ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 24–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-24-35

УДК 514.76

ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

© 2023 г. **Л. А. ИГНАТОЧКИНА, А. В. НИКИФОРОВА, М. А. ТЕРПСТРА**

Аннотация. Получены критерии Φ-инвариантности и η-инвариантности почти контактных метрических структур, а также критерий киллинговости характеристического вектора ξ. Найдены все классы почти контактных метрических структур из классификации Кириченко, которые являются Φ-инвариантными, η-инвариантными, а вектор ξ является киллинговым. Доказано, что ξ не может быть конформно-киллинговым, отличным от киллингова, ни для одной почти контактной метрической структуры.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, инфинитезимальное конформное преобразование, инфинитезимальная изометрия.

INVARIANCE OF AN ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURE OF A SMOOTH MANIFOLD WITH RESPECT TO THE CHARACTERISTIC VECTOR

© 2023 **L. A. IGNATOCHKINA, A. V. NIKIFOROVA, M. A. TERPSTRA**

Abstract. In this paper, we obtain criteria for the Φ-invariance and the η-invariance for almost contact metric structures and a criterion for a characteristic vector ξ to be a Killing vector. We find all classes of almost contact metric structures from the Kirichenko classification that are Φ-invariant, η-invariant, and ξ is a Killing vector. Also, we prove that for any almost contact metric structure, ξ cannot be conformal Killing vector distinct from a Killing vector.

Keywords and phrases: almost contact metric structure, infinitesimal conformal transformation, infinitesimal isometry.

AMS Subject Classification: 53B05, 51E15

1. Введение. Почти контактные метрические структуры (Φ, η, ξ, g) возникают естественным образом на ряде гладких многообразий. Например, они индуцируются на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий, на расширенном фазовом пространстве механических систем, на вещественных вполне геодезических подмногообразиях келеровых многообразий и др. Другим примером почти контактной структуры на гладком многообразии является почти контактная метрическая структура на тотальном пространстве главного T^1-расслоения (если фиксирована линейная связность) над почти эрмитовым многообразием [2]. Более того, если на гладком многообразии M фиксирована почти контактная структура (Φ, η, ξ), такая, что интегральные кривые векторного поля ξ диффеоморфны окружностям, причем $\mathfrak{L}_\xi(\Phi) = \mathfrak{L}_\xi(\eta) = 0$ ($\mathfrak{L}_\xi$ — производная Ли), то M является пространством главного T^1-расслоения над почти комплексным многообразием, причем η является формой связности. Если риманова метрика g дополняет эту почти

контактную структуру до почти контактной метрической, причем ξ является вектором Киллинга (т.е. $\mathfrak{L}_\xi(g) = 0$), то на базе расслоения индуцируется почти эрмитова структура [2]. Хорошо известно, что условия $\mathfrak{L}_\xi(\Phi) = 0$, $\mathfrak{L}_\xi(\eta) = 0$, $\mathfrak{L}_\xi(g) = 0$ равносильны инвариантности тензорных полей Φ, η, g относительно 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов характеристического вектора ξ.

С другой стороны, инвариантность тензорных полей почти контактной метрической структуры относительно 1-параметрической группы локальных диффеоморфизмов характеристического вектора ξ представляет самостоятельный интерес. В [4] были получены результаты, касающиеся инвариантности тензорных полей Φ, η, g относительно ξ для некоторых классов почти контактных метрических структур. Так как классификация Кириченко почти контактных метрических структур содержит 2048 классов, встает вопрос о нахождении универсальных критериев, которые могли бы дать ответ об инвариантности относительно ξ почти контактной метрической структуры любого из 2048 классов. Такие критерии были найдены в нашей работе.

2. Почти контактные метрические структуры на гладких многообразиях. Большая часть данного пункта носит реферативный характер. Материалы взяты из монографии [2].

Пусть M — гладкое многообразие размерности $(2n+1)$, $n > 1$. Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначим модуль гладких векторных полей на M.

Четверка (Φ, η, ξ, g), где эндоморфизм Φ, 1-форма η, векторное поле ξ и риманова метрика g удовлетворяют условиям:

$$\Phi^2 = -\operatorname{id} + \eta \otimes \xi; \tag{1}$$

$$\eta \circ \Phi = 0; \tag{2}$$

$$\eta(\xi) = 1; \tag{3}$$

$$\Phi(\xi) = 0; \tag{4}$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{5}$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, называется *почти контактной метрической структурой* на многообразии M. Векторное поле ξ называется *характеристическим вектором*. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура называется *почти контактным метрическим многообразием*.

К каждому $(2n+1)$-мерному почти контактному метрическому многообразию внутренним образом присоединяется подрасслоение главного расслоения комплексных реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Оно называется *присоединенной G-структурой*. Реперы называются A-*реперами*. Тотальное пространство расслоения A-реперов будем обозначать BM. A-реперы получаются следующим образом. Комплексификация касательного пространства $T_m^{\mathbb{C}}(M)$ в каждой точке m многообразия M распадается в прямую сумму

$$T_m^{\mathbb{C}}(M) = D_\Phi^0 \oplus D_\Phi^i \oplus D_\Phi^{-i}$$

собственных подпространств комплексификации оператора Φ_m, отвечающих собственным значениям 0, $i \equiv \sqrt{-1}$, $-i$, соответственно. (В дальнейшем построении A-репера будем для краткости обозначать значение тензорного поля Φ в точке m через Φ). Проекторами на эти подпространства будут операторы

$$\mathfrak{m} = \operatorname{id} + \Phi^2; \quad \pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + i\Phi); \quad \bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + i\Phi). \tag{6}$$

Касательное пространство $T_m(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L}$, где подпространство $\mathfrak{M}$ является образом проектора $\mathfrak{m}$ из (6), а подпространство $\mathfrak{L}$ является образом дополнительного проектора $\mathfrak{l} = -\Phi^2$. Тогда, применяя операторы π, $\bar{\pi}$ (6) к базисам $(e_1, \ldots, e_n)$ подпространства $\mathfrak{L}$, ортонормированным относительно эрмитовой формы

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = g(X, Y) + ig(X, \Phi Y), \quad X, Y \in \mathfrak{L},$$

получим A-репер

$$\Big(m,\ \varepsilon_0 = \xi_m,\ \varepsilon_1 = \sqrt{2}\pi(e_1),\ \ldots,\ \varepsilon_n = \sqrt{2}\pi(e_n),\ \varepsilon_{\hat{1}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_1),\ \ldots,\ \varepsilon_{\hat{n}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_n)\Big).$$

Договоримся, что индексы $i, j, k, l, \dots$ (вторая часть латинского алфавита) пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d, \dots$ (первая часть латинского алфавита) пробегают значения от 1 до n и $\hat{a} = a + n$. Тогда A-репер коротко будет записываться в виде $p = (m, \varepsilon_i)$ или $p = (m, \xi, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}})$.

Напомним, что компоненты тензорных полей типа $(r, 0)$ и $(r, 1)$ на пространстве присоединенной G-структуры суть гладкие функции $\{t_{i_1\dots i_r}(p)\}$ и $\{t^j_{i_1\dots i_r}(p)\}$ на BM, определяемые формулами

$$t_{i_1\dots i_r}(p) = t^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}); \quad t^{\mathbb{C}}_m(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}) = t^j_{i_1\dots i_r}(p)\varepsilon_j; \quad p \in BM.$$

Обозначение репера p для краткости часто опускают.

Компоненты тензорных полей Φ и g на пространстве расслоения A-реперов имеют вид

$$(\Phi^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iI_n & 0 \\ 0 & 0 & -iI_n \end{pmatrix}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Основная теорема тензорного анализа для тензорных полей g и Φ примет вид

$$dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = 0; \tag{8}$$

$$d\Phi^i_j + \Phi^k_j\theta^i_k - \Phi^i_k\theta^k_j = \Phi^i_{j,k}\omega^k, \tag{9}$$

где $\{\theta^i_j\}$ — тензорные компоненты формы римановой связности ∇ метрики g, $\{\omega^k\}$ — тензорные компоненты формы смещения, $\{\Phi^i_{j,k}\}$ — компоненты ковариантного дифференциала эндоморфизма Φ в связности ∇. На пространстве присоединенной G-структуры (8) с учетом (7) примут вид

$$\begin{gathered} \theta^a_{\hat{b}} = \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k; \qquad \theta^a_0 = i\Phi^a_{0,k}\omega^k; \qquad \theta^0_a = -i\Phi^0_{a,k}\omega^k; \\ \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k; \qquad \theta^{\hat{a}}_0 = -i\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k; \qquad \theta^0_{\hat{a}} = i\Phi^0_{\hat{a},k}\omega^k; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\Phi^a_{b,k} = 0; \quad \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0; \quad \Phi^0_{0,k} = 0. \tag{11}$$

Кроме того, (9) с учетом (7) примут вид

$$\theta^a_b + \theta^{\hat{b}}_{\hat{a}} = 0; \quad \theta^a_{\hat{b}} + \theta^b_{\hat{a}} = 0; \quad \theta^{\hat{a}}_b + \theta^{\hat{b}}_a = 0; \quad \theta^0_a + \theta^{\hat{a}}_0 = 0; \quad \theta^a_0 + \theta^0_{\hat{a}} = 0; \quad \theta^0_0 = 0. \tag{12}$$

Подставляя (10) в (12), получим

$$\Phi^{\hat{b}}_{a,k} = -\Phi^{\hat{a}}_{b,k}; \quad \Phi^b_{\hat{a},k} = -\Phi^a_{\hat{b},k}; \quad \Phi^0_{a,k} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,k}; \quad \Phi^0_{\hat{a},k} = -\Phi^a_{0,k}. \tag{13}$$

Далее вводятся обозначения

$$\begin{gathered} B^{ab}{}_c = -\frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \frac{i}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad C^{abc} = \frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}; \quad B^a{}_b = i\Phi^a_{0,b}; \quad C^a = -i\Phi^0_{\hat{a},0}; \\ B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi^a_{[b,c]}; \quad C_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi^a_{b,c}; \quad B_a{}^b = -i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}; \quad C_a = i\Phi^0_{a,0}; \\ B^{ab} = i\left(\Phi^a_{0,\hat{b}} - \frac{1}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}\right); \quad B_{ab} = -i\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right); \quad C^{ab} = i\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]}; \quad C_{ab} = -i\Phi^0_{[a,b]}; \\ C^a_b = -i(\Phi^0_{\hat{a},b} + \Phi^0_{b,\hat{a}}); \quad F^{ab} = i\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}; \quad F_{ab} = -i\Phi^0_{a,b} \end{gathered} \tag{14}$$

и следующие семейства функций на пространстве присоединенной G-структуры:

(i) $B = \{B^i{}_{jk}\}$; $B^a{}_{\hat{b}c} = B^{ab}{}_c$; $B^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}} = B_{ab}{}^c$; все прочие компоненты семейства B нулевые;
(ii) $C = \{C^i{}_{jk}\}$; $C^a_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$; $C^{\hat{a}}_{bc} = C_{abc}$; все прочие компоненты семейства C нулевые;
(iii) $D = \{D^i{}_j\}$; $D^a{}_{\hat{b}} = B^{ab}$; $D^{\hat{a}}{}_b = B_{ab}$; все прочие компоненты семейства D нулевые;
(iv) $E = \{E^i{}_j\}$; $E^a{}_b = B^a{}_b$; $E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = B_a{}^b$; все прочие компоненты семейства E нулевые;
(v) $F = \{F^i{}_j\}$; $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$; $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$; все прочие компоненты семейства F нулевые;
(vi) $G = \{G^i\}$; $G^a = C^a$; $G^{\hat{a}} = C_a$; все прочие компоненты семейства G нулевые;

Эти семейства функций определяют тензорные поля, которые были названы *первым, вторым, третьим, четвертым, пятым* и *шестым* структурными тензорами почти контактной метрической структуры.

Теорема 1 (см. [2])**.** *Структурные тензоры почти контактной метрической структуры обладают следующими свойствами*:

$$\begin{gathered}\Phi\circ B(X,Y)=-B(\Phi X,Y)=B(X,\Phi Y);\quad \langle\langle B(X,Y),Z\rangle\rangle+\overline{\langle\langle Y,B(X,Z)\rangle\rangle}=0;\\ \Phi\circ C(X,Y)=-C(\Phi X,Y)=-C(X,\Phi Y);\quad \langle\langle C(X,Y),Z\rangle\rangle+\overline{\langle\langle Y,C(X,Z)\rangle\rangle}=0;\\ \Phi\circ D=-D\circ\Phi;\quad \Phi\circ E=-E\circ\Phi;\\ \Phi\circ F=-F\circ\Phi;\quad G\in\mathfrak{L};\quad (X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)).\end{gathered}\tag{15}$$

Рассматриваются линейные пространства $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ тензоров на $\mathfrak{L}$, обладающих свойствами (15), соответственно. Эти тензоры $\mathbb{C}$-линейны либо $\mathbb{C}$-антилинейны по соответствующим аргументам, а соответствующие им $\mathbb{R}$-линейные пространства имеют естественную структуру $\mathbb{C}$-линейного пространства. Пространство $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_0\oplus\mathfrak{B}_1$ распадается в прямую сумму подпространств бесследных и примитивных тензоров (первый структурный тензор представим в виде $B=B_0+B_1$, где B_0 — бесследный, а B_1 — примитивный); пространство $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_0\oplus\mathfrak{C}_1$ — в прямую сумму подпространств квазисимметричных и абсолютно кососимметричных тензоров (второй структурный тензор представим в виде $C=C_0+C_1$, где C_0 — квазисимметричный, а C_1 — абсолютно кососимметричный); $D=\mathfrak{D}_0\oplus\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_0\oplus\mathfrak{F}_1$ — в прямую сумму подпространств симметричных и кососимметричных тензоров ($D=D_0+D_1$, $F=F_0+F_1$ где D_0, F_0 — симметричные, D_1, F_1 — кососимметричные); $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0\oplus\mathfrak{E}_1$ — в прямую сумму подпространств бесследных и скалярных эндоморфизмов модуля $\mathfrak{L}$ ($E=E_0+E_1$, где E_0 — бесследный, E_1 — скалярный). Тогда пространство $\mathfrak{T}=\mathfrak{B}\oplus\mathfrak{C}\oplus\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{F}\oplus\mathfrak{L}$ распадается в прямую сумму 11 подпространств:

$$\mathfrak{T}=\mathfrak{B}_0\oplus\mathfrak{B}_1\oplus\mathfrak{C}_0\oplus\mathfrak{C}_1\oplus\mathfrak{D}_0\oplus\mathfrak{D}_1\oplus\mathfrak{E}_0\oplus\mathfrak{E}_1\oplus\mathfrak{F}_0\oplus\mathfrak{F}_1\oplus\mathfrak{L}\equiv\bigoplus_{k=1}^{11}\mathfrak{T}_k.$$

Это разложение неприводимо относительно структурной группы $U(n)$ и определяет $2^{11}=2048$ различных классов почти контактных метрических структур в зависимости от того, в какие из перечисленных классов попадают шесть структурных тензоров почти контактной метрической структуры. Классы обозначаются $AC-N$, где N — десятичное число, в двоичной записи которого на k-м месте стоит нуль, если составляющая соответствующего структурного тензора, лежащая в подпространстве $\mathfrak{T}_k$, равна нулю. Будем называть эту классификацию почти контактных метрических структур классификацией Кириченко.

Дополним изложенный материал исследованием вида компонент ковариантного дифференциала формы η на пространстве присоединенной G-структуры. По определению компонент на пространстве присоединенной G-структуры для формы η и (3) получаем

$$\eta_0=1;\quad \eta_a=\eta_{\hat a}=0.\tag{16}$$

По основной теореме тензорного анализа для компонент $\{\eta_i\}$ формы η имеем

$$d\eta_i-\eta_j\theta_i^j=\eta_{i,j}\omega^j,\tag{17}$$

где $\{\eta_{i,j}\}$ — компоненты ковариантного дифференциала η в римановой связности ∇ метрики g. Подставляя в (17) тождества (16) и (10)–(11), а также учитывая обозначения (14) и свойство кососимметричности (13), получим

$$\begin{gathered}\eta_{a,b}=i\Phi^0_{a,b}=-F_{ab};\quad \eta_{a,\hat b}=i\Phi^0_{a,\hat b}=B_a{}^b;\qquad \eta_{a,0}=i\Phi^0_{a,0}=C_a;\\ \eta_{\hat a,b}=-i\Phi^0_{\hat a,b}=B^a{}_b;\quad \eta_{\hat a,\hat b}=-i\Phi^0_{\hat a,\hat b}=-F^{ab};\quad \eta_{\hat a,0}=-i\Phi^0_{\hat a,0}=C^a;\quad \eta_{0,k}=0.\end{gathered}\tag{18}$$

3. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая характеристическим вектором ξ. Выразим производные Ли $\mathfrak{L}_\xi$ для тензоров Φ, η, g через их ковариантные дифференциалы в римановой связности ∇ метрики g.

Применим операцию ковариантного дифференцирования ∇_X ($X \in \mathfrak{X}(M)$) к (3) и (4):

$$\Phi(\nabla_X\xi) = -\nabla_X(\Phi)(\xi); \quad \eta(\nabla_X\xi) = -\nabla_X(\eta)\xi. \tag{19}$$

По свойствам ковариантной производной имеем

$$\nabla_Y(\Phi X) = \nabla_Y(\Phi)X + \Phi(\nabla_Y X), \tag{20}$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Для производной Ли $\mathfrak{L}_\xi$ имеем

$$[\xi, \Phi X] = \mathfrak{L}_\xi(\Phi)X + \Phi([\xi, X]). \tag{21}$$

Так как ∇ является связностью без кручения, т.е. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, с учетом (19) и (20) из (21) получим

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi)X = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \nabla_{\Phi X}(\eta)(\xi)\xi. \tag{22}$$

Ковариантно дифференцируя тождество (5), в котором $Y = \xi$ с учетом (3) и (4), а также ковариантного постоянства метрики g в римановой связности, получим

$$g(X, \nabla_Y\xi) = \nabla_Y(\eta)X. \tag{23}$$

В частности, если $X = \xi$, получим $\nabla_Y(\eta)\xi = g(\xi, \nabla_Y\xi) = 0$. (Последнее равенство получается, если применить ∇_Y к тождеству $g(\xi, \xi) = 1$). В результате этого (22) примет вид

$$\mathfrak{L}_\xi(\Phi)X = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi. \tag{24}$$

Аналогично рассуждаем для формы η. Ковариантная производная и производная Ли $\mathfrak{L}_\xi$ для η вычисляются так:

$$\xi(\eta(X)) = \mathfrak{L}_\xi(\eta)X + \eta([\xi, X]); \quad Y(\eta(X)) = \nabla_Y(\eta)X + \eta(\nabla_Y X).$$

Откуда с учетом отсутствия кручения у ∇ и (2), получаем

$$\mathfrak{L}_\xi(\eta)X = \nabla_\xi(\eta)X - \nabla_X(\eta)\xi. \tag{25}$$

Для ковариантной производной и производной Ли метрики g имеем

$$\xi(g(X, Y)) = \mathfrak{L}_\xi(g)(X, Y) + g([\xi, X], Y) + g(X, [\xi, Y]); \tag{26}$$

$$\xi(g(X, Y)) = g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y). \tag{27}$$

Приравнивая (26) и (27), учитывая нулевое кручение римановой связности и подставляя в полученное равенство (23), получим

$$\mathfrak{L}_\xi(g)(X, Y) = \nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X. \tag{28}$$

Следующий ряд определений взят из монографии [1]. Диффеоморфизм f псевдориманова многообразия (M, g) на себя называется *конформным преобразованием*, если $f^*g = e^\sigma g$, где σ — гладкая функция на M. Если функция σ является константой, то диффеоморфизм f называется *преобразованием подобия* или *гомотетией*, а при $\sigma = 0$ называется *изометрией*.

Векторное поле в некоторой окрестности каждой точки p многообразия M порождает локальную однопараметрическую подгруппу диффеоморфизмов. Если эти преобразования являются конформными, то векторное поле называется *инфинитезимальным конформным преобразованием* или *конформным* (*конформно-киллинговым*) векторным полем. Если эти преобразования являются изометриями, то векторное поле называется *инфинитезимальным изометрическим преобразованием* или *инфинитезимальной изометрией*, а также *киллинговым* векторным полем.

Хорошо известно [1], что векторное поле X является конформно-киллинговым тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{L}_X(g) = \sigma g. \tag{29}$$

Если σ является постоянной функций, то X будет гомотетией, а если тождественным нулем, то киллинговым векторным полем.

В статье [3] были введены следующие определения. Почти контактная структура называется *контактно-инвариантной*, короче, Ф-*инвариантной*, если $\mathfrak{L}_\xi(\Phi) = 0$. Почти контактная структура называется η-*инвариантной*, если $\mathfrak{L}_\xi(\eta) = 0$.

Получим критерии Ф-инвариантности, η-инвариантности и конформной киллинговости характеристического вектора ξ в компонентах на пространстве расслоения A-реперов.

Согласно (24) определение Ф-инвариантности примет вид:

$$\Phi^i_{j,k}\xi^k - \Phi^i_{k,j}\xi^k - \Phi^i_t\Phi^t_{k,r}\xi^k\Phi^r_j = 0.$$

Откуда с учетом (11), (7), (16) и (18) получаем

$$\Phi^{\hat{a}}_{b,0} - 2\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = 0; \quad \Phi^a_{\hat{b},0} - 2\Phi^a_{0,\hat{b}} = 0; \quad \Phi^0_{b,0} = 0; \quad \Phi^0_{\hat{b},0} = 0.$$

Сравнивая полученные тождества с обозначениями C_a, C^a, B_{ab} и B^{ab} из (14), получим следующую теорему.

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является* Ф-*инвариантной тогда и только тогда, когда третий D и шестой G структурные тензоры являются нулевыми.*

Согласно (25) определение η-инвариантности на пространстве присоединенной G-структуры примет вид:

$$\eta_{i,j}\xi^j - \eta_{j,i}\xi^j = 0;$$

отсюда с учетом (18) и (14) получим

$$C_a = 0; \quad C^a = 0.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура является η-инвариантной тогда и только тогда, когда шестой G структурные тензоры являются нулевыми.*

Из этой теоремы с учетом теоремы 2 вытекает следующий факт.

Теорема 4. *Если почти контактная метрическая структура* Ф-*инвариантна, то она и η-инвариантна.*

Теорема 2 позволяет перечислить все классы Ф-инвариантных почти контактных метрических структур: двоичная запись их номера имеет вид $****00****0$, вместо звездочки может стоять либо 0, либо 1. Количество классов таких структур 256. Аналогичным образом из теоремы 3 получаем, что классов η-инвариантных почти контактных метрических структур 1024 (на последнем месте в двоичной записи номера класса стоит 0, на остальных местах либо 0, либо 1). Согласно теореме 4 множество этих классов включает в себя 256 классов Ф-инвариантных почти контактных метрических структур.

Выясним, в каком случае ξ будет конформно-киллинговым векторным полем и, в частности, киллинговым. С учетом (28) определение конформно-киллингова векторного поля примет вид

$$\eta_{i,j} + \eta_{j,i} = \sigma g_{ij}. \tag{30}$$

При $i = 0$, $j = 0$ (30) с учетом (7) и седьмого равенства из (18) получим, что $\sigma = 0$; отсюда сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Не существует почти контактных метрических многообразий, для которых характеристический вектор ξ являлся бы конформно-киллинговым, отличным от киллингова.*

Поэтому далее будем рассматривать (30) только при $\sigma \equiv 0$. Это будет критерий киллинговости характеристического вектора ξ. С учетом (18) и (13) на пространстве присоединенной G-структуры он примет вид

$$F_{ab} + F_{ba} = 0 \qquad (\Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0); \tag{31}$$

$$F^{ab} + F^{ba} = 0 \qquad (\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},\hat{a}} = 0); \tag{32}$$

$$C_a = C^a = 0; \tag{33}$$

$$B_a{}^b + B^b{}_a = 0. \tag{34}$$

Тождество (31) равносильно кососимметричности пятого структурного тензора F. Кроме того, тождество (31) равносильно тождеству $B_{[ab]} = B_{ab}$. Действительно, в первом слагаемом равенства

$$B_{ab} = -i\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right)$$

(см. (14)) применим (13)

$$B_{ab} = -i(-\Phi^0_{a,b} - \Phi^{\hat{a}}_{b,0}).$$

В силу (13) второе слагаемое в этом тождестве кососимметрично по индексам a и b. Следовательно, $B_{(ab)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi^0_{(a,b)} = 0$ (круглые скобки обозначают симметризацию по индексам, которые в них заключены). Так как $B_{ab} = B_{[ab]} + B_{(ab)}$, то (31) равносильно $B_{ab} = B_{[ab]}$. Аналогично (32) означает $B^{ab} = B^{[ab]}$. В результате получаем, что (31) и (32) равносильно кососимметричности третьего структурного тензора D. Тождества (33) равносильны тому, что шестой структурный тензор G тождественно равен нулю. Сворачивая по a и b тождество (34), получаем, что $B_a{}^a + B^a{}_a = 0$, т.е. след четвертого структурного тензора будет нулевым, а само тождество в инвариантном виде записывается так:

$$\langle\langle EX, Y\rangle\rangle + \langle\langle X, EY\rangle\rangle = 0$$

(см. [2, с. 404]). Так как четвертый структурный тензор однозначно представим в виде суммы скалярного и бесследного эндоморфизмов, получаем, что для классов почти контактных метрических структур, для которых четвертый структурный тензор E является скалярным (не тождественно нулевым), характеристический вектор ξ не является киллинговым. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия будет киллинговым тогда и только тогда, когда шестой структурный тензор G тождественно равен нулю, третий структурный тензор D кососимметричен (следовательно, кососимметричен пятый структурный тензор F), а четвертый структурный тензор E удовлетворяет тождеству (из которого следует, что E бесследен)*

$$\langle\langle EX, Y\rangle\rangle + \langle\langle X, EY\rangle\rangle = 0. \tag{35}$$

В частности, если четвертый структурный тензор E почти контактной метрической структуры является скалярным эндоморфизмом, отличным от тождественно нулевого, то характеристический вектор ξ не является киллинговым.

Теорема 6 позволяет перечислить все классы почти контактных метрических структур, для которых характеристический вектор может быть киллинговым: двоичные записи номеров этих классов имеют вид $****0**00*0$ (вместо звездочки может стоять либо 0, либо 1). Он будет киллинговым, если при этом еще выполняется (35). Таких классов 128 штук.

Если четвертый структурный тензор E тождественно равен нулю, то условие (35) выполняется автоматически. Тогда для структур классов с номерами $****0*000*0$ характеристический вектор ξ будет киллинговым. Таких классов 64 штуки.

Говорят [4], что характеристический вектор ξ *сохраняет почти контактную метрическую структуру* или *почти контактная метрическая структура инвариантна относительно ξ*, если тензорные поля Φ, η, g инвариантны относительно действия локальной 1-параметрической группы диффеоморфизмов, порождаемой ξ, т.е. эта структура Φ-инвариантна, η-инвариантна и ξ является киллинговым. С учетом теорем 2, 3, 6 получаем, что характеристический вектор ξ сохраняет классы почти контактных метрических структур с двоичными номерами $****00000*0$ (вместо звездочки стоит либо 0, либо 1). Таких классов 32 штуки. Для классов с двоичными номерами $****00*00*0$ ξ будет сохранять почти контактную метрическую структуру тогда и только тогда, когда выполняется тождество (35).

4. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порождаемая характеристическим вектором ξ, для некоторых классов почти контактных метрических структур. Применим теоремы 2, 3, 6 к наиболее известным классам почти контактных метрических структур. Определения и критерии этих классов взяты из [2].

Контактные метрические структуры (или *почти сасакиевы*) — это почти контактные метрические структуры, для которых $d\eta = 2\Omega$, где $\Omega(X,Y) = g(X,\Phi Y)$, $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D_1 = E_1 = F_1 = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

K-контактными метрическими структурами называются контактные метрические структуры, для которых контактная форма η является киллинговой. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D = E_1 = F = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Собственные контактные метрические структуры (т.е. контактные метрические структуры, не принадлежащие своим подклассам из классификации Кириченко) не являются Φ-инвариантными, но являются η-инвариантными. Для собственных контактных метрических структур ξ не является киллинговым.

Выясним, в каком случае контактная структура является Φ-инвариантной. Для этого нужно потребовать, чтобы $D = 0$. Тогда согласно равенству

$$B_{ab} = -i\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right)$$

(см. (14)) имеем

$$\Phi^0_{a,b} + \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0.$$

Так как $F_1 = 0$, получим, что $\Phi^0_{[a,b]} = 0$. В силу кососимметричности $\Phi^{\hat{a}}_{b,0}$ по индексам a и b получаем из этого, что $\Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0$, а значит, и $\Phi^0_{a,b} = 0$. Это означает, что $F = 0$. Получаем, что выполняется критерий K-контактной метричечкой структуры.

Так как $E = -\Phi$, с учетом (7) находим

$$B_a{}^b + B^b{}_a = E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} + E^b{}_a = i\delta^b_a - i\delta^b_a = 0.$$

Следовательно, условие (35) для контактных структур выполняется. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 7.

1. *Контактная метрическая структура является Φ-инвариантной тогда и только тогда, когда она является K-контактной метрической структурой.*
2. *Характеристический вектор ξ сохраняет контактную метрическую структуру тогда и только тогда, когда она является K-контактной.*
3. *Характеристический вектор ξ сохраняет любую K-контактную метрическую структуру.*

Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$. Критерий принадлежности этому классу:

$$C = D = F = G = 0.$$

Сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Нормальные структуры Φ-инвариантны (а значит, и η-инвариантны).*

Теорема 9. *Характеристический вектор ξ нормальной структуры является киллинговым (а значит, и сохраняет нормальную структуру) тогда и только тогда, когда для структурного тензора E выполняется* (35).

Так как из (35) следует, что структурный тензор E должен быть бесследным, т.е. $E_1 = 0$, получаем, что собственные нормальные структуры (не принадлежащие подклассам классификации Кириченко) не будут сохраняться вектором ξ.

Приведем пример подкласса нормальных структур, которые сохраняются характеристическим вектором ξ.

Квази-сасакиевой структурой называется нормальная структура, фундаментальная форма Ω которой замкнута. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = F = G = 0, \quad \langle\langle EX, Y\rangle\rangle + \langle\langle X, EY\rangle\rangle = 0.$$

Отсюда вытекает следующий факт.

Теорема 10. *Характеристический вектор ξ сохраняет любую квази-сасакиеву структуру.*

Этот результат был получен в [4] с помощью непосредственных вычислений.

Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E_1 = F = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Отсюда получаем, что класс сасакиевых структур является подклассом квази-сасакиевых. Следовательно, характеристический вектор ξ сохраняет сасакиевы структуры. Этот результат был получен в [4].

Приближенно сасакиевой структурой называется почти контактная метрическая структура, если ее структурный эндоморфизм Φ удовлетворяет тождеству

$$\nabla_X(\Phi)X = g(X, X)\xi - \eta(X)X, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_0 = D_0 = E_1 = F_0 = G = 0, \quad E = -\Phi.$$

Отсюда получаем, что D и F кососиметричны, а E удовлетворяет (35). Тогда верна следующая теорема.

Теорема 11. *Приближенно сасакиевы структуры являются η-инвариантными и ξ является киллинговым.*

Собственные приближенно сасакиевы структуры не являются Φ-инвариантными. Подкласс Φ-инвариантных (а следовательно, инвариантных относительно ξ) будет определяться тождествами $B = C_0 = D = E_1 = F_0 = G = 0$, $E = -\Phi$.

Почти косимплектической структурой называется почти контактная метрическая структура, для которой $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C_1 = D_1 = E = F_1 = G = 0.$$

Собственные почти косимплектические структуры являются η-инвариантными, не являются Φ-инвариантными и ξ не является киллинговым.

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектичской*. Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E = F = G = 0.$$

Следовательно, характеристический вектор ξ сохраняет косимплектическую структуру. Этот результат также был получен в [4].

Почти контактная метрическая структура называется *слабо косимплектической*, если $\nabla_X(\Phi)X = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Слабо косимплектическая структура с замкнутой контактной формой называется *точнейше косимплектической структурой*.

Критерий принадлежности классу слабо косимплектических структур:

$$B = C_0 = D_0 = E = F_0 = G = 0.$$

Критерий принадлежности классу точнейше косимплектических структур:

$$B = C_0 = D = E = F = G = 0.$$

Из этого вытекает следующее утверждение.

Теорема 12.

1. *Слабо косимплектические структуры являются η-инвариантными и ξ является киллинговым. Собственные слабо косимплектические структуры не являются Φ-инвариантными.*
2. *Слабо косимплектическая структура является Φ-инвариантной тогда и только тогда, когда она точнейше косимплектическая.*
3. *Характеристический вектор ξ сохраняет любую точнейше косимплектическую структуру.*

Почти контактная метрическая структура называется *структурой Кенмоцу*, если

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(\Phi X, Y)\xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Критерий принадлежности этому классу:

$$B = C = D = E_0 = F = G = 0, \quad E = \mathrm{id}\,.$$

Так как тензор E является скалярным, то его след отличен от нуля ($\operatorname{tr} E = 2n$), следовательно, ξ не является киллинговым. Структуры Кенмоцу являются Φ-инвариантными и η-инвариантными. Эти результаты были получены в [4] непосредственными вычислениями.

5. Торсообразующий характеристический вектор ξ. В [4] Φ-инвариантность и η-инвариантность, а также киллинговость характеристического вектора ξ в основном рассматривалась в случае, когда ξ был торсообразующим. Эти исследования проводились для некоторых классов почти контактных метрических структур. Мы поставили перед собой задачу рассмотреть взаимосвязь этих понятий для случая произвольного почти контактного метрического многообразия.

Напомним [1], что векторное поле X на псевдоримановом многообразии называется *торсообразующим*, если

$$\nabla X = \rho \cdot \mathrm{id} + a \otimes X, \tag{36}$$

где a — некоторая 1-форма, ρ — некоторая гладкая функция на M. Будем называть их *определяющими элементами*. Торсообразующее векторное поле X называется *локально-конциркулярным*, если $da = 0$ и *спецконциркулярным*, если $a = 0$.

Пусть характеристический вектор ξ произвольного почти контактного метрического многообразия является торсообразующим. Тогда условие (36) на пространстве присоединенной G-структуры примет вид

$$\xi^i{}_{,j} = \rho\delta^i_j + a_j\xi^i.$$

С учетом того, что $\xi^0 = 1$, $\xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0$ получим

$$\begin{aligned} &\xi^a{}_{,b} = \rho\delta^a_b; \qquad \xi^{\hat{a}}{}_{,\hat{b}} = \rho\delta^b_a; \quad \xi^{\hat{a}}{}_{,b} = 0; \quad \xi^a{}_{,\hat{b}} = 0; \\ &\xi^a{}_{,0} = \xi^{\hat{a}}{}_{,0} = 0; \quad \xi^0{}_{,a} = a_a; \quad \xi^0{}_{,\hat{a}} = a_{\hat{a}}; \quad \xi^0{}_{,0} = \rho + a_0. \end{aligned} \tag{37}$$

Запишем на пространстве присоединенной G-структуры (23) с учетом (7):

$$\begin{aligned} &\xi^a{}_{,b} = \eta_{\hat{a},b}; \quad \xi^{\hat{a}}{}_{,b} = \eta_{a,b}; \quad \xi^a{}_{,\hat{b}} = \eta_{\hat{a},\hat{b}}; \quad \xi^{\hat{a}}{}_{,\hat{b}} = \eta_{a,\hat{b}}; \\ &\xi^0{}_a = \eta_{0,a}; \quad \xi^0{}_{,\hat{a}} = \eta_{0,\hat{a}}; \quad \xi^a{}_{,0} = \eta_{\hat{a},0}; \quad \xi^{\hat{a}}{}_{,0} = \eta_{a,0}; \quad \xi^0{}_{,0} = \eta_{0,0}. \end{aligned} \tag{38}$$

Подставляя (38) и (18) в (37), получим

$$B^a{}_b = \rho\delta^a_b; \quad B_a{}^b = \rho\delta^b_a; \tag{39}$$

$$F_{ab} = 0; \quad F^{ab} = 0; \quad C^a = 0; \quad C_a = 0; \quad a_a = 0; \quad a_{\hat{a}} = 0; \tag{40}$$

$$\rho + a_0 = 0. \tag{41}$$

Равенства (39) означают, что четвертый структурный тензор E является скалярным; (40) означают, что пятый F и шестой G структурные тензоры равны нулю. Сворачивая (39) по индексам a и b, а затем складывая, получим

$$2n\rho = B^a{}_a + B_a{}^a = E^i{}_i = \operatorname{tr} E.$$

Тогда

$$\rho = \frac{1}{2n}\operatorname{tr} E.$$

Из равенств (40)–(41) получаем, что

$$a(X) = a_0 X^0 = -\rho\eta(X) = -\frac{1}{2n}\operatorname{tr} E\eta(X)$$

для любого векторного поля X на M. Обратное утверждение выполняется очевидным образом. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 13. *Характеристический вектор ξ является торсообразующим тогда и только тогда, когда четвертый структурный тензор E скалярен, пятый F и шестой G структурные тензоры нулевые, причем определяющие элементы ξ однозначно задаются формулами*

$$\rho = \frac{1}{2n}\operatorname{tr} E, \quad a = -\frac{1}{2n}\operatorname{tr} E\eta.$$

Так как для многообразия Кенмоцу $E = \mathrm{id}$, получаем хорошо известный результат, что характеристический вектор многообразия Кенмоцу является торсообразующим (причем локально-конциркулярным) с определяющими элементами $\rho = 1$, $a = -\eta$.

Сравнивая эту теорему 13 с теоремой 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 14. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то эта структура является η-инвариантной.*

Из теоремы 13 также вытекает следующий факт.

Теорема 15. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является спецконциркулярным, то его определяющие элементы нулевые и $\nabla\xi = 0$.*

Сравнивая теорему 13 с теоремой 2, получаем следующую теорему.

Теорема 16. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то эта структура является Φ-инвариантной тогда и только тогда, когда третий структурный тензор D нулевой.*

Пусть торсообразующий характеристический вектор ξ является киллинговым. Тогда, подставляя (39) и (39) в (34), получаем $\rho = 0$ и $B^a{}_b = B_b{}^a = 0$. Следовательно, четвертый структурный тензор нулевой. С учетом теоремы 13 получаем $a = 0$. Обратно, если у почти контактной метрической структуры с торсообразующим ξ четвертый структурный тензор E нулевой, то с учетом равенств

$$B_{ab}{}^c = \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}, \quad B_{abc} = -\frac{i}{2}\Phi^a_{[b,c]};$$

(см. (14)) и $F = 0$, т.е.

$$\Phi^0_{a,b} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,b} = 0, \quad \Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} = -\Phi^a_{0,\hat{b}} = 0,$$

получаем

$$B^{ab} = -\frac{i}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}, \quad B_{ab} = \frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}.$$

Тогда согласно (13) получаем, что

$$B^{ab} = -B^{ba}, \quad B_{ab} = -B_{ba},$$

т.е. третий структурный тензор D кососимметричен. Тогда по теореме 6 вектор ξ будет киллинговым. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 17. *Если характеристический вектор ξ почти контактной метрической структуры является торсообразующим, то ξ будет киллинговым тогда и только тогда, когда четвертый структурный тензор E нулевой. При этом определяющие элементы ξ будут нулевыми и $\nabla\xi = 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
2. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — Одесса: Печатный Дом, 2013.
3. *Терпстра М. А.* Инвариантность AC-структуры относительно торсообразующего вектора Риба// Изв. Пензенск. гос. пед. ин-та им. В. Г. Белинского. — 2011. — № 26. — С. 248–254.
4. *Терпстра М. А.* О геометрии характеристического вектора почти контактных метрических структур/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — М.: МПГУ, 2011.

Игнаточкина Лия Анатольевна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: ignlia@gmail.com

Никифорова Анна Валентиновна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: anik7@bk.ru

Терпстра Мария Александровна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: mariya.terpstra@two-eagles.ru