ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 15–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-15-22

УДК 517.954, 517.983

ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ УРАВНЕНИИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ И СВЯЗАННОЙ С НИМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

© 2022 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА**

Аннотация. Рассматриваются дискретные уравнения типа свертки в четверти плоскости. Показано, что каждое такое уравнение эквивалентно одному аналогу двумерной периодической задачи Римана на торе. Описаны достаточные условия однозначной разрешимости такой периодической задачи Римана и, как следствие, условия однозначной разрешимости дискретного уравнения в терминах символа оператора свертки.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, двумерная периодическая задача Римана, парное уравнение, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость.

ON A DISCRETE EQUATION IN A QUARTER-PLANE AND A RELATED BOUNDARY-VALUE PROBLEM

© 2022 **V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA**

Abstract. Discrete equations of the convolution type in a quarter-plane are considered. We prove that each such equation is equivalent to an analog of the two-dimensional periodic Riemann problem on the torus. We describe sufficient conditions for the unique solvability of such a periodic Riemann problem and, as a consequence, conditions for the unique solvability of a discrete equation in terms of the symbol of the convolution operator.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, two-dimensional periodic Riemann problem, pair equation, periodic wave factorization, analyticity, solvability.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория дискретных уравнений и связанных с ними разностных уравнений представляет собой важный раздел математики, поскольку такие уравнения встречаются во многих практических задачах, см., например, [9–13]. однако исследование таких уравнений в областях многомерного пространства, равно как и уравнений с переменными коэффициентами, наталкивается на многие препятствия.

В работе [2] рассматривался многомерный аналог классической краевой задачи Римана для верхней и нижней комплексной полуплоскости. Решение этой задачи предлагалось в терминах волновой факторизации [2, 3], которая связана с выходом в радиальные трубчатые области над конусами. Недавно было обнаружено [1], что существует периодический аналог классической краевой задачи Римана. Целью этой работы является описание многомерного периодического аналога упомянутой многомерной задачи Римана и некоторых ее применений в теории дискретных краевых задач..

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

2. Дискретное уравнение и краевая задача.

2.1. Дискретные операторы и уравнения. Нас интересует разрешимость некоторых дискретных уравнений, которые мы будем называть дискретными псевдодифференциальными уравнениями. Определим дискретный псевдодифференциальный оператор формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} e^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} \tilde{A}_d(\xi)\tilde{u}_d(\xi)d\xi, \quad \tilde{x}\in\mathbb{Z}^m,$$

где $u_d(\tilde{x})$ — функция дискретной переменной $\tilde{x}\in\mathbb{Z}^m$, $\tilde{u}_d(\xi)$ будет обозначать ее дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{u}_d(\xi) \equiv (F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{y}\cdot\xi}\tilde{u}_d(y), \quad \xi\in\mathbb{T}^m, \tag{1}$$

$\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{T}^m$ — m-мерный куб $[-\pi,\pi]^m$; заданная функция $\tilde{A}_d(\xi), \xi\in\mathbb{T}^m$ называется символом дискретного псевдодифференциального оператора A_d.

Зачастую бывает удобней использовать другое представление псевдодифференциального оператора через дискретное ядро $A_d(\tilde{x})$, т.е. в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^m} A_d(\tilde{x}-\tilde{y})u_d(y), \quad \tilde{x}\in\mathbb{Z}^m,$$

где ядро $A_d(\tilde{x})$ определено на решетке $\mathbb{Z}^m$ посредством обратного дискретного преобразования Фурье

$$u(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} \tilde{u}(\xi)e^{-i\tilde{x}\cdot\xi}d\xi.$$

Наша основная цель — исследование разрешимости уравнения

$$\sum_{\tilde{y}\in D_d} A_d(\tilde{x}-\tilde{y})u_d(y) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in D_d, \tag{2}$$

где D_d — дискретная область вида $D_d = D\cap\mathbb{Z}^m$, D — выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$.

В непрерывном случае такие уравнения в конусах изучались в работах автора [4, 17, 18]. Главную роль в этих исследованиях играла концепция волновой факторизации эллиптического символа, при наличии которой можно было описать полную картину разрешимости модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в конусе. Это позволило дать достаточные условия фредгольмовости для общих эллиптических псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с коническими точками на границе. В этой работе мы хотим продолжить эти исследования в «дискретном» направлении, рассмотрев простейший случай дискретного уравнения в плоском квадранте.

В случае дискретного полупространства результаты о разрешимости дискретных уравнений были получены в [15, 16], однако этот случай очень специфичен и связан с классической краевой задачей Римана [7, 8]. В нашей ситуации требуется выход в многомерное комплексное пространство. Некоторые оценки аппроксимации непрерывных решений дискретными в полупространстве получены в [5].

Если мы рассматриваем уравнение во всем дискретном пространстве ($D = \mathbb{R}^m$)

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad x\in\mathbb{Z}^m,$$

разыскивая решение в $L_2(\mathbb{Z}^m)$, мы применяем дискретное преобразование Фурье (1), в результате получая простое уравнение

$$A_d(\xi)\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{v}_d(\xi), \quad \xi\in\mathbb{T}^m,$$

в дуальном пространстве $L_2(\mathbb{T}^m)$.

Трудности появляются, когда мы исследуем уравнение не во всем пространстве, а ищем решение в $L_2(D_d)$, $D\neq\mathbb{R}^m$. Непосредственно преобразование Фурье неприменимо, и приходится привлекать другие соображения.

2.2. Парные уравнения. Обозначим $P_\pm$ операторы сужения на $D_d(+)$ и $\mathbb{Z}^m \setminus D_d(-)$ соответственно. Хорошо известно (в этом нетрудно убедиться самостоятельно), что уравнение (2) в пространстве $L_2(D_d)$ разрешимо одновременно с уравнением

$$(A_d P_+ + I_d P_-)U_d = V_d \tag{3}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$; здесь I_d обозначает единичный оператор. Другими словами, целесообразно изучать более общее парное уравнение

$$(A_d P_+ + B_d P_-)U_d = V_d$$

в пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$, где A_d, B_d — два разных псевдодифференциальных оператора с символами $\tilde{A}_d(\xi)$, $\tilde{B}_d(\xi)$. Мы будем называть это уравнение эллиптическим, если символы $\tilde{A}_d(\xi)$, $\tilde{B}_d(\xi)$ нигде не обращаются в нуль на $\mathbb{T}^m$.

Ниже будет показано для случая $m = 2$, что применение преобразования Фурье к уравнению (3) сводит его к специальной краевой задаче для функций двух комплексных переменных.

2.3. Периодические интегралы типа Коши. Здесь мы приведем некоторые вычисления для двумерного случая, когда $D = C^2$ — первый квадрант на плоскости. Отметим, что одномерный случай был рассмотрен в работе [14].

Чтобы описать образ Фурье оператора P_+, мы применяем процедуру регуляризации: вычислим двумерное преобразование Фурье функций u_d и $e^{-\tau_1\tilde{x}_1}e^{-\tau_2\tilde{x}_2}\chi_+(D_d)$ (характеристическая функция дискретного первого квадранта), затем применяем обратную теорему о свертке и переходим к пределу при $\tau = (\tau_1, \tau_) \to 0$, $\tau \in C^2$. Напомним, что мы рассматриваем случай, когда D — первый квадрант на плоскости, так что в нашем случае $D_d = \mathbb{Z}^2_{++}$..

Так как функция $\chi_+(D_d)$ несуммируема, берем ее регуляризованный вариант

$$e^{-\tau_1\tilde{x}_1}e^{-\tau_2\tilde{x}_2}\chi_+(D_d).$$

Дискретное преобразование Фурье такой суммируемой функции легко вычисляется. Действительно,

$$\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{Z}^2_{++}} e^{-\tau_1\tilde{x}_1}e^{-\tau_2\tilde{x}_2}e^{i\tilde{x}\cdot\xi} = \sum_{\tilde{x}\in\mathbb{Z}^2_{++}} e^{i\tilde{x}\cdot z},$$

где введены обозначения $z_k = \xi_k + i\tau_k$, $k = 1, 2$, $z = (z_1, z_2)$, $\tilde{x}\cdot z = \tilde{x}_1 z_1 + \tilde{x}_2 z_2$.

Последняя двойная сумма распадается в произведение двух сумм, каждая из которых выглядит одинаково. Приведем вычисления для одной из них, например, по дискретной переменной $\tilde{x}_1$.

$$\sum_{\tilde{x}_1\in\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}_1 z_1} = \frac{e^{iz_1}}{1-e^{iz_1}} = -1 + \frac{1}{1-e^{iz_1}} = -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{iz_1}-1}\right).$$

Простые вычисления дают следующий результат:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{iz_1}-1} = \frac{e^{iz_1}+1}{2(e^{-iz_1}-1)} = \frac{e^{\frac{iz_1}{2}} + e^{-\frac{iz_1}{2}}}{2\left(e^{\frac{iz_1}{2}} - e^{-\frac{iz_1}{2}}\right)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\tilde{x}_1\in\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{x}_1 z_1} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{z_1}{2}.$$

Аналогичная формула получается при суммировании по $\tilde{x}_2$. Таким образом,

$$\sum_{\tilde{x}\in\mathbb{Z}_{++}} e^{i\tilde{x}\cdot z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{z_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{z_2}{2}\right).$$

Если свертку двух периодических функций $\tilde{u}_d(\xi)$, $\tilde{v}_d(\xi) \in C(\mathbb{T}^2)$ определить формулой

$$(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} \tilde{u}_d(\xi-\eta)\tilde{v}_d(\eta)d\eta,$$

то по теореме о дискретном преобразовании Фурье произведения (см. приложение)

$$F_d(u_d \cdot v_d)(\xi) = \frac{1}{4\pi^2}(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi)$$

мы получим ($\eta = (\eta_1, \eta_2), \xi = (\xi_1, \xi_2)$)

$$\sum_{\tilde{x}\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot z}\chi_+(D_d)u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta + \frac{i}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_1-\eta_1+i\tau_1}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta +$$
$$+\frac{i}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_2-\eta_2+i\tau_2}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta - \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_1-\eta_1+i\tau_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_2-\eta_2+i\tau_2}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta. \quad (4)$$

Замечание 1. Чтобы исключить первые три интеграла, заметим, что первый представляет собой значение функции в начале координат, второй третий связаны определяются значениями на осях координат. Поэтому мы будем рассматривать пространство $L_2(\mathbb{Z}^m)$ как пространство функций дискретного аргумента с нулевыми значениями на осях координат.

Следствие 1. *Для функций дискретного аргумента, обращающихся в нуль на осях координат, формула* (4) *принимает вид*

$$\sum_{\tilde{x}\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot z}\chi_+(D_d)u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_1-\eta_1+i\tau_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_2-\eta_2+i\tau_2}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta. \quad (5)$$

Из формулы (5) немедленно вытекает «предельный» вариант

$$(F_dP_+u_d)(\xi) = \lim_{\tau\to 0, \tau\in C^2}\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_1-\eta_1+i\tau_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\xi_2-\eta_2+i\tau_2}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{z_1-\eta_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z_2-\eta_2}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta.$$

В предположении, что $\tilde{u}_d \in L_2(\mathbb{T}^2)$, нетрудно заключить, что справедливы следующие два факта:

(i) функция $\Phi(z_1, z_2)$ аналитична в области $\mathbb{T}^2 + iC^2 \subset \mathbb{C}^2$;

(ii) существуют граничные значения этой функции из C^2, причем эти граничные значения принадлежат $L_2(\mathbb{T}^2)$.

Эти два факта приводят к специальной периодической задаче линейного сопряжения или периодической краевой задаче Римана.

Замечание 2. Нетрудно сообразить, что аналогичные формулы могут быть получены и для m-мерного октанта в $\mathbb{Z}^m$.

3. Многомерная периодическая задача Римана. Пусть C^m — выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $T_{per}(C^m) \subset \mathbb{C}^m$ множество точек вида $z = x + iy$, $x \in \mathbb{T}^m$, $y \in C^m$. Введем пространство $A_+(\mathbb{T}^m)$ как подпространство $L^2(\mathbb{T}^m)$, состоящее из граничных значений аналитических в $T_{per}(C^m)$ функций, и определим пространство $A_-(\mathbb{T}^m)$ как прямое дополнение $A_+(\mathbb{T}^m)$ в $L^2(\mathbb{T}^m)$, так что $A_+(\mathbb{T}^m) \oplus A_-(\mathbb{T}^m) = L^2(\mathbb{T}^m)$. Формулировка многомерной периодической задачи Римана будет следующей: найти пару функций $\Phi^\pm \in A_\pm(\mathbb{T}^m)$, связанных почти всюду линейным соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}^m, \quad (6)$$

где $G(t)$, $g(t)$ — заданные на $\mathbb{T}^m$ функции.

Отметим, что когда $\mathbb{T}^m$ совпадает с $\mathbb{R}^m$, такие области носят название радиальных трубчатых областей над конусами (см. [6]).

В этой работе мы рассматриваем двумерный случай, когда конус C^2 представляет собой первый квадрант на плоскости $C^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2),\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$. К задаче (6) сводятся важные классы дискретных уравнений в четверти плоскости, и поэтому важно получить условия разрешимости этой задачи в определенных классах функций.

3.1. Задача скачка. Пусть $G(t) \equiv 1$ (задача скачка).

Теорема 1. *Задача скачка имеет единственное решение для любой правой части $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi^+(\xi_1,\xi_2) = \lim_{\tau\to 0,\tau\in C^2} \frac{1}{2(2\pi i)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg}\frac{z_1-\eta_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{z_2-\eta_2}{2} g(\eta)d\eta.$$

Очевидно, что $\Phi^+ \in A_+(\mathbb{T}^2)$, так как аналитична в $\mathbb{T}^2 + iC^2$ и имеет граничные значения из $L_2(\mathbb{T}^2)$. Теперь положим

$$\Phi^-(\xi_1,\xi_2) = \Phi^+(\xi_1,\xi_2) - g(\xi_1,\xi_2 t),$$

и нужное представление получено, поскольку Φ^- необходимо будет принадлежать $A_-(\mathbb{T}^2)$. Единственность представления легко доказывается от противного. Если предположить, что другая пара $\Phi_1^\pm$ является решением задачи (6), мы придем к равенству

$$(\Phi_1 - \Phi)^+ = (\Phi_1 - \Phi)^-,$$

что возможно только для нулевых левой и правой частей. □

3.2. Периодическая волновая факторизация.

Определение 1. Обозначим $\pm C^m \equiv C^m_\pm$ и назовем периодической волновой факторизацией функции $G(t)$ относительно конуса C^m ее представление в виде

$$G(t) = G_{\neq}(t)G_{=}(t),$$

где функции $G_{\neq}$, $G_{=}$ допускают ограниченное аналитическое продолжение в $T_{per}(C^m_+)$, $T_{per}(C^m_-)$ соответственно.

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что если периодическая волновая факторизация существует, то она единственна с точностью до мультипликативной постоянной.

Пример 1. Пусть $m = 2$ и C^2 — первый квадрант на плоскости. Если f — произвольная функция дискретного аргумента, определенная на решетке $\mathbb{Z}^2$, $f \in L^2(\mathbb{Z}^2)$, $\operatorname{supp} f \subset C^m_+ \cup C^m_-$, то, очевидно,

$$f = \chi_+ f + \chi_- f,$$

где $\chi_\pm$ — характеристическая функция $C^m_\pm$. Применяя дискретное преобразование Фурье

$$f(\tilde{x}) \longmapsto \tilde{f}(\xi) = \sum_{\tilde{x}\in\mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} f(\tilde{x}), \quad \xi \in \mathbb{T}^m,$$

мы получим представление $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$, причем $\tilde{f}_\pm$ допускают аналитическое продолжение в $T_{per}(C^m_\pm)$. Далее можно записать $\exp\tilde{f} = \exp\tilde{f}_+ \cdot \exp\tilde{f}_-$, и для функции $\exp\tilde{f}$ получена периодическая волновая факторизация.

3.3. Общий случай. Здесь мы приведем основной результат о разрешимости задачи (6).

Теорема 2. *Пусть $G \in C(\mathbb{T}^2)$, $G(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{T}^2$. Если существует периодическая волновая факторизации функции $G(t)$, то задача (6) имеет единственное решение для произвольной функции $g \in L^2(\mathbb{T}^2)$.*

Доказательство. Учтем периодическую волновую факторизацию в формулировке и перепишем задачу в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{G_{\neq}(t)} = G_{=}(t)\Phi^-(t) + \frac{g(t)}{G_{\neq}(t)}.$$

Очевидно, что $\Phi^+(t)G^{-1}_{\neq}(t) \in A_+(\mathbb{T}^2)$ в силу аналитической продолжаемости и $g(t)G^{-1}_{\neq}(t) \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Остается доказать, что $G_{=}(t)\Phi^-(t) \in A_-(\mathbb{T}^2)$, и мы придем к задаче скачка.

Поскольку аналог теоремы Винера—Пэли утверждает, что обратный фурье-образ функции из $A_+(\mathbb{T}^m)$ состоит из функций с носителем в C^2, мы заключаем, что обратный фурье-образ функции $G_=$ имеет носитель в $-C^2$. Применение обратного дискретного преобразования Фурье к функции $G_=(t)\Phi^-(t)$ приводит к дискретной свертке

$$(F_d^{-1}(G_=\Phi^-))(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in\mathbb{Z}^m}(F_d^{-1}\Phi^-)(\tilde{x}-\tilde{y}(F_d^{-1}G)(\tilde{y}) = \sum_{\tilde{y}\in C_-^m}(F_d^{-1}\Phi^-)(\tilde{x}-\tilde{y}(F_d^{-1}G)(\tilde{y}).$$

Отсюда видно, что $-y \in C_+^2$, и если $\tilde{x}\in C_+^2$, то $\tilde{x}-\tilde{y}\in C_+^2$, и тогда при $\tilde{x}\in C_+^2$ свертка обращается в нуль. Таким образом, доказано, что $G_=(t)\Phi^-(t)\in A_-(\mathbb{T}^2)$. Теперь применяем предыдущую теорему о задаче скачка и получаем утверждение теоремы. □

4. Разрешимость дискретных уравнений. В этом разделе мы покажем, что $D = C^2$ разрешимость дискретного уравнения (2) эквивалентна разрешимости двумерной периодической задачи Римана (6) с коэффициентом и свободным членом, определяемыми по символу оператора A_d и правой части уравнения v_d.

Теорема 3. *Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi)\in C(\mathbb{T}^2)$ допускает периодическую волновую факторизацию относительно C^2, то уравнение* (2) *однозначно разрешимо при любой правой части $v_d \in L_2(D_d)$.*

Доказательство. Учитывая эквивалентность уравнений (2) и (3), мы будем работать с уравнением (3). Применяя дискретное преобразование Фурье к обеим частям уравнения (3), мы получим

$$\tilde{A}_d(\xi)(\widetilde{P_+U_d})(\xi) + (\widetilde{P_-U_d})(\xi) = \widetilde{V}_d(\xi).$$

По доказанному выше мы имеем $(\widetilde{P_+U_d})(\xi)\in A_+(\mathbb{T}^m)$, $(\widetilde{P_-U_d})(\xi)\in A_-(\mathbb{T}^m)$; последнее означает, что мы пришли к многомерной периодической задаче Римана (6) с коэффициентом $G(\xi) = \tilde{A}_d^{-1}(\xi)$ и правой частью $\tilde{V}_d(\xi)\tilde{A}_d^{-1}(\xi)$. Далее применяется Теорема 2. □

Решение уравнения (2) можно выписать явно, это играет важную роль при построении дискретных аппроксимаций. С учетом периодической волновой факторизации

$$\tilde{A}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,\neq}(\xi)\cdot\tilde{A}_{d,=}(\xi)$$

запишем

$$\tilde{A}_{d,\neq}(\xi)(\widetilde{P_+U_d})(\xi) + \tilde{A}_{d,=}^{-1}(\xi)(\widetilde{P_-U_d})(\xi) = \tilde{A}_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{V}_d(\xi).$$

Тогда

$$(\widetilde{P_+U_d})(\xi) = \tilde{A}_{d,=}(\xi)\lim_{\tau\to 0,\tau\in C^2}\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{z_1-\eta_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z_2-\eta_2}{2}\tilde{A}_{d,=}^{-1}(\eta)\widetilde{V}_d(\eta)d\eta.$$

Левая часть последней формулы — это $\tilde{u}_d$ — фурье образ решения уравнения (2), где под V_d понимается любое продолжение $v_d\in L_2(D_d)$ на все $L_2(\mathbb{Z}^2)$; окончательный результат не зависит от продолжения в силу аналитических свойств элементов периодической волновой факторизации.

Замечание 4. Следует отметить, что все результаты разделов 3 и 4 справедливы для m-мерного октанта вида

$$C^m = \{x\in\mathbb{R}^m : x = (x_1,\dots,x_m),\ x_k > 0,\ k = 1,\dots,m\}$$

с периодическим интегралом типа Коши вида

$$\Phi(z_1,\dots,z_m) = \frac{1}{2(2\pi i)^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}\prod_{k=1}^m\operatorname{ctg}\frac{z_k-\eta_k}{2}g(\eta)d\eta,$$

где $z_k = \xi_k + i\tau_k$, $k = 1,\dots,m, \tau = (\tau_1,\dots,\tau_m)\in C^m$, $\eta = (\eta_1,\dots,m)$.

5. Приложение.

5.1. Произведение и свертка. В этом разделе будет приведено доказательство важного свойства о дискретном преобразовании Фурье произведения двух функций, которое было использовано выше, для одномерного случая (многомерный случай рассматривается аналогично). Пусть $u_d, v_d \in L_1(\mathbb{R})$ — функции дискретного аргумента, $\tilde{u}_d$, $\tilde{v}_d$ — их дискретные преобразования Фурье.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$F_d(u_d \cdot v_d) = \frac{1}{2\pi}\tilde{u}_d * \tilde{v}_d,$$

где операция свертки $*$ *определена формулой*

$$(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\xi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}_d(\xi-\eta)\tilde{v}_d(\eta)d\eta. \tag{7}$$

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой об изоморфизме между пространством $L_2(\mathbb{Z})$ и пространством периодических функций $L_2(\mathbb{T})$, которое устанавливается дискретным преобразованием Фурье и его обратным

$$(F^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi, \quad \tilde{x} \in \mathbb{Z}.$$

Подействуем на обе части равенства (7) оператором F_d^{-1}.

$$F_d^{-1}(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{u}_d(\xi-\eta)\tilde{v}_d(\eta)d\eta\right)d\xi.$$

Меняя порядки интегрирования, делая замену переменных $\xi-\eta=t$ и учитывая периодичность функций $\tilde{u}_d$, $\tilde{v}_d$, сразу получаем

$$F_d^{-1}(\tilde{u}_d * \tilde{v}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi}\tilde{u}_d(\xi-\eta)d\xi\right)\tilde{v}_d(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}\xi}\tilde{u}_d(\xi-\eta)d\xi\right)\tilde{v}_d(\eta)d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-\eta}^{\pi-\eta} e^{-i\tilde{x}(\eta+t)}\tilde{u}_d(t)dt\right)\tilde{v}_d(\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-i\tilde{x}t}\tilde{u}_d(t)dt\right)e^{-i\tilde{x}\eta}\tilde{v}_d(\eta)d\eta = u_d(\tilde{x})\cdot v_d(\tilde{x}).$$

Остается применить к последнему равенству дискретное преобразование Фурье, и лемма доказана. □

Замечание 5. DВ объяснении нуждалось только появление множителя $1(2\pi)$ в формуле (7).

5.2. Случай h-решетки. С точки зрения последующих приложений к приближенному решению уравнений важно рассмотреть решетку $h\mathbb{Z}^2$, $h>0$ с тем, чтобы можно было сравнивать дискретные непрерывные решения при малых значениях h. Мы приведем здесь некоторые видоизменения формул, полученных выше с учетом шага решетки h. Так, в частности, дискретное преобразование Фурье выглядит как

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} e^{\tilde{x}\cdot\xi}u_d(\tilde{x})h^2.$$

Дуальным пространство для $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ относительно F_d будем пространство $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$, $\hbar = 1/h$, и периодический интеграл типа Коши примет вид

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{h^2}{2(2\pi i)^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(z_1 - \eta_1)}{2} \operatorname{ctg} \frac{h(z_2 - \eta_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta$$

с аналитическими свойствами в области $\hbar\mathbb{T}^2 + iC^2$.

Авторы надеются дать подробное изложение этих результатов в последующих публикациях и показать их применимость к оценкам аппроксимации непрерывных решений дискретными.

6. Заключение. Авторы отдают отчет в том, что рассматриваемый в работе класс дискретных уравнений охватывает довольно узкий класс, однако методы, развиваемые в этой работе, будут полезны для обширного класса дискретных псевдодифференциальных уравнений. Теория разрешимости таких дискретных псевдодифференциальных уравнений должна играть ключевую роль при дискретизации уравнений и обосновании приближенных методов их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 5. — С. 642–649.
2. *Васильев В. Б.* Регуляризация многомерных сингулярных интегральных уравнений в негладких областях// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1998. — *59*. — С. 73–105.
3. *Васильев В. Б.* Волновая факторизация эллиптических символов// Мат. заметки. — 2000. — *68*, № 5. — С. 653–667.
4. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
5. *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *174*. — С. 12–19.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
9. *Рябенький В. С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
11. *Elaydi S.* Introduction to Difference Equations. — New York: Springer-Verlag, 2005.
12. *Mickens R. E.* Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics. — London: Chapman and Hall, 2015.
13. *Milne-Thomson L. M.* Calculus of Finite Differences. — New York: Chelsea, 1981.
14. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — *3*, № 1. — P. 81–93.
15. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — *23*, № 3. — P. 492–506.
16. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — *71*. — P. 195–212.
17. *Vasilyev V. B.* Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains// in: Pseudo-Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. — Basel: Springer-Verlag, 2011. — P. 105–121.
18. *Vasilyev V. B.* Pseudo-differential equations on manifolds with non-smooth boundaries// in: Differential and Difference Equations and Applications. — New York: Springer-Verlag, 2013. — P. 625–637.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `vbv57@inbox.ru`

Ходырева Анастасия Александровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `711012@bsu.edu.ru`