives// Integral Trans. Spec. Funct. — 2018. — 29, № 6. — P. 489–504.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
11. *Rao A., Garg M., Kalla S. L.* Caputo-type fractional derivative of a hypergeometric integral operator// Kuwait J. Sci. Eng. — 2010. — 37, № 1A. — P. 15–29.

Постнов Сергей Сергеевич

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru