ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 14–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-14-23

УДК 517.954, 517.983

О ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. **В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА**

Аннотация. Рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева—Слободецкого. Проведено сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, двумерная периодическая задача Римана, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость.

ON DISCRETE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN A QUARTER PLANE

© 2023 **V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA**

Abstract. We consider a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and the corresponding discrete boundary-value problem. Conditions for the solvability of the discrete boundary-value problem in discrete analogs of the Sobolev–Slobodetskii spaces are described. The discrete solution is compared with the solution of the corresponding continuum boundary-value problem depending on the discretization parameter.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, two-dimensional periodic Riemann problem, periodic wave factorization, analyticity, solvability.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений активно развивалась с середины 1960-х гг., и основные задачи были связаны с ограниченностью этих операторов в различных функциональных пространствах, описанием свойств фредгольмовости и регулярности решений, вычисление индекса [6, 10, 11]. Однако дискретные аспекты этой теории (в отличие от дифференциальных операторов в частных производных и соответствующих краевых задач [7,8]) исследовались не столь интенсивно, и, как правило, ограничивались рассмотрением превдодифференциальных операторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ (см. [12, 14]). Оставалось неясным, могут ли дискретные операторы стать хорошим аппроксимационным инструментом для решения псевдодифференциальных уравнений, хотя априори понятно, что дискретизация является неизменным условием для компьютерных вычислений. В связи с этим первый автор начал разрабатывать дискретную теорию таких уравнений, начав с сингулярных интегралов Кальдерона—Зигмунда [1,16] как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}^m_+)$, $h > 0$, и сравнение дискретных

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

и континуальных решений. Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае $h \to 0$ дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования были проведены для брлее общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s-пространств [17,18] со сравнением дискретных и непрерывных решений [3,15].

В этой работе рассматриваем новую модельную область — квадрант в $\mathbb{R}^2$, описываем условия разрешимости соответствующего модельного уравнения, выделяем дискретную краевую задачу и даем сравнение дискретных и континуальных решений. Геометрия области оказывает существенное влияние на выбор инструментов исследования и определяет дополнительные ограничения на класс символов исследуемых уравнений. Мы используем периодический аналог волновой факторизации [2] для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач. Некоторые элементы этих построений были анонсированы в [19,20]. Здесь мы приводим более общее определение и расширяем класс рассматриваемых уравнений.

2. Конусы, периодические символы, дискретные операторы и уравнения.

2.1. Дискретные пространства и преобразования. Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2),\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$. Мы рассматриваем функции дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$, определенные на решетке $h\mathbb{Z}^2$. Обозначим $\mathbb{T}^2$ квадрат $[-\pi, \pi]^2$, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате $\mathbb{T}^2$, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$.

Для функций дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости последнего ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функций в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Так определенное дискретное преобразование Фурье наследует все свойства интегрального преобразования Фурье, и обратное дискретное преобразование Фурье можно записать как

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2 \right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие пространства дискретных функций, и для их введения мы используем понятие разделенных разностей [8, 17] и их свойства, связанные с дискретным преобразованием Фурье. Используя эти конструкции, определим дискретные пространства Соболева—Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных псевдодифференциальных уравнений.

Введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ как совокупность дискретных функций, имеющих конечные полунормы

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} (1 + |\tilde{x}|)^l |\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x})|$$

для произвольного $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $k_r \in \mathbb{N}$, $r = 1, 2$,

$$\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} u_d(\tilde{x}),$$

где Δ_j^k обозначает разделенную разность k-го порядка по переменной $\tilde{x}_j$, $j = 1, 2$.

Определение 1. Дискретной обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал на $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Множество таких дискретных обобщенных функций будем обозначать $S'(h\mathbb{Z}^2)$, а значение дискретного функционала f_d на основной дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ обозначается (f_d, u_d).

Можно ввести понятие носителя дискретной обобщенной функции. Носитель дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ — это подмножество $h\mathbb{Z}^2$, где u_d отлична от нуля. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ обозначим $M_d = M \cap h\mathbb{Z}^2$ и говорим, что $f_d = 0$ в дискретной области M_d, если $(f_d, u_d) = 0$, $\forall u_d \in S(M_d)$, где $S(M_d) \subset S(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций с носителями, содержащимися в M_d. Если обозначить $\widetilde{M}_d$ объединение таких M_d, где $f_d = 0$, носителем дискретной обобщенной функции f_d будет множество $h\mathbb{Z}^2 \setminus \widetilde{M}_d$.

Аналогично [4] можно определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, однако роль дифференцирования будет играть разделенная разность первого порядка. Свойства дискретных обобщенных функций подробно описаны в [17], сходимость понимается как слабая сходимость в пространстве функционалов $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пример 1. Если $f_d(\tilde{x})$ локально суммируема, она порождает дискретную обобщенную функцию формулой

$$(f_d, u_d) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} f_d(\tilde{x}) u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^2). \tag{1}$$

Однако возможны и другие варианты, аналогичные дельта-функции Дирака $(\delta_d, u_d) = u_d(0)$, не представимые формулой (1).

Введем обозначение

$$\zeta^2 = h^{-2}\Big(\big(e^{-ih\cdot\xi_1} - 1\big)^2 + \big(e^{-ih\cdot\xi_2} - 1\big)^2\Big).$$

Определение 2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Следует отметить, что многие свойства таких дискретных пространств были исследованы в [9]. Варьируя h в (2), получаем различные нормы, которые эквивалентны L_2-норме, однако постоянные эквивалентности будут зависеть от h. В этой связи хотелось бы подчеркнуть, что в наших конструкциях (см. ниже) все постоянные от h не зависят.

Определение 3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций из пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, чьи носители содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H^s_0(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций $f_d \in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями в K_d, и эти дискретные обобщенные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H^s_0(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где inf берется по всем продолжениям ℓ.

Фурье-образ пространства $H^s(K_d)$ будем обозначать $\widetilde{H}^s(K_d)$.

2.2. Символы и операторы. Измеримую периодическую функцию $A_d(\xi)$ в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$, будем называть символом.

Определение 4. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} A_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d. \tag{3}$$

Говорят, что оператор A_d — эллиптический, если

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2}|A_d(\xi)|>0.$$

Можно определить более общий дискретный псевдодифференциальный оператор с символом $A_d(\tilde{x},\xi)$, зависящим от дискретной пространственной переменной $\tilde{x}$

$$(A_d u_d)(\tilde{x})=\sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2}h^2\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}A_d(\tilde{x},\xi)e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi,\quad \tilde{x}\in K_d,$$

однако в этой работе ограничимся модельным оператором вида (3).

Будем рассматривать класс символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}\leqslant|A_d(\xi)|\leqslant c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2}\tag{4}$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h, и называть число $\alpha\in\mathbb{R}$ порядком псевдодифференциального оператора A_d.

Очень просто доказать, что дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $A_d(\xi)$ — линейный ограниченный оператор $H^s(h\mathbb{Z}^2)\to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от h (см. [17]).

Исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x})=v_d(\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in K_d,\tag{5}$$

в пространстве $H^s(K_d)$, предполагая, что $v_d\in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Нам понадобятся некоторые области комплексного пространства $\mathbb{C}^2$. Область вида $\mathcal{T}_h(K)=\hbar\mathbb{T}^2+iK$ назовем трубчатой областью над квадрантом K, и будем рассматривать аналитические функции $f(x+i\tau)$ в $\mathcal{T}_h(K)=\hbar\mathbb{T}^2+iK$, считая их вещественно-периодическими, определенными для почти всех значений x.

Введем периодическое ядро Бохнера по аналогии с [4]

$$B_h(z)=\sum_{\tilde{x}\in K_d}e^{i\tilde{x}\cdot(\xi+i\tau)}h^2,\quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^2,\quad \tau\in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h\tilde{u}_d)(\xi)=\lim_{\tau\to0,\tau\in K}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}B_h(\xi+i\tau-\eta)\tilde{u}_d(\eta)d\eta.$$

В [16] приведены вычисления для дискретной положительной полуоси (одномерный конус). Если воспользоваться этими вычислениями, можно прийти к следующему выводу.

Лемма 1. *Для квадранта K оператор B_h имеет следующий вид*

$$\begin{aligned}(B_h\tilde{u}_d)(\xi)=\frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta+\lim_{\tau\to0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta+\\
+\lim_{\tau\to0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta-\\
-\lim_{\tau\to0+}\frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta.\end{aligned}$$

Поскольку формула слишком громоздка, сделаем следующие допущения. Будем рассматривать пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ как замыкание дискретного подпространства Шварца функций, принимающих нулевые значения на дискретных осях координат. В этом случае в Лемме 1 первые три слагаемых отсутствуют, и вид оператора B_h сильно упрощается.

Стоит еще отметить, что оператор B_h представляет собой двумерный периодический аналог преобразования Гильберта (одномерного сингулярного интеграла) и обладает очень схожими свойствами (см. [5, 13]).

Для описания картины разрешимости дискретного уравнения (5) нам понадобятся элементы многомерного комплексного анализа, которые приведены в следующем разделе.

3. Периодическая волновая факторизация.

Определение 5. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2} \leqslant |A_{d,\neq}(\xi+i\tau)| \leqslant c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2},$$
$$c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2} \leqslant |A_{d,=}(\xi-i\tau)| \leqslant c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2},$$

с постоянными c_1, c_1', c_2, c_2', не зависящими от h, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2\Big(\big(e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)}-1\big)^2 + \big(e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)}-1\big)^2\Big), \quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau=(\tau_1,\tau_2)\in K.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Всюду ниже предполагаем наличие периодической волновой факторизации для символа $A_d(\xi)$ с индексом $\varkappa$.

В одном специальном случае решение уравнения (5) существует и единственно.

Теорема 1. *Пусть* $|\varkappa - s| < 1/2$. *Тогда уравнение* (5) *для любой правой части* $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ *имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)),$$

где ℓv_d *— произвольное продолжение* v_d *из* $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ *в* $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. *Справедлива априорная оценка*

$$\|u_d\|_s \leqslant c\|v_d\|_{s-\alpha}^+,$$

с постоянной c, *не зависящей от* h.

Замечание 1. Теорема 1 опирается на факт, что для произвольной функции $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(\hbar\mathbb{Z}^m)$, $|s| < 1/2$, справедливо представление

$$\tilde{u}_d = B_h\tilde{u}_d + (I - B_h)\tilde{u}_d,$$

где первое слагаемое принадлежит $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(K_d)$, а второе — $\tilde{u}_d \in \tilde{H}^s(\hbar\mathbb{Z}^m \setminus K_d)$, причем такое представление единственно.

4. Дискретная краевая задача.

В этом разделе рассмотрим более содержательный случай, когда уравнение (5) может иметь много решений.

4.1. Структура дискретного решения. В этом разделе будем использовать некоторые результаты из [17] о структуре дискретной обобщенной функции, сосредоточенной в начале координат.

Теорема 2. *Пусть* $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) Q_n(\xi) B_h(Q_n^{-1}(\xi) A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)) + A_{d,\neq}^{-1}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}_1^k\right),$$

где $Q_n(\xi)$ *— произвольный многочлен степени* n *переменных* $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k}-1)$, $k=1,2$, *удовлетворяющий условию* (4) *с* $\alpha = n$, $\tilde{c}_k(\xi_1)$, $\tilde{d}_k(\xi_2)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, *— произвольные функции из* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, $s_k = s - \varkappa + k - 1/2$. *Имеет место априорная оценка*

$$\|u_d\|_s \leqslant \mathrm{const}\left(\|v_d\|_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=0}^{n-1}([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k})\right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, *и* const *не зависит от* h.

4.2. Условия разрешимости дискретной краевой задачи. Рассмотрим сейчас случай $v_d \equiv 0$, $\varkappa - s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$ для уравнения (5) и следующие дискретные граничные условия:

$$\sum_{\tilde{x}_1 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \qquad \sum_{\tilde{x}_2 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \qquad \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)h^2 = 0. \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z})$, $v_d \equiv 0$. Тогда дискретная краевая задача (5), (6) имеет единственное решение, которое дается формулой*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)(A_{d,\neq}(\xi_1, 0)\tilde{g}_d(\xi_1) + A_{d,\neq}(0, \xi_2)\tilde{f}_d(\xi_2)).$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leqslant \mathrm{const}(\|f_d\|_{s+1/2} + \|g_d\|_{s+1/2})$$

с постоянной, не зависящей от h.

4.3. Сравнение дискретных и непрерывных решений. Континуальным аналогом дискретной краевой задачи (5), (6) является следующая задача:

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \qquad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \qquad \int\limits_K u(x)dx = 0, \tag{8}$$

с псевдодифференциальным оператором, символ которого удовлетворяет условию

$$c_1(1+|\xi)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi)^\alpha.$$

и допускает волновую факторизацию относительно квадранта K с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$.

При специальном выборе дискретных аппроксимаций для граничных функций f и g можно получить следующую оценку погрешности.

Теорема 4. *Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $\varkappa > 1$. Тогда справедлива следующая оценка для решений u и u_d задач (7), (8) и (5), (6)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leqslant C_{f,g}h^\beta,$$

где постоянная $C_{f,g}$ зависит от функций f, g, $\beta > 0$ может быть произвольным числом.

5. Дополнение. Приведем в этом разделе некоторые дополнительны сведения, связанные с дискретными обобщенными функциями. Подробное обсуждение свойств таких функций и действий с ними можно найти в [17].

5.1. О дискретных обобщенных функциях.

Лемма 2. *$f_d \in S'(h\mathbb{Z}^m)$ тогда и только тогда, когда найдется положительное число C и целое число $p \geqslant 0$, такие, что для произвольной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^m)$ выполняется неравенство*

$$|(f_d, u_d)| \leqslant C|u_d|_p,$$

где

$$|u_d|_p = \sup_{\substack{k \leqslant p, \\ \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m}} (1+|\tilde{x}|)^p |(\Delta^{(k)}u_d)(\tilde{x})|.$$

Доказательство. Поскольку достаточность очевидна, остановимся на доказательстве необходимости. Возьмем $f_d \in S'(h\mathbb{Z}^m)$. Воспользуемся методом от противного и предположим, что таких чисел C и p не существует. Тогда найдется такая последовательность $\{u_{d,k}\}_{k=1}^\infty$, $u_{d,k} \in S(h\mathbb{Z}^m)$, что

$$|(f_d, u_{d,k})| \geqslant k|u_{d,k}|_k. \tag{9}$$

Последовательность

$$v_{d,k}(\tilde{x}) = \frac{u_{d,k}(\tilde{x})}{\sqrt{k}|u_{d,k}|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

стремится к нулю в пространстве $S(h\mathbb{Z}^m)$, так как при $k \geqslant s$, $k \geqslant r$

$$|\tilde{x}^s \Delta^{(r)} v_{d,k}(\tilde{x})| = \frac{|\tilde{x}^s \Delta^{(s)} u_{d,k}(\tilde{x})|}{\sqrt{k}|u_{d,k}|_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

В силу непрерывности функционала f_d в пространстве $S(h\mathbb{Z}^m)$ заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} (f_d, v_{d,k}) = 0.$$

Однако с другой стороны из (9) следует, что

$$|(f_d, v_{d,k})| = \frac{|(f_d, u_{d,k})|}{\sqrt{k}|u_{d,k}|_k} \geqslant \sqrt{k}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2. □

Ниже приведем одномерный вариант использованного выше результата, из которого легко следует нужный многомерный вариант.

Лемма 3. *Если дискретная обобщенная функция $f_d \in S'(h\mathbb{Z})$ сосредоточена в начале координат, то она представляет собой конечную линейную комбинацию разделенных разностей функции f_d. Другими словами,*

$$f_d(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{n} c_k (\Delta^{(k)} \delta_d)(\tilde{x}).$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{supp} f_d = \{0\}$, то для произвольного $k > 0$

$$f_d = \varphi(k\tilde{x}) f_d, \tag{10}$$

где $\varphi(\tilde{x}) \in S(h\mathbb{Z}^m)$ равно 1 в некоторой окрестности 0 и равна 0 при $|\tilde{x}| > 1$. По лемме 2

$$|(f_d, u_d)| \leqslant C|u_d|_n, \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^m), \tag{11}$$

для некоторых $C > 0$, $n \geqslant 0$, не зависящих от u_d. Для произвольной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^m)$ построим

$$u_{d,n}(\tilde{x}) = u_{d,n}(\tilde{x}) - \sum_{l=0}^{n} \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} \tilde{x}^l, \quad v_k(\tilde{x}) = u_{d,n}(\tilde{x}) \varphi(k\tilde{x}).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} &(\Delta^{(r)} u_{d,n})(\tilde{x}) = O(|\tilde{x}|^{n+1-r}), \quad && \tilde{x} \to \infty \quad (r \leqslant n), \\ &(\Delta^{(s)} \varphi)(k\tilde{x}) = O(k^s), && k \to \infty, \end{aligned}$$

и применяя (11) к $v_k(\tilde{x})$, заключаем, что

$$|(f_d, v_k)| \leqslant C|v_k|_n = C \sup_{l \leqslant n,\ |\tilde{x}| \leqslant 1/k} (1 + |\tilde{x}|)^n |\Delta^{(l)} (u_{d,n}(\tilde{x}) \varphi(k\tilde{x})) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \max_{l \leqslant n,\ |\tilde{x}| \leqslant 1/k} \sum_{s=0}^{l} |\Delta^{(s)} u_{d,n}(\tilde{x})| |\Delta^{(l-s)} \varphi(k\tilde{x})| \leqslant C_2 \max_{l \leqslant n} \sum_{s=0}^{l} k^{-n-1+s} k^{l-s} = \frac{C_3}{k} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Теперь заметим, что в соответствии с (10) (f_d, v_k) не зависит от k. Тогда

$$(f_d, v_1) = \lim_{k\to\infty} (f_d, v_k) = 0.$$

Таким образом, применяя (10) при $k = 1$, приходим к следующему представлению:

$$(f_d, u_d) = (\varphi f_d, u_d) = (f_d, \varphi u_d) = \left(f_d, v_1 + \sum_{l=0}^{n} \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} \tilde{x}^l \right) =$$

$$= (f_d, v_1) + \sum_{l=0}^{n} \frac{(\Delta^{(l)} u_d)(0)}{l!} (f_d, \tilde{x}^l \varphi(\tilde{x})) = \sum_{l=0}^{n} C_l (\Delta^{(l)} \delta_d, u_d),$$

где использовано обозначение $C_l = (f_d, \tilde{x}^l \varphi)$. Нетрудно убедиться в единственности этого представления. $\square$

Чтобы получить фурье-представление леммы 3, приведем некоторые наблюдения. Отметим, что каждая дискретная обобщенная функция $f_d \in S'(h\mathbb{Z})$ может рассматриваться как обобщенная функция $f_d \in S'(\mathbb{R})$, сосредоточенная на $h\mathbb{Z}$.

Так как преобразование Фурье обобщенной функции f_d определено формулой

$$(Ff_d, u) = (f_d, Fu), \quad \forall u \in S(\mathbb{R})$$

(см. [4]), то

$$(F\Delta^{(1)} f_d, u) = (f_d, \Delta^{(1)} Fu).$$

Остаются небольшие вычисления.

Для $u \in S(\mathbb{R})$ получаем

$$(\Delta^{(1)}\tilde{u})(\xi) = \frac{1}{h}(\tilde{u}(\xi + h) - \tilde{u}(\xi)) = \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(e^{-ihx} - 1)e^{-ix\xi}u(x)dx,$$

так что для обобщенной функции $f_d \in S'(\mathbb{R})$ справедливо следующее соотношение:

$$(f_d, \Delta^{(1)} Fu) = \left(f_d, F\left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h}u(x)\right)\right) = \left(Ff_d, \frac{e^{-ihx} - 1}{h}u\right) = \left(\frac{e^{-ih\xi} - 1}{h}Ff_d, u\right).$$

Если $f_d \in S(h\mathbb{Z})$, то

$$(F_d\Delta_+^{(1)} f_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi}\frac{f_d(\tilde{x} + h) - f_d(\tilde{x})}{h}h = \frac{e^{-ih\xi} - 1}{h}(F_d f_d)(\xi),$$

что подтверждает вышеприведенные выкладки. Теперь легко переформулировать лемму 3 в образах Фурье.

Следствие 1. *Для дискретной обобщенной функции*

$$f_d(\tilde{x}) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\Delta^{(k)}\delta_d)(\tilde{x})$$

справедливо следующее Фурье-представление:

$$\tilde{f}_d(\xi) = \sum_{k=0}^{n} c_k\zeta^k,$$

где $\zeta = \hbar(e^{-ih\xi} - 1)$.

5.2. Доказательство теоремы 2. Lля доказательства будет использован прием, связанный с факторизацией (см. [11]), который тесно связан с периодической задачей Римана [1, 17, 18]. Правую часть $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ продолжим на $\mathbb{R}^2$, обозначая $lv_d \in H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Теперь введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = lv_d(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x})$$

так, что $w_d(\tilde{x}) \equiv 0$, $\forall \tilde{x} \in D_d$. Далее запишем

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = lv_d(\tilde{x})$$

и применим дискретное преобразование Фурье

$$A_d(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + \tilde{w}_d(\xi) = \widetilde{lv}_d(\xi).$$

С учетом факторизации символа $A_d(\xi)$ получаем

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,-}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv}_d(\xi).$$

Обсудим функциональные пространства последнего равенства. Так как $\widetilde{lv}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$, то в соответствии со свойствами символа $A_{d,-}^{-1}(\xi)$ имеем $A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2)$. Обозначим через $Q_n(\xi)$ произвольный многочлен степени n от переменных $\zeta_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию (2). Тогда $Q_n^{-1}(\xi)A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv_d}(\xi) \in \widetilde{H}^{-\delta}(h\mathbb{Z}^2$, и мы можем воспользоваться следующим представлением:

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv_d}(\xi) = f_+(\xi) + f_-(\xi),$$

где

$$f_+(\xi) = (B_h(Q_n^{-1}A_{d,-}^{-1}\widetilde{lv_d}))(\xi), \quad f_-(\xi) = ((I - B_h)(Q_n^{-1}A_{d,-}^{-1}\widetilde{lv_d}))(\xi)$$

(см. замечание 1). Конечно, $f_+ \in \widetilde{H}^{-\delta}(K_d)$, $f_- \in \widetilde{H}^{-\delta}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Таким образом,

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,-}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n(\xi)f_+(\xi) + Q_n(\xi)f_-(\xi),$$

или

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)f_+(\xi) = Q_n(\xi)f_-(\xi) - A_{d,-}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi).$$

Сравним левую и правую части последнего равенства. Левая часть из пространства $\widetilde{H}^{s-\varkappa}(K_d)$, а правая часть — из $\widetilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Применив обратное дискретное преобразование Фурье, получим равенство двух дискретных обобщенных функций, одна из которых обнуляется внутри K_d, а другая — вне. Отсюда заключаем, что это может быть только дискретная обобщенная функция, сосредоточенная на границе дискретного квадранта. С учетом леммы 3 и следствия 1 получим следующее представление:

$$A_{d,+}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)f_+(\xi) = \sum_{k=0}^{n}(\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k),$$

или, по-другому,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)Q_n(\xi)B_h\Big(Q_n^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)\Big) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\sum_{k=0}^{n}(\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k).$$

Осталось выяснить, сколько слагаемых должно присутствовать в последней сумме с учетом того, что слагаемые должны содержаться в пространстве $\widetilde{H}^s(\hbar\mathbb{T}^m)$. Рассмотрим одно из слагаемых, например, $\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Так как множитель $A_{d,+}^{-1}(\xi)$ имеет порядок $-\varkappa$, мы должны убедиться в конечности $H^{s-\varkappa}$-нормы для $\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Имеем

$$\begin{aligned}\|c_k(\Delta_2^{(k)}\delta)\|_{s-\varkappa}^2 &= \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^{s-\varkappa}|\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k|^2 d\xi = \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^{s-\varkappa}|\tilde{c}_k(\xi_1)|^2|\zeta_2^k|^2 d\xi \leqslant \\ &\leqslant a_1\hbar^{2(s-\varkappa+k+1/2)}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}|\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leqslant a_2\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}(1+|\zeta_1^2|)^{s-\varkappa+k+1/2}|\tilde{c}_k(\xi_1)|^2 d\xi_1,\end{aligned}$$

где постоянные a_1, a_2 не зависят от h.

Последнее слагаемое должно иметь номер $(n-1)$, потому что для n-го слагаемого показатель при $\hbar$ будет положительным; действительно, при $k = n$ получаем

$$s_n = s - \varkappa - n + \frac{1}{2} = -n - \delta + n + \frac{1}{2} = -\delta + \frac{1}{2} > 0.$$

Следствие 2. *Пусть $\varkappa - s = n + \delta \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$, $v_d \equiv 0$. Общее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}(\tilde{c}_k(\xi_1)\zeta_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\zeta_1^k), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

6. Заключение. В работе рассмотрен лишь двумерный конус, однако авторы рассчитывают получить результаты, аналогичные полученным в случае многомерного дискретного полупространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев А. В., Васильев В. Б.* Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — *51*, № 5. — С. 642–649.
2. *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
3. *Васильев В. Б., Тарасова О. А.* О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *174*. — С. 12–19.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973.
6. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1986.
7. *Рябенький В. С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. *Франк Л. С.* Пространства сеточных функций// Мат. сб. — 1971. — *86*, № 2. — С. 187–233.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов. Т. 1-4. — М.: Мир, 1986.
11. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
12. *Botchway L. N. A., Gaël Kibiti P., Ruzhansky M.* Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$// J. Funct. Anal. — 2020. — *278*, № 11. — 108473.
13. *King F. W.* Hilbert Transforms. Vols. 1, 2. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
14. *Rabinovich V. S.* Wiener algebra of operators on the lattice $\mathbb{Z}^n$ depending on the small parameter $\mu > 0$// Complex Var. Elliptic Equations. — 2013. — *58*, № 6. — P. 751–766.
15. *Tarasova O. A., Vasilyev V. B.* To the theory of discrete boundary value problems// Difference Differ. Equations Appl. — 2019. — *2*. — 17.
16. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — *3*, № 1. — P. 81–93.
17. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — *23*, № 3. — P. 492–506.
18. *Vasilyev A. V., Vasilyev V. B.* On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — *71*. — P. 195–212.
19. *Vasilyev V. B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators// AIP Conf. Proc. — 2017. — *1863*. — 140014.
20. *Vasilyev V. B.* On discrete solutions for pseudo-differential equations// AIP Conf. Proc. — 2019. — *2116*. — 040010.

Васильев Владимир Борисович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: vbv57@inbox.ru

Ходырева Анастасия Александровна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: anastasia.kho@yandex.ru