ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 92–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-92-99

УДК 517.956.47

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. **Р. К. ТАГИЕВ, Ш. И. МАГЕРРАМЛИ**

Аннотация. В работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении старшего коэффициента многомерного параболического уравнения с нелокальными условиями. Старший коэффициент уравнения выполняет роль управляющей функции и является элементом пространства Соболева. Функционал цели составлен на основе условия переопределения, которое может быть интерпретировано как задание средневзвешенного значения решения рассматриваемого уравнения по временной переменной. Исследованы вопросы корректности постановки задачи в слабой топологии пространства управлений. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, интегральное граничное условие, корректность, необходимое условие оптимальности.

VARIATIONAL STATEMENT OF A COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

© 2022 **R. K. TAGIEV, Sh. I. MAHARRAMLI**

Abstract. In this paper, we consider the variational statement of an inverse problem of determining the leading coefficient of a multidimensional parabolic equation with nonlocal conditions. The leading coefficient of the equation playing the role of a control function is an element of the Sobolev space. The objective functional is based on the overdetermination condition, which can be interpreted as setting the weighted average value of the solution of the equation considered with respect to the time variable. The well-posedness of the problem in the weak topology of the control space is examined, the Fréchet differentiability of the objective functional is proved, and a necessary optimality condition is obtained.

***Keywords and phrases*:** inverse problem, parabolic equation, integral boundary condition, well-posedness, necessary optimality condition.

***AMS Subject Classification*:** 49K20, 35K20

1. Введение. Обратные задачи об определении коэффициентов уравнений в частных производных могут быть сформулированы в вариационной постановке, и для их решения можно использовать методы теории оптимального управления. При этом роль управляющих функций выполняют искомые коэффициенты рассматриваемых уравнений, а функционал цели (невязки) составляется на основе условия переопределения [13].

Вариационные постановки обратных задач об определении коэффициентов параболических уравнений при классических граничных условиях и локальных условиях переопределения рассмотрены в работах [1, 3–5, 14] и др. Однако такие задачи для параболических уравнений при нелокальных условиях наименее изучены [10, 11].

В данной работе рассматривается вариационная постановка обратной задачи об определении старшего коэффициента многомерного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Роль управляющей функции играет старший коэффициент уравнения, а функционал цели составлен на основе нелокального условия переопределения. Исследованы вопросы корректности постановки задачи. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности.

2. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, $S = S' \cup S''$, $T > 0$, — заданное число, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $S_T = S \times (0,T]$, $S'_T = S' \times (0,T]$, $S''_T = S'' \times (0,T]$.

Рассмотрим следующую коэффициентную обратную задачу для линейного многомерного параболического уравнения. Требуется найти пару функций $\{u(x,t), v(x)\}$, удовлетворяющую условиям:

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (v(x)u_{x_i})_{x_i} + a(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u|_{(x,t)\in S_T{}'} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} \equiv v(x)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\cos(\nu, x_i)\Big|_{(x,t)\in S''_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S''_T}, \tag{3}$$

$$v \in V = \Big\{ v = v(x) \in W_p^1(\Omega) : 0 < \mu_0 \leqslant v(x) \leqslant \mu_1, \ |v_{x_i}(x)| \leqslant d, \ i = \overline{1,n}, \text{ п.в. на } \Omega \Big\}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь $\mu_0, \mu_1, d > 0$, $N \geqslant 1$, $\alpha_i > 0$ $(i = \overline{1,N})$, t_i $(i = \overline{1,N})$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, $p > n$ (при $n \geqslant 2$) — заданные числа, ν — единичный вектор нормали к S'', $a(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $K(x,y,t)$, $\chi(x)$ — заданные измеримые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} |a(x,t)| \leqslant \mu_1, \text{ п.в. на } Q_T, \\ |K(x,y,t)| \leqslant \mu_2, \quad |K_t(x,y,t)| \leqslant \mu_3 \text{ п.в. на } S'' \times \Omega \times (0,T), \\ \varphi \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad f \in L_2(Q_T), \quad \chi \in L_2(\Omega), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\mu_2, \mu_3 > 0$ — заданные числа. Обозначения используемых в работе функциональных пространств и их норм соответствуют [7, с. 21—26]. Через $W_{2,0}^1(\Omega)$ (соответственно $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$, $W_{2,0}^1(Q_T)$) будем обозначать подпространства функций из $W_2^1(\Omega)$ (соответственно $V_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^1(Q_T)$), равных нулю на S' (соответственно на S'_T, S'_T).

Вариационная постановка обратной задачи (1)—(5) заключается в следующем. Требуется минимизировать функционал цели

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x) \right|^2 dx \tag{7}$$

при условиях (1)—(4). Ниже эту задачу будем называть задачей (1)—(4), (7). При этом множество V, определяемое условием (4), назовем множеством допустимых управлений, а функции $v = v(x)$ из V — допустимыми управлениями. Через $u(x,t;v)$ в (7) обозначим решение краевой задачи (1)—(3), соответствующее допустимому управлению $v = v(x)$.

Функционал цели (7) составлен на основе условия переопределения (5). Если в задаче (1)—(4), (7) окажется, что существует допустимое управление $v_* \in V$, доставляющее функционалу (7) нулевое значение, то пара $\{u(x,t;v_*), v_*(x)\}$ будет являться решением обратной задачи (1)—(5).

Условие переопределения (5) может быть интерпретировано как задание средневзвешенного значения $u(x,t)$ по переменной t. Если, в частности, $\alpha_i = 1/T$ $(i = \overline{1,N})$, то имеем условие суммарного среднего функции $u(x,t)$ по t.

Отметим, что коэффициентные обратные задачи в традиционной постановке для параболических уравнений при классических граничных условиях и интегральным условием переопределения изучены в [6, 8].

Пусть $v \in V$ — заданное допустимое управление. Тогда принадлежащая пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ функция $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ называется обобщенным решением из $V_2^{1,0}(Q_T)$ краевой задачи (1)—(3), соответствующим управлению v, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T}\left(-u\eta_t + v\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i} + au\eta\right)dxdt - \int\limits_{S_T''}\left[\int\limits_{\Omega} K(s,y,t)u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt =$$
$$= \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} f\eta dxdt \quad (8)$$

для всех $\eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^{1}(Q_T) = \{\eta : \eta \in W_{2,0}^{1}(Q_T),\ \eta(x,T) = 0,\ x \in \Omega\}$.

Используя метод Галеркина [7, с. 202—210], можно показать, что при каждом фиксированном $v \in V$ краевая задача (1)—(3) имеет единственное обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$. Это решение принадлежит также пространству $W_{2,0}^{1}(Q_T)$, и верна оценка [12]

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_1\left[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T}\right]. \quad (9)$$

Здесь и всюду ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений, обозначаем через $M_1, M_2, \ldots$.

3. Корректность постановки задачи. Следующая теорема показывает, что задача (1)—(4), (7) корректно поставлена в слабой топологии пространства $W_p^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи* (1)—(4), (7)*. Тогда множество оптимальных управлений задачи* (1)—(4), (7)

$$V_* = \left\{v_* \in V:\ J(v_*) = \inf\{J(v) : v \in V\}\right\}$$

не пусто, V_* — слабо компактно в $W_p^1(\Omega)$, и любая минимизирующая последовательность $\{v_k\} \subset V$ функционала (7) *в $W_p^1(\Omega)$ сходится слабо к множеству V_*.*

Доказательство. Покажем, что функционал (7) слабо в $W_p^1(\Omega)$ непрерывен на V. Пусть $v \in V$ — некоторый элемент, $\{v_k\} \subset V$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию

$$v_k(x) \to v(x) \text{ слабо в } W_p^1(\Omega) \quad \text{при } k \to \infty. \quad (10)$$

Тогда в силу компактности вложения $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ при $p > n$ [7, с. 78] имеем

$$v_k(x) \to v(x) \text{ слабо в } C(\overline{\Omega}). \quad (11)$$

Положим $u_k = u_k(x,t) = u(x,t;v_k)$. Тогда из (1)—(3), записанных при $u = u_k$, $v = v_k$, учитывая оценку (9), получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_k(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{kx}(x,t)\|_{2,\Omega} + \|u_{kt}\|_{2,Q_T} \leqslant M_2, \quad k = 1,2,\ldots. \quad (12)$$

В силу теоремы вложения [7, с. 78] из последовательности $\{u_k\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ (обозначим ее снова через $\{u_k\}$), что

$$u_k(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_{2,0}^{1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \quad (13)$$

$$u_k(x,t_i) \to u(x,t_i) \text{ сильно в } L_2(\Omega), \quad i=\overline{1,N}, \tag{14}$$

где $u=u(x,t)\in W^1_{2,0}(Q_T)$ — некоторый элемент.

Полагая в (8) $u=u_k$, $v=v_k$, имеем

$$\int\limits_{Q_T}\left[-u_k\eta_t + v_k\sum_{i=1}^n u_{kx_i}\eta_{x_i} + au_k\eta\right]dxdt - \int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_\Omega K(s,y,t)u_k(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt =$$
$$= \int\limits_\Omega \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} f\eta dxdt \quad \forall\eta=\eta(x,t)\in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T), \quad k=1,2,\ldots. \tag{15}$$

Проводя обычное преобразование с использованием неравенством Коши—Буняковского и соотношений (11)—(13), имеем

$$\left|\int\limits_{Q_T} v_k u_{kx_i}\eta_{x_i}dxdt - \int\limits_{Q_T} v u_{x_i}\eta_{x_i}dxdt\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{Q_T} v\big(u_{kx_i}-u_{x_i}\big)\eta_{x_i}dxdt + \int\limits_{Q_T}(v_k-v)u_{kx_i}\eta_{x_i}dxdt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int\limits_{Q_T} v\big(u_{kx_i}-u_{x_i}\big)\eta_{x_i}dxdt\right| + \|v_k-v\|_{C(\overline{\Omega})}\big\|u_{kx_i}\big\|_{2,Q_T}\big\|\eta_{x_i}\big\|_{2,Q_T} \to 0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского, ограниченность вложения

$$W^1_{2,0}(Q_T)\to L_2(S''_T)$$

и соотношения (13), получим

$$\left|\int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_\Omega K(s,y,t)u_k(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt - \int\limits_{S''_T}\left[\int\limits_\Omega K(s,y,t)u(y,t)dy\right]\eta(s,t)dsdt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_2(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}\|u_k-u\|_{2,Q_T}\|\eta\|_{2,S''_T} \leqslant \mu_2(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}M_3\|u_k-u\|_{2,Q_T}\|\eta\|^{(1)}_{2,Q_T} \to 0. \tag{17}$$

Переходя к пределу в (15) при $k\to\infty$ и учитывая соотношения (13), (16), (17), получаем, что функция $u=u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (8), т.е. $u(x,t)=u(x,t;v)$. Таким образом, соотношение (14) справедливо с функцией $u(x,t)=u(x,t;v)$:

$$u(x,t_i;v_k)\to u(x,t_i;v) \text{ сильно в } L_2(\Omega), \quad i=\overline{1,N}. \tag{18}$$

Теперь покажем, что $J(v_k)\to J(v)$ при $k\to\infty$. Используя равенство (7), нетрудно убедиться в том, что справедливо неравенство

$$|J(v_k)-J(v)| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha|\sum_{i=1}^N \big\|u(x,t_i;v_k)-u(x,t_i;v)\big\|_{2,\Omega}\left[|\alpha|\sum_{i=1}^N\Big(\|u(x,t_i;v_k)\|_{2,\Omega}+\|u(x,t;v)\|_{2,\Omega}\Big)+2\|\chi\|_{2,\Omega}\right],$$

где

$$|\alpha| = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2\right)^{1/2}.$$

Тогда, используя оценки (9), неравенство (12) и соотношение (18) для последовательности $\{v_k\}$, получаем, что $J(v_k) \to J(v)$ при $k \to \infty$, т.е. функционал (7) слабо непрерывен на V в $W_p^1(\Omega)$. Кроме того, множество V ограничено, замкнуто и выпукло в рефлексивном банаховом пространстве $W_p^1(\Omega)$ и поэтому оно слабо компактно в $W_p^1(\Omega)$ (см. [2, с. 51]). Применяя результат из [2, с. 49], заключаем, что теорема 1 верна. $\square$

4. Дифференцируемость функционала цели и необходимое условие оптимальности. Введем сопряженную краевую задачу для задачи (1)—(4), (7):

$$\psi_t + \sum_{i=1}^{n} \big(v(x)\psi_{x_i}\big)_{x_i} - a(x,t)\psi + \int\limits_{S''} K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$[\psi]|_{t=t_k} \equiv \psi(x,t_k+0) - \psi(x,t_k-0) = 2\alpha_k \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right], \quad k = \overline{1,N-1},$$

$$\psi(x,T) = -2\alpha_N \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right], \quad x \in \Omega, \tag{20}$$

$$\psi|_{(x,t)\in S'_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} = 0. \tag{21}$$

Под решением краевой задачи (19)—(21) понимаем обобщенное решение из $V_2^{1,0}(Q_T)$, т.е. функцию $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;v)$, принадлежащую пространству $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left[\psi\eta_t + v(x)\sum_{i=1}^{n}\psi_{x_i}\eta_{x_i} + a(x,t)\psi\eta - \int\limits_{S''} K(\xi,x,t)\psi(\xi,t)d\xi\cdot\eta\right]dxdt =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} 2\alpha_k \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right]\eta(x,t_k)dx \tag{22}$$

для всех

$$\eta = \eta(x,t) \in \breve{W}_{2,0}^{1}(Q_T) = \Big\{\eta : \eta \in W_{2,0}^{1}(Q_T),\ \eta(x,0) = 0,\ x \in \Omega\Big\}.$$

Можно показать, что при каждом заданном $v \in V$ краевая задача (19)—(21) имеет единственное обобщенное решение $\psi = \psi(x,t) = \psi(x,t;v)$ из $V_2^{1,0}(Q_T)$ и

$$|\psi|_{Q_T} \equiv \|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\psi(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\psi_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_4\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\right)\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right\|_{2,\Omega}.$$

Оценивая правую часть этого неравенства и учитывая (9), получаем

$$|\psi|_{Q_T} \leqslant M_5\Big[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|f\|_{2,Q_T} + \|\chi\|_{2,\Omega}\Big]. \tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функционал* (7) *непрерывно дифференцируем по Фреше на V, и его дифференциал в точке $v \in V$ с приращением $\Delta v \in W_p^1(\Omega)$, $v + \Delta v \in V$ определяется выражением*

$$dJ(u,\Delta v) = \langle J'(v),\Delta v\rangle_{W_p^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,t;v)\psi_{x_i}(x,t;v)dt\right)\Delta v(x)dx. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $v \in V$ — некоторая точка и $\Delta v \in W_p^1(\Omega)$ — произвольное приращение, удовлетворяющее условию $v + \Delta v \in V$. Положим $\Delta u(x,t) = u(x,t;v+\Delta v) - u(x,t;v)$. Из (1)—(3)

следует, что функция $\Delta u \in W^1_{2,0}(Q_T)$ является обобщенным решением из $W^1_2(Q_T)$ краевой задачи

$$\Delta u_t - \sum_{i=1}^{n} \big((v+\Delta v)\Delta u_{x_i}\big)_{x_i} + a\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \big(\Delta v u_{x_i}\big)_{x_i}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{25}$$

$$\Delta u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{26}$$

$$\Delta u\big|_{(x,t)\in S'_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial N}\right|_{(x,t)\in S''_T} = \left.\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\Delta u(y,t)dy\right|_{(x,t)\in S''_T}. \tag{27}$$

Ясно, что обобщенное решение задачи (25)—(27) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left(\Delta u_t \eta + \sum_{i=1}^{n}(v+\Delta v)\Delta u_{x_i}\eta_{x_i} + a\Delta u \eta\right) dxdt - \int\limits_{S''_T} \left[\int\limits_{\Omega} K(s,y,t)\Delta u(y,t)dy\right] \eta(s,t)dsdt =$$

$$= - \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i} dt\right) \Delta v dx \quad \forall \eta = \eta(x,t) \in W^{1,0}_{2,0}(Q_T) \tag{28}$$

и для него верна оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_6 \left\|\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\Delta v\right\|_{2,Q_T}. \tag{29}$$

Учитывая ограниченность вложения $W^1_p(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ и оценки (9), имеем

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\Delta v\right\|_{2,Q_T} \leqslant \|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})}\|u_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_7\|\Delta v\|^{(1)}_{p,\Omega}.$$

Отсюда и из (29) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u(x,t)\|_{2,\Omega} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\Delta u_x(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\Delta u_t\|_{2,Q_T} \leqslant M_8\|\Delta v\|^{(1)}_{p,\Omega}. \tag{30}$$

Приращение $\Delta J(v) = J(v+\Delta v) - J(v)$ функционала (7) представим в виде

$$\Delta J(v) = 2\int\limits_{\Omega} \left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right] \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta u(x,t_k)\right\} dx + \int\limits_{\Omega} \left|\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta u(x,t_k)\right|^2 dx. \tag{31}$$

Полагая $\eta = \Delta u$ в (22), $\eta = \psi$ в (28) и вычитая полученные равенства друг из друга, придем к равенству

$$2\int\limits_{\Omega} \left\{\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(x,t_i;v) - \chi(x)\right] \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta u(x,t_k)\right\} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\psi_{x_i} dt\right) \Delta v dx + \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} \Delta u_{x_i}\psi_{x_i} dt\right) \Delta v dx.$$

Подставляя это выражение в (31), получим

$$\Delta J(v) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\psi_{x_i} dt\right) \Delta v dx + R, \tag{32}$$

где

$$R = \int\limits_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta u(x, t_k) \right|^2 dx + \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} dt \right) \Delta v dx. \tag{33}$$

Первое слагаемое в правой части (32) при каждом заданном $v \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от Δv в $W_p^1(\Omega)$. Линейность очевидна. Используя неравенство Коши—Буняковского и ограниченность вложения $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, получаем оценку

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \psi_{x_i} dt \right) \Delta v dx \right| \leqslant \|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})} \|u_x\|_{2,Q_T} \|\psi_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_9 \|u_x\|_{2,Q_T} \|\psi_x\|_{2,Q_T} \|\Delta v\|_{W_p^1(\Omega)},$$

из которой в силу оценок (9), (23) следует ограниченность этого функционала. Кроме того, используя неравенство Коши—Буняковского, ограниченность вложения $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ и оценки (30) для функции Δu и для остаточного члена R, определяемого равенством (33), получаем оценку

$$\begin{aligned} |R| \leqslant \int\limits_{\Omega} \left| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \Delta u(x, t_k) \right|^2 dx + \left| \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} \Delta u_{x_i} \psi_{x_i} dt \right) \Delta v dx \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{N} \|\Delta u(x, t_k)\|_{2,\Omega}^2 + \|\Delta v\|_{C(\overline{\Omega})} \|\Delta u_x\|_{2,Q_T} \|\psi_x\|_{2,Q_T} \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 \cdot M_8^2 N \big(\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}\big)^2 + M_{10} \|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)} M_8 \|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)} \|\psi_x\|_{2,Q_T} \leqslant M_{11} \big(\|\Delta v\|_{p,\Omega}^{(1)}\big)^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (32) следует, что функционал (7) дифференцируем по Фреше на V, а его дифференциал определяется формулой (24). Используя формулы (24) и результаты [9], нетрудно показать, что отображение $J' \colon V \to (W_p^1(\Omega))^*$ непрерывно. Теорема 2 доказана. □

Следующая теорема вытекает из [2, с. 28, теорема 5] и формулы (24).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для оптимальности управления* $v_* \in V$ *в задаче* (1)—(4), (7) *необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^T \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x, t; v_*) \psi_{x_i}(x, t; v_*) dt \right) [v(x) - v_*(x)] dx \geqslant 0 \quad \forall v = v(x) \in V.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О. А., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988.
2. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
3. *Искендеров А. Д.* О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики// Докл. АН СССР. — 1984. — *274*, № 3. — С. 531–533.
4. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
5. *Кабанихин С. И., Даирбаева Г.* Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности// Тр. Междунар. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики», посв. 75-летию акад. М. М. Лаврентьева (Новосибирск, 2007). — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. — С. 1–5.
6. *Костин А. Б.* Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — *55*, № 1. — С. 89–104.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

8. *Прилепко А. И., Костин А. Б., Соловьев В. В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2017. — *17*, № 3. — С. 67–85.
9. *Тагиев Р. К.* Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах// Диффер. уравн. — 2009. — *45*, № 10. — С. 1492–1501.
10. *Тагиев Р. К., Касумов Р. А.* Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2017. — № 45. — С. 49–59.
11. *Тагиев Р. К., Магеррамли Ш. И.* Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. Физ. — 2020. — *12*, № 3. — С. 34–40.
12. *Тагиев Р. К., Магеррамли Ш. И.* О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием// Вестн. Бакинск. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2019. — № 2. — С. 17–26.
13. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 3. — С. 501–504.
14. *Iskenderov A. D., Tagiyev R. K.* Variational method of solving the problem of identification of the coefficients of a quasilinear parabolic problem// Proc. 7th Int. Conf. “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (IMPS-2014) (May 26–31, 2014, Ölüdeniz, Fethiye, Turkey), 2014. — P. 31.

Тагиев Рафиг Каландар оглы
Бакинский государственный университет
E-mail: r.tagiyev@list.ru

Магеррамли Шахла Илхам кызы
Бакинский государственный университет
E-mail: semedli.shehla@gmail.com