ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 113–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-113-119

УДК 517.9

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА

© 2022 г. **О. Н. ЧЕРЕПАНОВА**

Аннотация. В работе исследуется однозначная разрешимость задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности с малым параметром при старшей производной по времени.

Ключевые слова: задача идентификации коэффициентов, обратная задача, уравнение с частными производными, уравнение с малым параметром.

ON HYPERBOLIC APPROXIMATION OF THE PROBLEM OF DETERMINING A SOURCE FUNCTION

© 2022 **O. N. CHEREPANOVA**

Abstract. The paper considers the unique solvability of the problem of determining source function in a hyperbolic heat equation with a small parameter as a coefficient to the second time derivative.

Keywords and phrases: problem of coefficient identification, inverse problem, partial differential equation, equation with a small parameter.

AMS Subject Classification: 39A14

Довольно часто в повседневной жизни возникает необходимость определения причин возникновения исходных явлений на основании имеющихся конечных результатов. Обратные задачи для дифференциальных уравнений — это задачи, основанные на известных решениях заданных дифференциальных уравнений, имеющие цель определения коэффициентов дифференциальных уравнений, границ области, а также граничных и начальных условий. К обратным задачам относят задачи определения некоторых физических свойств объектов, например, плотности, коэффициента теплопроводности, упругих модулей в зависимости от координат или в виде функций других параметров.

Вопросы корректности краевых задач, их аппроксимации задачами, содержащими малые параметры, являются одной из важных областей в теории дифференциальных уравнений. Многие задачи механики сплошной среды описываются системами уравнений в частных производных, при изучении которых важную роль играют их аппроксимации, зависящие от малых параметров. Введение в исходное уравнение добавочных членов, содержащих малый параметр, позволяет улучшить дифференциальные свойства решений, сделать задачу более устойчивой к изменениям начальных данных, строить более экономичные численные методы. Первые публикации по обратным задачам, появившиеся в середине XX века, были связаны с различными разделами

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1388).

естествознания: физикой, геофизикой, астрономией и др. Первыми по теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной были работы А. Н. Тихонова [1, 2] и И. С. Градштейна [3, 4].

В работе исследуется однозначная разрешимость задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности с малым параметром при старшей производной по времени. Рассмотрен двумерный случай по пространственным переменным с функцией источника специального вида, зависящей от всех переменных, входящих в уравнение. Исследуется вопрос о близости решения задачи с малым параметром и соответствующей предельной задачи.

В области $Q_T = \{(t,x,y) \mid t \in [0,T],\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0\}$ рассмотрим задачу нахождения функций $(u^\varepsilon(t,x,y),\, g^\varepsilon(t,y))$, удовлетворяющих уравнению

$$\varepsilon u^\varepsilon_{tt} + u^\varepsilon_t = u^\varepsilon_{xx} + u^\varepsilon_{yy} + f^\varepsilon(t,x) + g^\varepsilon(t,y), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{1}$$

где функция $f(t,x)$ известна. Пусть для функции $u(t,x,y)$ выполняются следующие начальные условия:

$$u^\varepsilon(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \bar\Omega, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(0,x,y) = u_1(x,y), \quad (x,y) \in \bar\Omega, \tag{3}$$

где $\bar\Omega = \{x,y \mid 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0\}$, и граничные условия:

$$u^\varepsilon_x(t,0,y) = \mu_1(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_1, \tag{4}$$

$$u^\varepsilon_x(t,x_0,y) = \mu_2(t,y), \quad (t,y) \in \Gamma_2, \tag{5}$$

$$u^\varepsilon(t,x,0) = \vartheta_1(t,x), \quad (t,x) \in B_1, \tag{6}$$

$$u^\varepsilon(t,x,y_0) = \vartheta_2(t,x), \quad (t,x) \in B_2, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_1 = \Big\{t,y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0,\ x = 0\Big\}, \quad \Gamma_2 = \Big\{t,y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0,\ x = x_0\Big\},$$
$$B_1 = \Big\{t,y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ y = 0\Big\}, \quad B_2 = \Big\{t,y \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant x_0,\ y = y_0\Big\}.$$

Предполагаем также выполнение условия переопределения:

$$u^\varepsilon(t,\tilde x,y) = \beta(t,y), \quad (t,y) \in [0,T] \times [0,y_0]. \tag{8}$$

Условия (2)—(8) считаем согласованными, т.е.

$$u_0(0,y) = \mu_1(0,y), \quad u_1(0,y) = \mu_1(0,y), \quad u_0(x_0,y) = \mu_2(x_0,y), \quad u_1(x_0,y) = \mu_2(x_0,y),$$
$$u_0(x,y_0) = \vartheta_1(0,x), \quad u_1(x,y_0) = \vartheta_1(0,x), \quad u_0(x,y_0) = \vartheta_2(x,y_0), \quad u_1(x_0,y) = \vartheta_2(0,x),$$
$$\mu_1(t,0) = \vartheta_1(t,0), \quad \mu_1(t,y_0) = \vartheta_2(t,0), \quad \mu_2(t,0) = \vartheta_2(t,x_0), \quad \mu_2(t,y_0) = \vartheta_1(t,0),$$
$$\beta(t,0) = \vartheta_1(t,\tilde x), \quad \beta(t,y_0) = \vartheta_2(t,\tilde x).$$

Для задачи (1)—(8) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть*

$$u_0, u_1 \in W^3_2(\Omega), \quad \mu_i \in W^3_2(\Gamma_i), \quad \vartheta_i \in W^3_2(B_i), \quad i = 1,2, \quad \beta(t,y) \in C^2([0;T] \times [0;y_0]).$$

Тогда существует такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом фиксированном $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ существует единственное решение задачи (1)—(8)

$$\Big(u^\varepsilon(t,x,y), g^\varepsilon(t,y) \;\Big|\; u^\varepsilon \in W^2_2(Q_T), g(t,y) \in L_2(Q_T)\Big).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^2_2(Q_T)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L_2(Q_T)} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где $(u(t,x,y), g(t,y))$ — решение соответствующей предельной задачи:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(t,x) + g(t,y), \tag{9}$$

$$u(0,x,y)=u_0(x,y),\quad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{10}$$
$$u_x(t,0,y)=\mu_1(t,y),\quad (t,y)\in\Gamma_1, \tag{11}$$
$$u_x(t,x_0,y)=\mu_2(t,y),\quad (t,y)\in\Gamma_2, \tag{12}$$
$$u(t,x,0)=\vartheta_1(t,x),\quad (t,x)\in B_1, \tag{13}$$
$$u(t,x,y_0)=\vartheta_2(t,x),\quad (t,x)\in B_2. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Положим

$$z^\varepsilon=u^\varepsilon(t,x,y)-\varphi-\psi,$$

где

$$\varphi(t,x,y)=\vartheta_1+\frac{y}{y_0}(\vartheta_1-\vartheta_1),\quad \psi(t,x,y)=x\mu_1+\frac{x^2}{2x_0}(\mu_2-\mu_1).$$

Тогда задача (1)—(7) сводится к задаче с однородными граничными условиями:

$$\varepsilon z^\varepsilon_{tt}+z^\varepsilon_t=z^\varepsilon_{xx}+z^\varepsilon_{yy}+\tilde{f}^\varepsilon(t,x,y)+g^\varepsilon(t,y),\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0, \tag{15}$$
$$z^\varepsilon(0,x,y)=z_0(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{16}$$
$$z^\varepsilon_t(0,x,y)=z_1(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{17}$$
$$z^\varepsilon_x(t,0,y)=z^\varepsilon_x(t,x_0,y)=0,\qquad (t,y)\in[0,T]\times[0,y_0], \tag{18}$$
$$z^\varepsilon(t,x,0)=z^\varepsilon(t,x_0,y_0)=0,\qquad (t,x)\in[0,T]\times[0,x_0], \tag{19}$$

где функции $\tilde{f}^\varepsilon(t,x,y)$, z_0, z_1 известны и зависят от функций f, ϑ_1, ϑ_2, μ_1, μ_2.

Продифференцируем задачу (15)—(19) по переменной x и положим $z_x(t,x,y)=\omega(t,x,y)$. Тогда для функции $\omega(t,x,y)$ имеет место прямая задача:

$$\varepsilon\omega^\varepsilon_{tt}+\omega^\varepsilon_t=\omega^\varepsilon_{xx}+\omega^\varepsilon_{yy}+\bar{f}^\varepsilon(t,x,y), \tag{20}$$
$$\omega^\varepsilon(0,x,y)=\omega_0(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{21}$$
$$\omega^\varepsilon_t(0,x,y)=\omega_1(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{22}$$
$$\omega^\varepsilon(t,0,y)=\omega^\varepsilon(t,x_0,y)=0,\qquad (t,y)\in\Gamma_i,\quad i=1,2, \tag{23}$$
$$\omega^\varepsilon(t,x,0)=\omega^\varepsilon(t,x_0,y_0)=0,\qquad (t,x)\in B_i,\quad i=1,2, \tag{24}$$

где $\bar{f}^\varepsilon(t,x,y)=\tilde{f}^\varepsilon{}_x(t,x,y)$, $\omega_0=z_{0x}$, $\omega_1=z_{1x}$. Для задачи (20)—(24) рассмотрим соответствующую задачу с $\varepsilon=0$:

$$\omega_t=\omega_{xx}+\omega_{yy}+\bar{f}(t,x,y), \tag{25}$$
$$\omega(0,x,y)=\omega_0(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{26}$$
$$\omega(t,0,y)=\omega(t,x_0,y)=0,\qquad (t,y)\in\Gamma_i,\quad i=1,2, \tag{27}$$
$$\omega(t,x,0)=\omega(t,x,y_0)=0,\qquad (t,x)\in B_i,\quad i=1,2, \tag{28}$$

и докажем существование и единственность её решения.

Выведем ряд априорных оценок на функцию $\omega(t,x,y)$ в предположении гладкости этой функции. Умножим (25) скалярно на $\omega(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$(\omega_t,\omega)=(\omega_{xx},\omega)+(\omega_{yy},\omega)+(\bar{f}(t,x,y),\omega).$$

Применяя в последнем равенстве формулу интегрирования по частям, определение скалярного произведения и нормы, учитывая однородные граничные условия, получим:

$$(\omega_t,\omega)=\int\limits_\Omega\omega_t\omega d\Omega=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega\right\|^2,$$

$$(\omega_{xx},\omega)=\int\limits_\Omega\omega_{xx}\omega dxdy=\int\limits_\Omega\omega d\omega_x dy=\omega\omega_x|_{\partial\Omega}-\int\limits_\Omega\omega_x\omega_x d\Omega=-\|\omega_x\|^2,$$

$$(\omega_{yy}, \omega) = \int\limits_{\Omega} \omega_{yy} \omega dx dy = \int\limits_{\Omega} \omega d\omega_y dx = \omega\omega_y|_{\partial\Omega} - \int\limits_{\Omega} \omega_y \omega_y d\Omega = -\|\omega_y\|^2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + \|\omega_x\|^2 + \|\omega_y\|^2 = (\bar{f}, \omega). \tag{29}$$

Применяя к правой части (29) неравенство Коши и учитывая, что функция $f(t,x,y)$ задана и зависит от входных данных задачи, получим

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 \leqslant C_1 + \|\omega\|^2.$$

Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до t и применим формулу Ньютона—Лейбница:

$$\|\omega(t)\|^2(t) \leqslant \|\omega\|^2(0) + C_1 T + \int\limits_0^t \|\omega\|^2(\tau) d\tau.$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла следует оценка

$$\|\omega(t)\|(t) \leqslant C_2. \tag{30}$$

Здесь и далее C_i — постоянные, зависящие от входных данных задачи.

Умножим (25) скалярно на $\omega_t(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$(\omega_t, \omega_t) = (\omega_{xx}, \omega_t) + (\omega_{yy}, \omega_t) + (\bar{f}(t,x,y), \omega_t).$$

С учетом определений скалярного произведения и нормы, формулы интегрирования по частям и однородных граничных условий из полученного равенства следует

$$\|\omega_t\| + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_x\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_y\|^2 = (\bar{f}, \omega_t). \tag{31}$$

Применим к правой части (31) неравенство Коши. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\omega_x\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_y\|^2 \leqslant \frac{d}{dt}\|\bar{f}\|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t и учитывая условия на входные данные задачи, получим следующие оценки:

$$\|\omega_x\| \leqslant C_5, \quad \|\omega_y\| \leqslant C_6. \tag{32}$$

Умножая (25) скалярно на ω_{txx} в $L_2(\Omega)$ и используя схему получения оценок (31), (32), получим оценки

$$\|\omega_{xx}\| \leqslant C_5, \quad \|\omega_{xy}\| \leqslant C_6. \tag{33}$$

Далее, умножив (25) скалярно на ω_{tyy} и проводя те же рассуждения, как и при выводе (30), (32), (33), можно получить оценки

$$\|\omega_{xx}\| \leqslant C_5, \quad \|\omega_{xy}\| \leqslant C_7. \tag{34}$$

Из уравнения и оценок (34) следует, что

$$\|\omega_t\| \leqslant C_7. \tag{35}$$

Оценки (30), (32)—(35) позволяют утверждать, что

$$\|\omega\|_{W_2^{2,1}}(Q_T) \leqslant C_8. \tag{36}$$

С помощью (36) можно доказать разрешимость задачи (25)—(28), например, методом Галёркина.

Единственность решения задачи (25)—(28) доказывается стандартным образом: доказательством равенства нулю разности двух возможных решений.

Рассмотрим задачу (20)—(24) с $\varepsilon \neq 0$. Выведем ряд априорных оценок на функцию $\omega^\varepsilon(t,x,y)$ в предположении гладкости этой функции. Умножим (20) скалярно на $\omega_t^\varepsilon(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon(\omega_{tt}^\varepsilon, \omega_t^\varepsilon) + (\omega_t^\varepsilon, \omega_t^\varepsilon) = (\omega_{xx}^\varepsilon, \omega_t^\varepsilon) + (\omega_{yy}^\varepsilon, \omega_t^\varepsilon) + (\bar{f}(t,x,y), \omega_t^\varepsilon). \tag{37}$$

Так как из определений скалярного произведения и нормы, формулы интегрирования по частям и однородных граничных условий следует, что

$$(\omega_{tt}^{\varepsilon}, \omega_t^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2, \qquad (\omega_t^{\varepsilon}, \omega_t^{\varepsilon}) = \|\omega_t^{\varepsilon}\|^2,$$
$$(\omega_{xx}^{\varepsilon}, \omega_t^{\varepsilon}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_x^{\varepsilon}\|^2, \quad (\omega_{yy}^{\varepsilon}, \omega_t^{\varepsilon}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_y^{\varepsilon}\|^2,$$

то выражение (37) преобразуется к следующему виду:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2\right) + \|\omega_t^{\varepsilon}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_x^{\varepsilon}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_y^{\varepsilon}\|^2 = (\bar{f}(t,x,y), \omega_t^{\varepsilon}).$$

Применяя к правой части последнего выражения неравенство Коши и учитывая условия на входные данные, получим

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2\right) + \frac{d}{dt}\|\omega_x^{\varepsilon}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_y^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_9.$$

Проинтегрируем полученное неравенство от 0 до t и применим формулу Ньютона—Лейбница. Тогда справедливо неравенство

$$\varepsilon\Big(\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2\Big)(t) + \|\omega_x^{\varepsilon}\|^2(t) + \|\omega_y^{\varepsilon}\|^2(t) \leqslant \varepsilon\Big(\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2\Big)(0) + \|\omega_x^{\varepsilon}\|^2(0) + \|\omega_y^{\varepsilon}\|^2(0) + C_9T,$$

из которого с учетом условий на входные данные и неравенства Пуанкаре—Фридрихса следуют оценки

$$\|\omega_x^{\varepsilon}\| \leqslant C_{10}, \quad \|\omega_y^{\varepsilon}\| \leqslant C_{11}, \quad \|\omega^{\varepsilon}\| \leqslant C_{12}. \tag{38}$$

Умножим (20) скалярно на $\omega_{txx}^{\varepsilon}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon(\omega_{tt}^{\varepsilon}, \omega_{txx}^{\varepsilon}) + (\omega_t^{\varepsilon}, \omega_{txx}^{\varepsilon}) = (\omega_{xx}^{\varepsilon}, \omega_{txx}^{\varepsilon}) + (\omega_{yy}^{\varepsilon}, \omega_{txx}^{\varepsilon}) + (\bar{f}(t,x,y), \omega_{txx}^{\varepsilon}).$$

Это равносильно следующему выражению:

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2\right) + \|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_{xx}^{\varepsilon}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_{xy}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant \|f_x\|^2 + \|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2.$$

Таким образом, учитывая условия на входные данные, имеем:

$$\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2\right) + \|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_{xx}^{\varepsilon}\|^2 + \frac{d}{dt}\|\omega_{xy}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{13}.$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t, применяя формулу Ньютона—Лейбница и условия на входные данные, получим следующие оценки:

$$\|\omega_{xx}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{14}, \quad \|\omega_{yy}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{15}, \quad \|\omega_{tx}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{16}. \tag{39}$$

Из (39) и неравенства Пуанкаре—Фридрихса следует, что

$$\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{17}. \tag{40}$$

Умножая (20) скалярно на $\omega_{tyy}^{\varepsilon}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$ и применяя технику получения оценки (35), получим

$$\|\omega_{yy}^{\varepsilon}\|^2 \leqslant C_{18}. \tag{41}$$

Из (20), (38)—(41) следует, что

$$\|\omega^{\varepsilon}\|^2_{W_2^{2,1}} \leqslant C_{18}, \quad \|\omega^{\varepsilon}\|^2_{W_2^2} \leqslant C_{19}. \tag{42}$$

Заметим, что постоянная C_{19} зависит от $\varepsilon > 0 : C_{19} = C(\varepsilon)$. Оценка (42) позволяет доказать разрешимость задачи (20)—(24) в классе $W_2^2(Q_T)$, например, методом Галеркина.

Единственность решения задачи (20)—(24) доказывается стандартным образом, т.е. доказательством равенства нулю разности двух возможных решений. Умножим (20) скалярно на $\omega_{tt}^{\varepsilon}(t,x,y)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\varepsilon\|\omega_{tt}^{\varepsilon}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_t^{\varepsilon}\|^2 = (\omega_{xx}^{\varepsilon}, \omega_{tt}^{\varepsilon}) + (\omega_{yy}^{\varepsilon}, \omega_{tt}^{\varepsilon}) + (\bar{f}, \omega_{tt}^{\varepsilon}).$$

Проинтегрировав полученное равенство от 0 до t и применив к правой части полученного выражения формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и доказанные ранее оценки, получим неравенство

$$\varepsilon\|\omega^\varepsilon_{tt}\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant C_{20}. \tag{43}$$

Используя условия согласования, можно показать, что функции $u^\varepsilon(t,x,y)$, $g^\varepsilon(t,y)$ выражаются формулами

$$u^\varepsilon = \int\limits_{\bar{x}}^{x} \omega^\varepsilon(t,\eta,y)d\eta + \beta(t,y) - \beta(t,0) - \frac{y}{y_0}\big(\beta(t,y_0) - \beta(t,0)\big) - \\ - \bar{x}\mu_1(t,y) - \frac{\bar{x}^2}{2x_0}\big(\mu_2(t,y) - \mu_1(t,y)\big), \tag{44}$$

$$g^\varepsilon = \varepsilon\beta_{tt} + \beta_t - u^\varepsilon_{xx}(t,\bar{x},y) - \beta_{yy},$$

а функции $u(t,x,y)$, $g(t,y)$, являющиеся решениями предельной задачи, соответственно формулой

$$u = \int\limits_{\bar{x}}^{x} \omega(t,\eta,y)d\eta + \beta(t,y) - \beta(t,0) - \frac{y}{y_0}\big(\beta(t,y_0) - \beta(t,0)\big) - \\ - \bar{x}\mu_1(t,y) - \frac{\bar{x}^2}{2x_0}\big(\mu_2(t,y) - \mu_1(t,y)\big), \tag{45}$$

$$g(t,y) = \beta_t - u_{xx}(t,\bar{x},y) - \beta_{yy}.$$ □

Доказательство теоремы 2. Положим $\xi = \omega - \omega^\varepsilon$, где ω — решение задачи (25)—(28), а ω^ε — решение задачи (20)—(24). Тогда функция $\xi(t,x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_t = \xi_{xx} + \xi_{yy} + \varepsilon\omega^\varepsilon_{tt}, \tag{46}$$

начальному условию

$$\xi(0,x,y) = 0, \tag{47}$$

и граничным условиям

$$\xi(t,0,y) = \xi(t,x_0,y) = 0, \quad \xi(t,x,0) = \xi(t,x,y_0) = 0. \tag{48}$$

Умножим (46) на $\xi(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. Применяя к полученному выражению формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и учитывая однородные граничные условия (48), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + \|\xi_x\|^2 + \|\xi_y\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2\|\omega_{tt}\|^2 + \frac{1}{2}\|\xi_x\|^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + \|\xi_x\|^2 + 2\|\xi_y\|^2 \leqslant \varepsilon^2\|\omega_{tt}\|^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от 0 до t, учитывая однородное начальное условие (41) и оценку (43), получим

$$\|\xi\|^2 \leqslant C_{21}\varepsilon. \tag{49}$$

Умножим (46) на $\xi_{xx}(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. Применяя к полученному выражению формулу интегрирования по частям, неравенство Коши и учитывая однородные граничные условия (48) и (43), можно получить оценку

$$\|\xi_{xx}\| \leqslant C_{22}\sqrt{\varepsilon}. \tag{50}$$

Умножая (46) на $\xi_{xx}(t,x,y)$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и применяя технику получения оценок (44), (45), получим

$$\|\xi_{xx}\| \leqslant C_{22}\sqrt{\varepsilon}. \tag{51}$$

Из оценок (49)—(51) и формул (44), (45) следует утверждение теоремы 2. □

Отметим, что задача идентификации функции источника для уравнения Бюргерса [5,8] исследована в [6]. Задача определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности исследована в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра// Мат. сб. — 1948. — *22 (64)*, № 2. — С. 193–204.
2. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры// Мат. сб. — 1950. — *27 (69)*, № 1. — С. 97–111.
3. *Градштейн И. С.* Дифференциальные уравнения с малыми множителями при производных и теория устойчивости Ляпунова// Докл. АН СССР. — 1949. — *65 (6)*. — С. 789–792.
4. *Градштейн И. С.* Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных// Мат. сб. — 1950. — *27 (69)*, № 1. — С. 47–68.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
6. *Саватеев Е. Г.* О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1995. — *36*, № 1. — С. 177–185.
7. *Саватеев Е. Г., Слынько О. Н.* Корректность и качественные свойства задачи определения функции источника гиперболического уравнения теплопроводности// в кн.: Актуальные вопросы современной математики. — Новосибирск, 1995. — С. 134–142.
8. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t = uu_x = \mu u_{xx}$// Commun. Pure Appl. Math — 1950. — *3*. — P. 201–230.

Черепанова Ольга Николаевна
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `Ocherepanova@sfu-kras.ru`