



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 222 (2023). С. 69–82
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-222-69-82

УДК 512.772, 515.165.4

О ВЗАИМНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЯХ ДВУХ M -КРИВЫХ СТЕПЕНИ 4

© 2023 г. Н. Д. ПУЧКОВА

Аннотация. Рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости двух M -кривых степени 4. На изучаемые расположения наложены условие максимальности (овал одной из этих кривых имеет 16 попарно различных общих точек с овалом другой из них) и условие комбинаторного характера, выделяющее специальный тип таких расположений. Перечислены попарно различные топологические модели расположений этого типа, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу. Таких моделей оказалось более 2000. Приведены примеры кривых степени 8, реализующих некоторые из этих моделей, и доказано, что 1728 моделей не могут быть реализованы кривыми степени 8. Доказательства нереализуемости проводятся методом Оревкова, основанным на применении теории кос и зацеплений.

Ключевые слова: плоская вещественная алгебраическая кривая, распадающаяся кривая, квазиположительная коса, метод Оревкова, неравенство Мурасуги–Тристрама, условие Фокса–Милнора.

ON MUTUAL ARRANGEMENTS OF TWO M -CURVES OF DEGREE 4

© 2023 N. D. PUCHKOVA

АБСТРАКТ. We consider the problem of topological classification of mutual arrangements in the real projective plane of two M -curves of degree 4. We study arrangements under the maximality condition (the oval of one of these curves has 16 pairwise distinct common points with the oval of the other curve) and some combinatorial condition to select a special type of such arrangements. We list pairwise different topological models of arrangements of this type that satisfy the topological consequences of Bezout's theorem. There are more than 2000 such models. Examples of curves of degree 8 realizing some of these models are given; we prove that 1728 models cannot be realized by curves of degree 8. Proofs of the nonrealizability are performed out by Orevkov's method based on the theory of braids and links.

Keywords and phrases: plane real algebraic curve, decomposable curve, quasi-positive braid, Orevkov's method, Murasugi–Tristram inequality, Fox–Milnor condition.

AMS Subject Classification: 14P25, 14H99

1. Введение. Задача топологической классификации неособых плоских вещественных алгебраических кривых сформулирована в первой части 16-й проблемы Гильберта. На данный момент завершена классификация неособых кривых до седьмой степени включительно.

Наряду с изучением неособых кривых в последние десятилетия интенсивно изучаются распадающиеся кривые. Топологическая классификация распадающихся кривых степени 6 при некоторых условиях максимальности и общего положения была найдена Г. М. Полотовским в 1977 г. (см. [4]); аналогичная задача о кривых степени 7 почти завершена, ею занималась большая группа

авторов (А. Б. Корчагин, Г. М. Полотовский, С. Ю. Оревков, Е. И. Шустин и др., библиографические ссылки см. в [1]). Данная статья посвящена изучению взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух неособых M -кривых степени 4, находящихся в общем положении. Далее в работе вводится определенный тип таких расположений, рассмотрением которого ограничиваемся ввиду большого числа всех подлежащих исследованию возможностей.

Автор благодарит Г. М. Полотовского за предложенную задачу и помощь в работе.

2. Постановка задачи. Через C_k будем обозначать вещественную проективную алгебраическую кривую степени k , т.е. однородный многочлен степени k с вещественными коэффициентами от трёх переменных, а через $\mathbb{R}C_k$ — множество вещественных точек кривой C_k , т.е. множество точек вещественной проективной плоскости, в которых многочлен C_k обращается в нуль.

Пусть многочлен C_8 распадается в произведение двух многочленов степени 4: $C_8 = C_4 \cdot \tilde{C}_4$, т.е. $\mathbb{R}C_8 = \mathbb{R}C_4 \cup \mathbb{R}\tilde{C}_4$. Данная работа посвящена топологической классификации троек

$$(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}C_8, \mathbb{R}C_4) \quad (1)$$

при следующих условиях:

- (i) Кривые C_4 и \tilde{C}_4 являются M -кривыми, т.е. каждая из них состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырёх попарно не пересекающихся овалов (двусторонне вложенных в проективную плоскость топологических окружностей), лежащих вне друг друга.
- (ii) Общие вещественные точки кривых C_4 и \tilde{C}_4 попарно различны и их число максимально, т.е. $\#(\mathbb{R}C_4 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_4) = 16$.
- (iii) Все эти 16 точек лежат на одном овале кривой C_4 и на одном овале кривой \tilde{C}_4 .

Назовём *топологической моделью* распадающейся кривой рассматриваемого вида (для краткости ниже — просто «модель») набор восьми топологических окружностей, которые вложены в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне и которые ведут себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как две кривые степени 4 при условиях (i)–(iii) выше. Наша задача — выяснить, какие модели могут быть реализованы как объединение двух M -кривых степени 4, а какие — нет.

Как уже было отмечено выше, ограничимся только изучением специального вида пересечения ветвей, который введём с помощью следующих двух определений.

Определение 1. Пусть овал O целиком лежит в аффинной плоскости.⁰ Рассмотрим незамкнутую дугу без самопересечений, тоже целиком лежащую в аффинной плоскости и пересекающую овал O в восьми попарно различных точках. Эту дугу будем называть *образующей дугой*. При достаточно малом ε граница ε -окрестности этой дуги представляет собой другой овал, который пересекает исходный овал O в 16 попарно различных точках. Этот второй овал будем называть *змеёй*, а такое взаимное расположение двух овалов будем называть пересечением ветвей типа *змея, обвивающаяся вокруг овала*.

Определение 2. Если в условиях определения 1 один (а значит, и второй) конец образующей дуги лежит в неориентируемой компоненте дополнения к овалу O и из этого конца можно «уйти на бесконечность» (т.е. соединить его с граничной окружностью модели проективной плоскости), не пересекая овал O и образующую дугу, то отвечающую такой дуге змею назовём *змеёй со свободным концом*.

Таким образом, полный список ограничений, выделяющий класс кривых, рассматриваемых в этой работе, состоит из условий максимальности и общего положения (i)–(iii) и из предположения, что пересечение овалов имеет тип «змея со свободным концом, обвивающаяся вокруг овала». (Условие свободного конца змеи, введённое определением 2, наложено для уменьшения количества рассматриваемых возможностей. Случай змей без свободного конца будет рассмотрен в другой работе.)

Пусть имеется кривая степени 8, распадающаяся в произведение двух кривых степени 4, удовлетворяющая всем наложенным ограничениям. В дальнейшем кривую степени 4, один из овалов

⁰Для овала M -кривой степени 4 этого всегда можно добиться, выбрав в качестве одной из осей координат в проективной плоскости слегка сдвинутую двойную касательную к этой кривой.

которой есть змея, будем называть кривой номер 1, а кривую степени 4, вокруг овала которой обвивается змея, будем называть кривой номер 2. Овалы, на которых нет точек пересечения (в нашем случае таких овалов шесть: три овала кривой номер 1 и три овала кривой номер 2), называются свободными. Напомним, что в силу условия (i) овалы, принадлежащие кривой с одним номером, лежат вне друг друга.

Занумеруем на овале⁰ кривой номер 2 подряд 8 точек — точек пересечения овала с образующей дугой. Тогда расположение образующей дуги относительно пересекаемого ею овала можно кодировать подстановкой порядка 8, запись которой в виде цикла получается выписыванием номеров точек на овале, проходимых при движении по образующей дуге от одного её конца до второго.

Как обычно делается при решении подобных задач, классификация троек вида (1) разбивается на три этапа:

- I. Перечисление моделей, удовлетворяющих наложенным условиям.
- II. Запреты допустимых в силу п. I моделей.
- III. Реализация незапрещённых моделей алгебраическими кривыми рассматриваемого вида.

Будем доказывать запреты с помощью теоремы Безу и с помощью метода Оревкова, основанного на теории кос и зацеплений.

3. Перечисление допустимых подстановок. Нетрудно заметить, что для каждого расположения, отвечающего подстановке со вторым элементом 2 (3, 4), найдётся симметричное расположение, которому отвечает подстановка со вторым элементом 8 (соответственно, 7, 6) (см. рис. 1), поэтому достаточно рассмотреть только подстановки со вторым элементом ≤ 5 .

Если двум разным подстановкам соответствуют гомеоморфные расположения кривых, то оставим подстановку, которая меньше в смысле лексикографического порядка.

С помощью устранения точек пересечения (эти устранения независимы в силу теоремы Брюзотти; см., например, [3]) докажем, что расположения, отвечающие некоторым подстановкам, не могут быть реализованы кривой степени 8. Например, кривая на рис. 3, получаемая устранением точек пересечения на рис. 2, имеет гнездо⁰ веса 3 и гнездо веса 2 с различными внешними овалами; известно, что такое расположение овалов не может быть реализовано кривой степени 8 (в силу противоречия теореме Безу при пересечении с прямой), поэтому нереализуемо и расположение, изображённое на рис. 2.

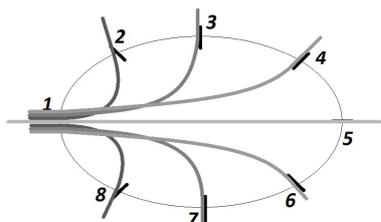


Рис. 1

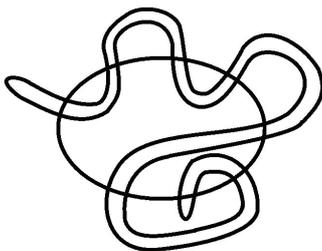


Рис. 2

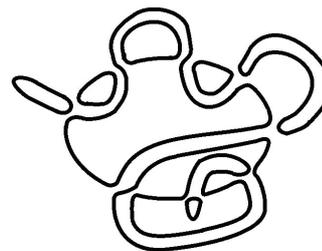


Рис. 3

Применением описанного приёма доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Полный список подстановок, отвечающих попарно различным образующим дугам для моделей расположений двух кривых степени 4 типа «змея со свободным концом, обвивающаяся вокруг овала», не противоречащих теореме Безу, состоит из следующих подстановок:*

⁰Здесь и ниже, где это не должно привести к недоразумениям, допускаем для краткости вольность речи, говоря вместо «на модели овала» просто «на овале».

⁰Гнездом веса s называется набор из s овалов, последовательно окружающих друг друга.

- | | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), | 7. (1, 2, 3, 6, 5, 4, 7, 8), | 13. (1, 2, 6, 5, 4, 7, 8, 3), | 19. (1, 4, 3, 2, 8, 7, 6, 5) |
| 2. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7), | 8. (1, 2, 3, 6, 5, 4, 8, 7), | 14. (1, 2, 6, 7, 8, 5, 4, 3). | 20. (1, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 3) |
| 3. (1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 6), | 9. (1, 2, 3, 6, 7, 8, 5, 4), | 15. (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8) | 21. (1, 4, 5, 8, 7, 6, 2, 3) |
| 4. (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 5), | 10. (1, 2, 3, 8, 7, 4, 5, 6), | 16. (1, 2, 8, 7, 6, 5, 4, 3) | |
| 5. (1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, 8), | 11. (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 3), | 17. (1, 4, 3, 2, 6, 7, 8, 5) | |
| 6. (1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5), | 12. (1, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 8), | 18. (1, 4, 3, 2, 7, 6, 5, 8) | |

4. Перечисление возможных расположений свободных овалов. Покажем, как определяются допустимые известными ограничениями возможности для расположения свободных овалов, рассмотрев конкретный пример — змею, отвечающую подстановке $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$ (см. рис. 4).

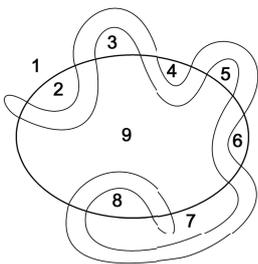


Рис. 4

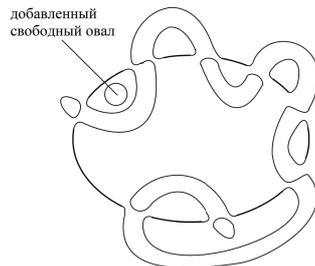


Рис. 5

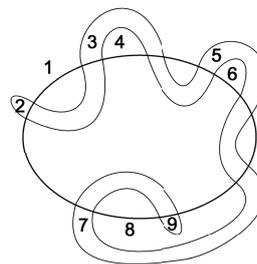


Рис. 6

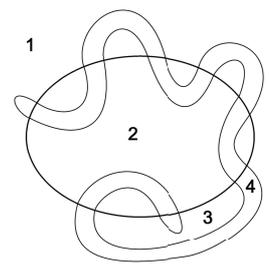


Рис. 7

Найдем сначала все возможные области для расположения овалов кривой номер 1. Напомним, что эти овалы должны располагаться вне друг друга и вне змеи.

Дополнение к пересекающимся овалам вне змеи состоит из 9 областей. Пронумеруем эти области (см. рис. 4) и будем смотреть, допустимо ли расположение в них свободных овалов. Так, в области с номером 2 свободный овал лежать не может: устраняя точки пересечения так, как показано на рис. 5, получим расположение с гнёздами веса 2 и веса 3 с разными внешними овалами, чего не может быть у кривой степени 8. Совершенно аналогично доказывается невозможность расположения свободного овала кривой номер 1 в областях 3–6, 8.

Аналогично найдем возможные области для расположения овалов кривой с номером 2. Снова имеем 9 областей для свободных овалов, которые пронумерованы на рис. 6. Также с помощью теоремы Брюзотти убеждаемся, что свободные овалы не могут лежать в областях 2–6 и 9.

Подведём итог: допустимо распределение свободных овалов только между четырьмя областями, пронумерованными на рис. 7, причем в области 2 могут располагаться только овалы кривой номер 1, в области 4 — только овалы кривой номер 2, а в областях 1 и 3 — как овалы кривой номер 1, так и овалы кривой номер 2 (но вне друг друга). Все логически возможные распределения шести свободных овалов по этим областям приведены в таблице 1, где количество овалов кривых номер 1 и номер 2 обозначается числами с соответствующими этим номерам индексами.

5. Запреты с помощью с помощью теории кос и зацеплений. Ниже описывается применение метода Оревкова, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод был предложен С. Ю. Оревковым в [6], примеры применения этого метода можно найти также в других работах (см., например, [1, 2]), поэтому наше изложение будет по возможности кратким.

Опять покажем применение метода на конкретном примере той же змеи, отвечающей подстановке $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$.

Изобразим исследуемое расположение так, как показано на рис. 8. Здесь «змея» — овал, нарисованный тонкой линией, а обозначение областей цифрами такое же, как на рис. 7.

Выберем в проективной плоскости точку P , не лежащую на кривой, так, чтобы каждая прямая пучка прямых с центром в этой точке пересекала нашу кривую не менее, чем в $8 - 2 = 6$ точках, и нашлась бы прямая l_M («максимальная»), пересекающая эту кривую в 8 точках (см.

Таблица 1

№	1	2	3	4
1	3 ₁ 3 ₂			
2	3 ₁ 2 ₂		1 ₂	
3	3 ₁ 2 ₂			1 ₂
4	3 ₁ 1 ₂		2 ₂	
5	3 ₁ 1 ₂			2 ₂
6	3 ₁ 1 ₂		1 ₂	1 ₂
7	3 ₁		3 ₂	
8	3 ₁		2 ₂	1 ₂
9	3 ₁		1 ₂	2 ₂
10	3 ₁			3 ₂
11	2 ₁ 3 ₂	1 ₁		
12	2 ₁ 2 ₂	1 ₁	1 ₂	
13	2 ₁ 2 ₂	1 ₁		1 ₂
14	2 ₁ 1 ₂	1 ₁	2 ₂	
15	2 ₁ 1 ₂	1 ₁		2 ₂
16	2 ₁ 1 ₂	1 ₁	1 ₂	1 ₂
17	2 ₁	1 ₁	3 ₂	
18	2 ₁	1 ₁	2 ₂	1 ₂
19	2 ₁	1 ₁	1 ₂	2 ₂
20	2 ₁	1 ₁		3 ₂
21	2 ₁ 3 ₂		1 ₁	
22	2 ₁ 2 ₂		1 ₁ 1 ₂	
23	2 ₁ 2 ₂		1 ₁	1 ₂
24	2 ₁ 1 ₂		1 ₁ 2 ₂	
25	2 ₁ 1 ₂		1 ₁	2 ₂
26	2 ₁ 1 ₂		1 ₁ 1 ₂	1 ₂
27	2 ₁		1 ₁ 3 ₂	
28	2 ₁		1 ₁ 2 ₂	1 ₂
29	2 ₁		1 ₁ 1 ₂	2 ₂
30	2 ₁		1 ₁	3 ₂
31	1 ₁ 3 ₂	2 ₁		
32	1 ₁ 2 ₂	2 ₁	1 ₂	
33	1 ₁ 2 ₂	2 ₁		1 ₂

№	1	2	3	4
34	1 ₁ 1 ₂	2 ₁	2 ₂	
35	1 ₁ 1 ₂	2 ₁		2 ₂
36	1 ₁ 1 ₂	2 ₁	1 ₂	1 ₂
37	1 ₁	2 ₁	3 ₂	
38	1 ₁	2 ₁	2 ₂	1 ₂
39	1 ₁	2 ₁	1 ₂	2 ₂
40	1 ₁	2 ₁		3 ₂
41	1 ₁ 3 ₂		2 ₁	
42	1 ₁ 2 ₂		2 ₁ 1 ₂	
43	1 ₁ 2 ₂		2 ₁	1 ₂
44	1 ₁ 1 ₂		2 ₁ 2 ₂	
45	1 ₁ 1 ₂		2 ₁	2 ₂
46	1 ₁ 1 ₂		2 ₁ 1 ₂	1 ₂
47	1 ₁		2 ₁ 3 ₂	
48	1 ₁		2 ₁ 2 ₂	1 ₂
49	1 ₁		2 ₁ 1 ₂	2 ₂
50	1 ₁		2 ₁	3 ₂
51	1 ₁ 3 ₂	1 ₁	1 ₁	
52	1 ₁ 2 ₂	1 ₁	1 ₁ 1 ₂	
53	1 ₁ 2 ₂	1 ₁	1 ₁	1 ₂
54	1 ₁ 1 ₂	1 ₁	1 ₁ 2 ₂	
55	1 ₁ 1 ₂	1 ₁	1 ₁	2 ₂
56	1 ₁ 1 ₂	1 ₁	1 ₁ 1 ₂	1 ₂
57	1 ₁	1 ₁	1 ₁ 3 ₂	
58	1 ₁	1 ₁	1 ₁ 2 ₂	1 ₂
59	1 ₁	1 ₁	1 ₁ 1 ₂	2 ₂
60	1 ₁	1 ₁	1 ₁	3 ₂
61	3 ₂	3 ₁		
62	2 ₂	3 ₁	1 ₂	
63	2 ₂	3 ₁		1 ₂
64	1 ₂	3 ₁	2 ₂	
65	1 ₂	3 ₁		2 ₂
66	1 ₂	3 ₁	1 ₂	1 ₂

№	1	2	3	4
67		3 ₁	3 ₂	
68		3 ₁	2 ₂	1 ₂
69		3 ₁	1 ₂	2 ₂
70		3 ₁		3 ₂
71	3 ₂	2 ₁	1 ₁	
72	2 ₂	2 ₁	1 ₁ 1 ₂	
73	2 ₂	2 ₁	1 ₁	1 ₂
74	1 ₂	2 ₁	1 ₁ 2 ₂	
75	1 ₂	2 ₁	1 ₁	2 ₂
76	1 ₂	2 ₁	1 ₁ 1 ₂	1 ₂
77		2 ₁	1 ₁ 3 ₂	
78		2 ₁	1 ₁ 2 ₂	1 ₂
79		2 ₁	1 ₁ 1 ₂	2 ₂
80		2 ₁	1 ₁	3 ₂
81	3 ₂	1 ₁	2 ₁	
82	2 ₂	1 ₁	2 ₁ 1 ₂	
83	2 ₂	1 ₁	2 ₁	1 ₂
84	1 ₂	1 ₁	2 ₁ 2 ₂	
85	1 ₂	1 ₁	2 ₁	2 ₂
86	1 ₂	1 ₁	2 ₁ 1 ₂	1 ₂
87		1 ₁	2 ₁ 3 ₂	
88		1 ₁	2 ₁ 2 ₂	1 ₂
89		1 ₁	2 ₁ 1 ₂	2 ₂
90		1 ₁	2 ₁	3 ₂
91	3 ₂		3 ₁	
92	2 ₂		3 ₁ 1 ₂	
93	2 ₂		3 ₁	1 ₂
94	1 ₂		3 ₁ 2 ₂	
95	1 ₂		3 ₁	2 ₂
96	1 ₂		3 ₁ 1 ₂	1 ₂
97			3 ₁ 3 ₂	
98			3 ₁ 2 ₂	1 ₂
99			3 ₁ 1 ₂	2 ₂
100			3 ₁	3 ₂

рис. 8). Такой пучок будем называть максимальным. Разрежем модель плоскости $\mathbb{R}P^2$ по прямой l_M и склеим половинки по частям граничной окружности, учитывая отождествление её диаметрально противоположных точек (см. рис. 9). Таким образом, l_M будет новой «бесконечно удалённой прямой», т.е. будет изображаться границей круга на новой модели.

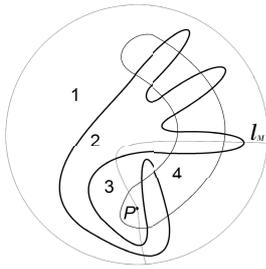


Рис. 8

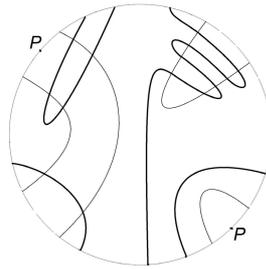


Рис. 9

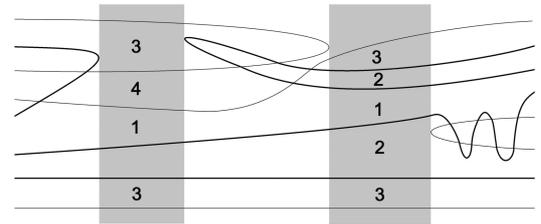


Рис. 10

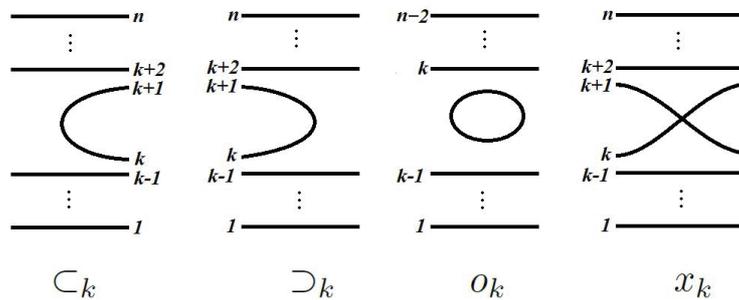


Рис. 11

Изобразим рис. 9 в виде «развёртки» (у С. Ю. Оревова — термин «послойное расположение»), изображённой на рис. 10 (теперь точка P — «бесконечно удалённая на вертикальной оси OY »).

В закрашенных на рис. 10 вертикальных полосах где-то должны располагаться 6 свободных овалов, которые при движении прямой пучка (вертикальной прямой на рис. 10) пересекаются поочерёдно (в силу теоремы Безу). Цифры в этих полосах соответствуют номерам областей на рис. 8. В левой полосе могут быть только овалы кривой номер 2, в правой — только овалы кривой номер 1.

Следуя С. Ю. Оревова, развёртки будем кодировать с помощью так называемого X -кода, который получается последовательным выписыванием символов $\subset_k, \supset_k, x_k, k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, при движении вдоль развёртки слева направо; эти символы кодируют расположения кривой в окрестности критических прямых пучка (тех прямых, которые касаются кривой или проходят через двойную точку кривой) в соответствии с рис. 11. Символ o_k заменяет последовательность символов $\subset_k \supset_k$ и отвечает расположению свободного овала в полосе над $(k - 1)$ -й линией («в k -м слое»), считая снизу.

В частности, развёртка рис. 10 описывается X -кодом

$$x_4 x_5 \supset_6 \dots \subset_6 x_5 x_6 x_4 x_5 \supset_7 \dots \subset_3 x_4 x_3 x_3 x_4 x_4 x_3 x_3 x_4,$$

где вместо многоточий должны располагаться символы, показывающие расположение свободных овалов в закрашенных полосах в соответствии с возможностями, перечисленными в таблице 1. При этом надо перебрать все возможные распределения трёх овалов в левой закрашенной на рис. 10 полосе и трёх овалов в правой закрашенной полосе с учётом порядка прохождения овалов при движении слева направо. Чтобы провести такой перебор, введём в дополнение к обозначениям рис. 11 параметры a_i, b_j и т. д., обозначающие число свободных овалов в q -й снизу горизонтальной полосе, где q — значение индекса.

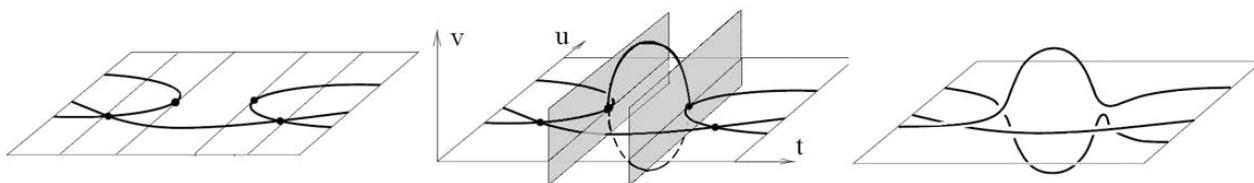


Рис. 12. Построение косы: развёртка — комплексификация — возмущение.

Каждой модели ставится в соответствие коса из 8 нитей, которая получается возмущением пересечения комплексификации развёртки и комплексификации пучка прямых (см. рис. 12, подробности в [6]). В [6] приведены правила, позволяющие по X -коду записать эту косу в виде слова из стандартных образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_7$ группы B_8 кос из 8 нитей⁰.

Известно (см. [7]), что если коса из n нитей, соответствующая гипотетической топологической модели кривой степени n , не является квазиположительной⁰, то эта модель не может быть реализована как множество вещественных точек кривой степени n . В качестве проверки на квазиположительность будем, следуя С. Ю. Оревкову, использовать следующую теорему.

Теорема 1 (неравенство Мурасуги—Тристрама). Пусть $b = \prod \sigma_i^{k_i} \in B_m$ — коса из m нитей, где σ_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, — стандартные образующие группы кос из m нитей, и L — замыкание косы b . Если коса b квазиположительна, то выполняется неравенство

$$\eta = |\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b) = \sigma(L) = \sigma(V + V^T)$ — сигнатура; $n(b) = n(L) = 1 + n(V + V^T)$ — дефект; V — матрица Зейферта; $e(b) = \sum k_i$ — алгебраическая степень косы b (т.е. сумма всех показателей степеней в разложении косы b по образующим группы B_m).

Проверка выполнения неравенства Мурасуги—Тристрама даже для одной модели расположения пересекающихся овалов требует выполнения вычислений, которые нельзя провести вручную: во-первых, из-за большого числа возможных наборов значений параметров a_i, b_j, \dots ; во-вторых, из-за необходимости вычисления собственных чисел большого количества матриц Зейферта, имеющих достаточно большой размер. Мы пользовались программой, написанной М. А. Гуциным в 2003 г., которая генерирует список всех возможных наборов неотрицательных значений параметров a_i, b_j, \dots и для каждого такого набора вычисляет левую часть неравенства Мурасуги—Тристрама. Эта программа неоднократно использовалась в подобных исследованиях.

Ход и результаты вычислений для рассматриваемой подстановки иллюстрирует таблица 2. На вход программы подаётся X -код с параметрами a_i, b_j, \dots и сумма значений этих параметров, т.е. число $6 - \nu$, где ν — количество букв «о» в X -коде. Во втором столбце таблицы 2 это число указывается в квадратных скобках после частей X -кода, показывающих порядок и положение свободных овалов: до точки с запятой — для левой закрашенной полосы на рис. 10, после точки с запятой — для правой. При этом значения индексов записаны без опускания их на полстроки. Программа выдаёт список наборов параметров, для которых неравенство Мурасуги—Тристрама не выполняется. В третьей колонке таблицы 2 проставлен 0 в тех случаях, когда такие наборы параметров обнаружены, т.е. $\eta = 0$ (в остальных случаях $\eta > 0$). В рассматриваемом примере таких наборов параметров оказалось 31 (см. таблицу 3 ниже).

⁰Эта коса определяется однозначно (с точностью до сопряжённости в группе кос) и строится непосредственно по вещественной модели в силу наложенного выше условия максимальности пучка. Если условие максимальности не выполнено, то метод Оревкова тоже применим, однако требует трудного перебора возможных переплетений нитей в мнимой области.

⁰Коса из n нитей называется квазиположительной, если её можно записать в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где ω_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, — некоторые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$.

Таблица 2

Номера строк в таблице 1	Параметры и овалы в X-коде	η
1, 2, 4, 7, 21, 22, 24, 27, 41, 42, 44, 47, 91, 92, 94, 97	a2b4c6; d2e4f6 [6]	0
3, 6, 8, 23, 26, 28, 43, 46, 48, 93, 96, 98	a2b4c6o5d4e6; f2g4h6 [5]	
5, 9, 25, 29, 45, 49, 95, 99	a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4j6 [4]	
10, 30, 50, 100	a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j2k4l6 [3]	
11, 12, 14, 17, 51, 52, 54, 57, 81, 82, 84, 87	a2b4c6; d2e4o3f2g4h6 [5] a2b4c6; d4e6o5f2g4h6 [5]	0
13, 16, 18, 53, 56, 58, 83, 86, 88	a2b4c6o5d4e6; f2g4o3h2i4j6 [4] a2b4c6o5d4e6; f4g6o5h2i4j6 [4]	
15, 19, 55, 59, 85, 89	a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6; i2j4k6o3l2m4 [3] a2b4c6o5d2e4f6o5g4h6; i2j4k6o5l4m6 [3]	
20, 60, 90	a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j2k4o3l2m4n6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6o5h4i6; j4k6o5l2m4n6 [2]	
31, 32, 34, 37, 71, 72, 74, 77	a2b4c6; d2e4o3f2g4o3h2i4j6 [4] a2b4c6; d2e4f6o3o5g2h4i6 [4] a2b4c6; d4e6o5f4g6o5h2i4j6 [4]	0
33, 36, 38, 73, 76, 78	a2b4c6o5d4e6; f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [3] a2b4c6o5d4e6; f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6o5d4e6; f4g6o5h4i6o5j2k4l6 [3]	0
35, 39, 75, 79	a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4o3j2k4o3l2m4n6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h2i4j6o3o5k2l4m6 [2] a2b4c6o5d4e6o5f4g6; h4i6o5j4k6o5l2m4n6 [2]	0
40, 65	a3b5o4c3d5; e3f5 [5] a3b5; c3d5o4e3f5 [5]	
61, 62, 64, 67	a2b4c6; d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [3] a2b4c6; d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6; d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6 [3] a2b4c6; d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6 [3]	0
63, 66, 68	a2b4c6o5m4n6; d2e4o3f2g4o3h2i4o3j2k4l6 [2] a2b4c6o5l4m6; d2e4o3f2g4h6o3o5i2j4k6 [2] a2b4c6o5l4m6; d4e6o5f2g4h6o3o5i2j4k6 [2] a2b4c6o5m4n6; d6e4o5f6g4o5h6i4o5j2k4l6 [2]	0
69, 80	o2a5; b3c5 [5] a5o6b5; c3d5 [5] a5; b3o2c3d5 [5] a5; b5o6c3d5 [5]	
70	a5; b3c5 [6]	

Таблица 3

№ в табл. 1	Параметры	Результат	№ в табл. 1	Параметры	Результат
64	$b = 1, c = 2$	+	76	$b = 1, c = 1, f = 1$	+
68	$c = 2$	–		$c = 1, d = 1, f = 1$	–
	$c = 1, n = 1$	–		$b = 1, e = 1, f = 1$	+
	$n = 2$	–		$d = 1, e = 1, f = 1$	–
74	$b = 1, c = 2, d = 1$	+		$b = 1, c = 1, h = 1$	–
	$b = 1, c = 2, f = 1$	+		$c = 1, d = 1, h = 1$	–
	$b = 1, c = 2, h = 1$	+		$b = 1, e = 1, h = 1$	+
75	$b = 1, h = 1$	+		$d = 1, e = 1, h = 1$	–
	$d = 1, h = 1$	–		$b = 1, c = 1, j = 1$	–
	$f = 1, h = 1$	–		$c = 1, d = 1, j = 1$	–
	$b = 1, j = 1$	–	$b = 1, e = 1, j = 1$	+	
	$d = 1, j = 1$	–	$d = 1, e = 1, j = 1$	–	
	$f = 1, j = 1$	–	84	$b = 1, c = 2, f = 2$	+
	$b = 1, l = 1$	–	87	$c = 1, d = 2, f = 2$	–
	$d = 1, l = 1$	–	94	$b = 1, c = 2, d = 3$	+
$f = 1, l = 1$	–				

Следуя С. Ю. Оревкову, расположения, удовлетворяющие неравенству Мурасуги–Тристрама, попытаемся запретить с помощью условия Фокса–Милнора.

Теорема 2 (условие Фокса–Милнора). Пусть $b \in B_n$ – квазиположительная коса, L – её замыкание и $\Delta_L(t)$ – многочлен Александера зацепления L . Если $e(b) = n - 1$, то должен существовать такой многочлен $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$, что $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$. Если $e(b) < n - 1$, то должно выполняться равенство $\Delta_L(t) = 0$.

Утверждение 1. Чтобы многочлен Александера удовлетворял условию Фокса–Милнора, необходимо, чтобы $\Delta_L(-1)$ было квадратом целого числа.

Утверждение 2. Если разложение многочлена на неприводимые множители содержит симметричный многочлен в нечётной степени, то $\Delta_L(t)$ не представляется в виде $\Delta_L(t) = f(t)f(t^{-1})$.

В 2016 г. И. М. Борисов дополнил программу Гущина: в случаях, когда вычисления дают $\eta = 0$, программа производит проверку выполнения условия Фокса–Милнора. Программа Борисова применялась в [1, 2]. В нашем случае эта программа запретила 20 вариантов распределения свободных овалов; см. таблицу 3, в первом столбце которой указан номер строки из таблицы 1, во втором столбце – суммы значений одноимённых параметров в X -коде, т.е.

$$b = \sum_k b_k$$

и т. п., а в третьем столбце – результат проверки выполнения условия Фокса–Милнора: «+» – условие выполняется, «–» – не выполняется. В итоге остались незапрещёнными 6 расположений, показанных на рис. 13, вопрос о реализуемости которых остаётся открытым.

Аналогичным образом исследовались остальные 20 подстановок из списка леммы 1. Заметим, что во всех случаях, кроме подробно описанного выше, условия Фокса–Милнора не дали новых ограничений после применения неравенства Мурасуги–Тристрама.

В таблице 4 во второй колонке после подстановки указан выбор центра P пучка, а в третьей колонке – соответствующий X -код без параметров. Центр пучка всегда выбирался вне свободных овалов, причём либо внутри змеи и вне несвободного овала кривой номер 2 – такой выбор

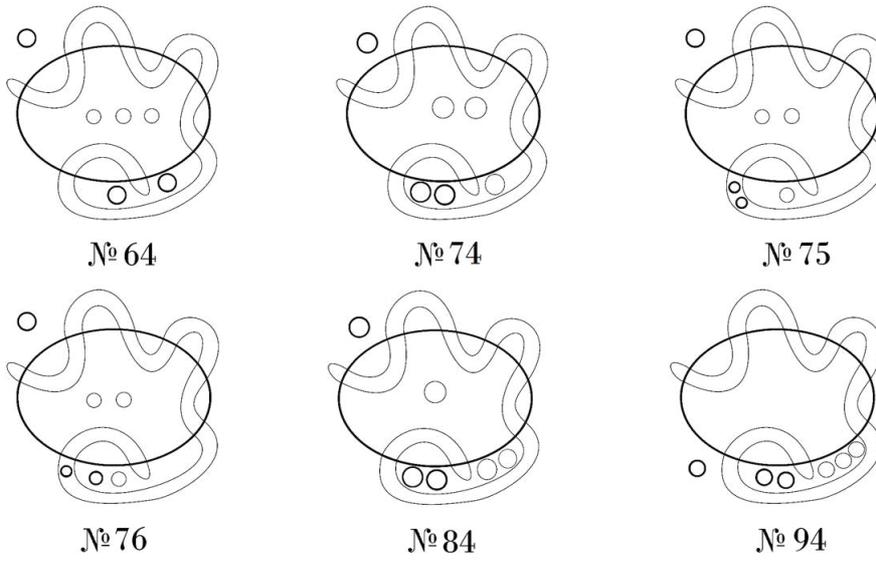


Рис. 13

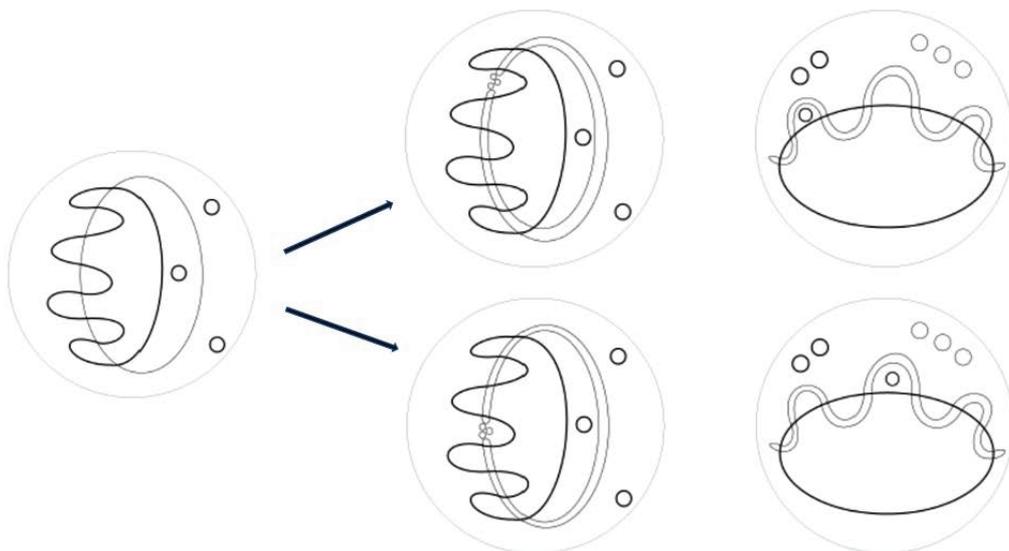
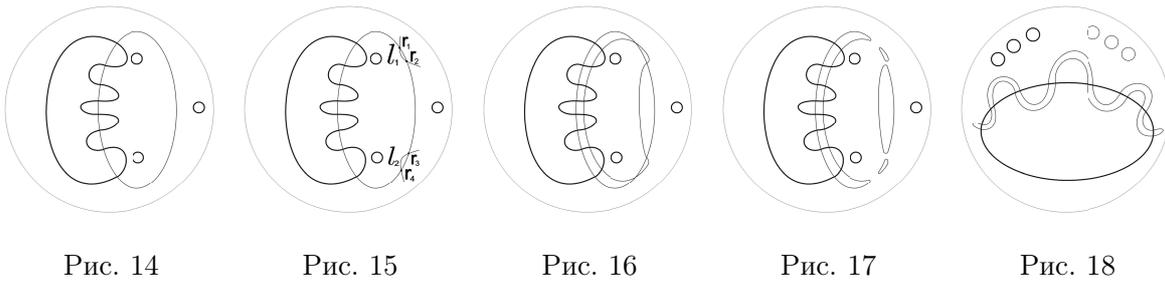


Рис. 19

Таблица 4

№	Подстановка	X-код	#
1	(12345678)	Не удалось найти максимальный пучок.	
2	(12345687)A7	$x_4x_5 \supset_6 \dots \subset_6 x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_3 x_4x_3x_3x_4x_4x_3x_3x_4$	100
3	(12345876)	Не удалось найти максимальный пучок.	367
4	(12346785)A5	$x_3x_4x_2x_3 \supset_4 \dots \subset_4 x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_1x_3x_2 \supset_3 \dots \subset_4 x_5x_4x_4x_5$	120
5	(12347658)A56	$x_5x_4x_4x_5 \supset_4 \dots \subset_1 x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_2 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	124
6	(12348765)B56	$\supset_4 \dots \subset_2 x_1x_2x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_4x_3x_6x_7x_7x_6x_6x_7 \supset_4 \dots \subset_3$	100
7	(12365478)B45	$\supset_4 \dots \subset_4 x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_2x_3x_3x_2 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_4x_6$	124
8	(12365487)B45	$x_6x_7 \supset_3 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_3x_4x_2x_3x_3x_2 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_6x_6x_6$	100
9	(12367854)A67	$x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_4 x_4 \dots \subset_6 x_5x_6 \supset_7 \dots \subset_4 x_5x_6x_4x_5x_7 \supset_4 \dots \subset_4 x_4 \dots \subset_5 x_6x_5x_4x_7x_1$	40
10	(12387456)	Не удалось найти максимальный пучок.	86
11	(12456783)B34	$x_1x_2x_2x_1x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_4 x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_2$	115
12	(12567438)A34	$x_3x_2x_4x_3x_1x_2 \supset_3 \dots \subset_2 x_2 \dots x_1 \dots x_5 \dots x_4 \dots x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_5x_6x_4x_5 \supset_4 \dots \subset_4$	139
13	(12654783)B56	$x_3x_4x_2x_3 \supset_2 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_7 x_5x_4x_6x_5x_5x_6x_4x_5$	64
14	(12678543)A45	$\supset_3 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_7x_5x_6 \supset_5 \dots \subset_4 x_4 \dots x_5 \dots \subset_4 x_3x_4x_4x_3x_1x_2x_2x_1 \supset_2 \dots \subset_4$	100
15	(12765438)B67	$x_5x_6x_6x_5x_5x_6x_4x_5 \supset_7 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	124
16	(12876543)B56	$x_4x_3 \supset_4 \dots \subset_2 x_3x_2x_4x_3x_1x_2 \supset_3 \dots \subset_5 x_6x_6x_7x_7x_7x_6 \supset_6 \dots \subset_6 x_5x_4$	100
17	(14326785)A34	$x_1x_5x_4x_6x_5 \supset_6 \dots \subset_2 x_7x_6x_1x_2x_6x_7 \supset_3 \dots \subset_4 x_3x_2x_4x_3$	64
18	(14327658)A34	$x_7x_6x_6x_7x_3x_2x_4x_3 \supset_2 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_3 \supset_1 \dots \subset_4 x_5x_4x_6x_5$	64
19	(14328765)A34	$x_7x_6x_6x_7x_2x_3 \supset_4 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_3 \supset_1 \dots \subset_6 x_5x_6x_6x_5x_5x_6$	100
20	(14567823)B56	$\supset_2 \dots \subset_2 x_3x_4x_2x_1x_3x_2 \supset_3 \dots \subset_5 x_6x_7x_5x_4x_6x_4 \supset_5 \dots \subset_6 x_5x_4x_6x_5$	100
21	(14587623)B56	$x_1x_2x_2x_1x_6x_5 \supset_4 \dots \subset_4 x_5x_4x_5x_4x_7x_6 \supset_5 \dots \subset_2 x_3x_2x_6x_7$	64

обозначается буквой A , — либо вне змеи и внутри несвободного овала кривой номер 2 — такому выбору отвечает буква B . Запись As обозначает, что точка P выбиралась внутри двугульной компоненты связности дополнения к пересекающимся овалам, на границе которой лежит точка с номером s , а запись Ast — что точка P лежит в четырёхугольной компоненте связности этого дополнения, на границах которой лежат точки с номерами s и t . Запись вида Bpq означает, что центр P выбирался внутри несвободного обвала кривой 2 в области, в границу которой входит часть дуги (p, q) этого овала, не содержащая других занумерованных точек. В последней колонке указано число подлежащих рассмотрению возможных распределений свободных овалов, т.е. длина соответствующей таблицы вида таблицы 1.

6. Построения кривых. Д. Гильберт построил в [5] взаимное расположение кривых степени 2 и 4, представленное на рис. 14, где кривая степени 4 показана более жирной линией.

Рассмотрим кривую степени 2, определяемую уравнением $\tilde{C}_2 = C_2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0$, где прямые l_1 и l_2 пересекают кривую C_2 в точках r_1, r_2, r_3, r_4 (см. рис. 15).

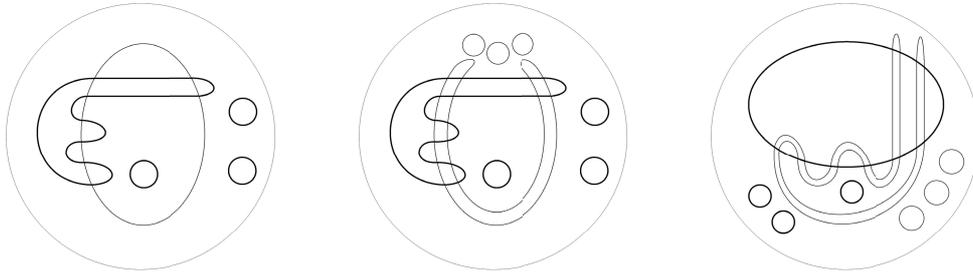


Рис. 20

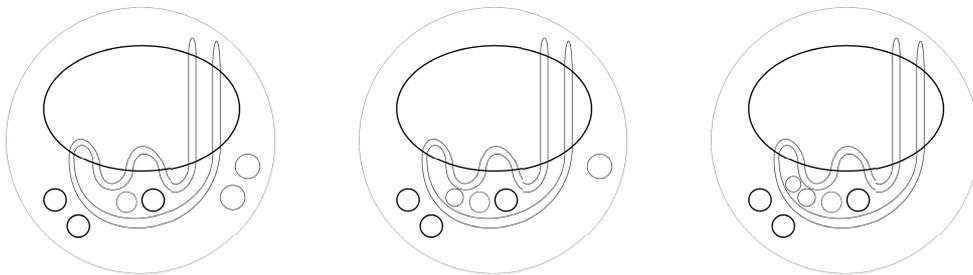


Рис. 21

При малых по абсолютной величине значениях ε кривая \tilde{C}_2 лежит близко к C_2 и при ε подходящего знака проходит так, как показано на рис. 16. Теперь с помощью малых изменений коэффициентов можем добиться устранения двойных точек кривой $C_2 \cdot \tilde{C}_2 = 0$, результат которого показан на рис. 17; уравнение возмущённой кривой можно записать в виде $\tilde{C}_4 = C_2 \cdot \tilde{C}_2 + \varepsilon_1 D_4 = 0$, где ε_1 достаточно мало по абсолютной величине и подходящего знака, а D_4 — какая-нибудь кривая степени 4 без действительных точек.

Расположение рис. 18 гомеоморфно расположению, показанному на рис. 17. Таким образом, мы реализовали расположение двух M -кривых степени 4 типа «змея, обвивающаяся вокруг овала», отвечающее подстановке (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Аналогичное удвоение кривой степени 2 в расположениях кривых степени 2 и степени 4, в которых овал M -кривой степени 4 пересекает овал кривой степени 2 в восьми точках — классификация таких расположений найдена Г. М. Полотовским в [4] — при различном выборе дуг овала кривой степени 2 для пересечения с прямыми l_1 и l_2 позволило реализовать ещё ряд расположений двух M -кривых степени 4 со змеей, обвивающейся вокруг овала (см. рис. 19–23).

7. Сводка результатов. В результате проведённого исследования доказано, что расположения, отвечающие 12 из 21 подстановок, перечисленных в лемме 1, не могут быть реализованы кривой степени 8 ни при каком расположении свободных овалов. Сводка результатов, полученных для остальных 9 подстановок, собрана в таблице 5. Отметим, что максимальный пучок удалось найти для 18 из 21 подстановок леммы 1. В этих случаях в совокупности построено 5 расположений и остаётся открытым вопрос о реализуемости 9 расположений, показанных на рис. 13 и на рисунках в предпоследней строке таблицы 5. Построено также 5 расположений для тех случаев, когда не был найден максимальный пучок.

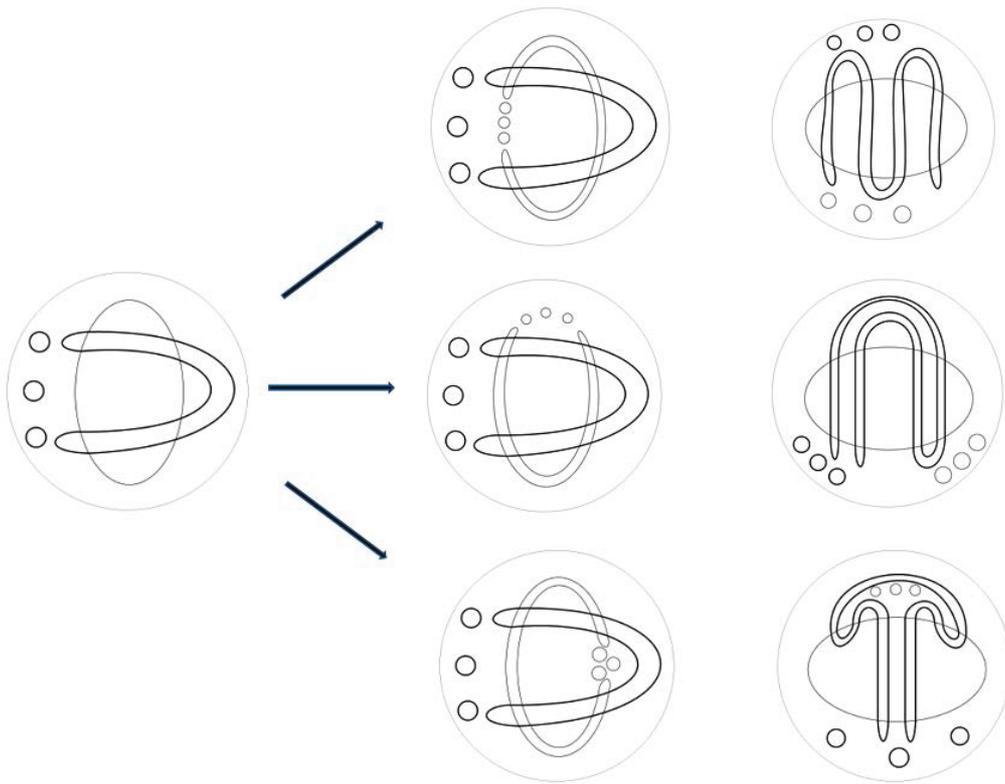


Рис. 22

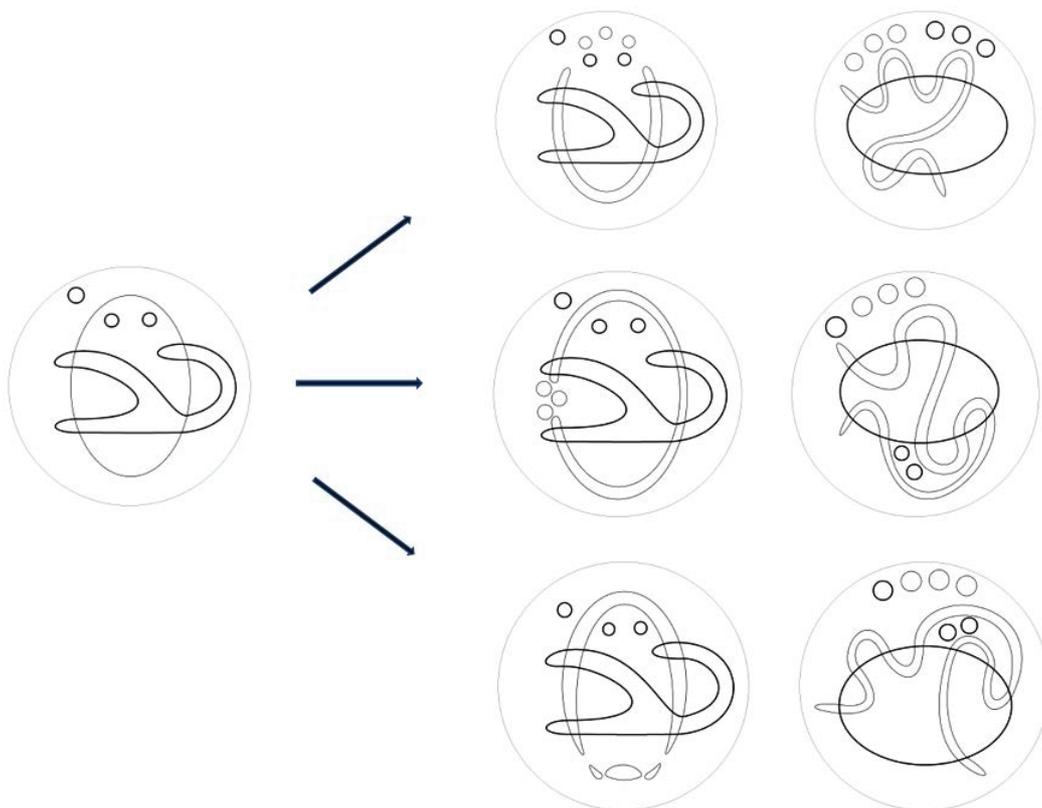


Рис. 23

Таблица 5

№	Подстановка	Результат исследования
1	12345678	Не удалось найти максимальный пучок. Построены 3 расположения: см. рис. 18, 19.
2	12345687	Открыт вопрос о реализуемости шести расположений, показанных на рис. 13; остальные расположения запрещены.
3	12345876	Не удалось найти максимальный пучок. Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 23.
5	12347658	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 23; все остальные расположения запрещены.
7	12365478	Построено одно расположение: см. средний ряд на рис. 23; все остальные расположения запрещены.
10	12387456	Не удалось найти максимальный пучок. Построено одно расположение: см. верхний ряд на рис. 22
12	12567438	Построено одно расположение: см. средний ряд на рис. 22; все остальные расположения запрещены.
15	12765438	Построено одно расположение: см. рис. 20; Вопрос о реализуемости следующих трёх расположений, изображённых на рис. 21 открыт.
18	14327658	Построено одно расположение: см. нижний ряд на рис. 22; все остальные расположения запрещены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 176. — С. 3–18.
2. Горская В. А., Полотовский Г. М. О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости// Ж. Средневож. мат. о-ва. — 2020. — 22, № 1. — С. 24–37.
3. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий// Усп. мат. наук. — 1974. — 29, № 4 (178). — С. 3–79.
4. Полотовский Г. М. Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка// Докл. АН СССР. — 1977. — 236, № 3. — С. 548–551.
5. Hilbert D. Über die reellen Züge algebraischer Curven// Math. Ann. — 1891. — 38. — P. 115–138.
6. Oreukov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve// Topology. — 1999. — 38. — P. 779–810.
7. Rudolf L. Algebraic functions and closed braids// Topology. — 1983. — 22. — P. 191–202.

Пучкова Наталья Дмитриевна
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
 Нижний Новгород
 E-mail: nataha1910@mail.ru