ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 73–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-73-83

УДК 517.9

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ В МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ СОСТАВНОГО ТИПА

© 2022 г. **Р. В. СОРОКИН, Т. Н. ШИПИНА**

Аннотация. В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи идентификации четырех коэффициентов при младших членах в многомерной системе составного типа в случае данных Коши.

Ключевые слова: задача идентификации коэффициентов, обратная задача, уравнение в частных производных, система составного типа, метод слабой аппроксимации.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF A PROBLEM OF IDENTIFYING LOWER COEFFICIENTS IN A MULTIDIMENSIONAL SYSTEM OF COMPOSITE TYPE

© 2022 **R. V. SOROKIN, T. N. SHIPINA**

Abstract. In this paper, we prove the existence and uniqueness theorem for a solution of the problem of determining four lower coefficients in a composite multidimensional system in the case of the Cauchy data.

Keywords and phrases: coefficient identification problem, inverse problem, partial differential equation, composite systems, weak approximation method.

AMS Subject Classification: 39A14

1. Введение. Системы составного типа, состоящие из параболического уравнения и уравнения первого порядка, описывают колебания среды с учетом влияния теплопроводности [3], а также различные линеаризованные задачи механики неоднородных жидкостей. Вопросы существования и единственности решения таких систем исследовались, например, в работах [4, 8].

В данной работе рассматривается задача идентификации четырех коэффициентов при младших членах уравнений системы. Предполагается, что по пространственным переменным задача является $(n+1)$-мерной. Аналогичная задача в одномерном случае в предположении независимости коэффициентов уравнений от пространственной переменной исследовалась в [2].

Основным методом, применяемым в работе при доказательстве разрешимости прямой задачи, является метод слабой аппроксимации (МСА), предложенный Н. Н. Яненко и А. А. Самарским [5], и затем получивший развитие в работах Ю. Я. Белова [1, 6] и других учеников и последователей.

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1388).

2. Постановка задачи. В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid t \in [0,T],\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$, $b_{11}(t,x)$, $b_{12}(t,x)$, $b_{21}(t,x)$, $b_{22}(t,x)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u^1_t(t,x,z) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(t,x,z)u^1_{x_i}(t,x,z) + a_1(t,x,z)u^1_z(t,x,z) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{1k}(t,x)u^k(t,x,z) = \\ \qquad = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i(t,x_i)u^1_{x_ix_i}(t,x,z) + \nu(t,z)u^1_{zz}(t,x,z) + f_1(t,x,z), \\ u^2_t(t,x,z) + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(t,x,z)u^2_{x_i}(t,x,z) + a_2(t,x,z)u^2_z(t,x,z) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{2k}(t,x)u^k(t,x,z) = \\ \qquad = f_2(t,x,z), \end{cases} \tag{1}$$

начальным условиям

$$u^k(0,x,z) = u^k_0(x,z), \quad k = 1,2 \tag{2}$$

и условиям переопределения

$$u^k(t,x,0) = \alpha_k(t,x), \quad u^k(t,x,l) = \beta_k(t,x), \quad k = 1,2. \tag{3}$$

Здесь l — некоторая фиксированная точка, $l \neq 0$. Считаем, что выполнены условия согласования

$$u^k_0(x,0) = \alpha_k(0,x), \quad u^k_0(x,l) = \beta_k(0,x), \quad k = 1,2. \tag{4}$$

Предполагаем, что $a_{ki}(t,x,z)$, $f_k(t,x,z)$, $u^k_0(x)$, $\alpha_k(t,x)$, $\beta_k(t,x)$, $\nu_i(t,x_i)$, $k = 1,2$, $i = 1,2,\ldots,n$, — заданные действительнозначные непрерывные в $G_{[0,T]}$ функции. Приведем обратную задачу (1)—(3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого положим в системе (1) $z = 0$, затем $z = l$. Получившиеся четыре уравнения рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2$ с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(t,x) & \alpha_2(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1(t,x) & \alpha_2(t,x) \\ \beta_1(t,x) & \beta_2(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1(t,x) & \beta_2(t,x) \end{vmatrix} = -(\alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x))^2.$$

Предположим, что

$$|\alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x)| \geqslant \delta > 0, \quad t \in [0,T], \quad \delta = \text{const}. \tag{5}$$

Условие (5) гарантирует существование единственных решений $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2$. Разрешая полученную систему методом Крамера, получаем

$$\begin{aligned} b_{11}(t,x) &= A_1u^1_{zz}(t,x,0) + A_2u^1_z(t,x,0) + A_3u^1_{zz}(t,x,l) + A_4u^1_z(t,x,l) + A_5, \\ b_{12}(t,x) &= B_1u^1_{zz}(t,x,l) + B_2u^1_z(t,x,l) + B_3u^1_{zz}(t,x,0) + B_4u^1_z(t,x,0) + B_5, \\ b_{21}(t,x) &= C_1u^2_z(t,x,0) + C_2u^2_z(t,x,l) + C_3, \\ b_{22}(t,x) &= D_1u^2_z(t,x,l) + D_2u^2_z(t,x,0) + D_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\gamma(t,x) = \alpha_1(t,x)\beta_2(t,x) - \alpha_2(t,x)\beta_1(t,x),$$
$$A_1(t,x) = \frac{\nu(t,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)}, \qquad A_2(t,x) = \frac{-a_1(t,x,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)},$$
$$A_3(t,x) = \frac{-\nu(t,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)}, \qquad A_4(t,x) = \frac{a_1(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$A_5(t,x) = \frac{1}{\gamma(t,x)}\left(\beta_2(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n} \nu_i(t,x_i)(\alpha_1(t,x))\right)_{x_ix_i} - \sum_{i=0}^{n} a_{1i}(t,x,0)(\alpha_1(t,x))_{x_i} - (\alpha_1(t,x))_t + \right.$$

$$+f_1(t,x,0)-\alpha_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\beta_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,l)(\beta_1(t,x))_{x_i}-(\beta_1(t,x))_t+f_1(t,x,l)\Bigg),$$

$$B_1(t,x)=\frac{\nu(t,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\qquad B_2(t,x)=\frac{-a_1(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$
$$B_3(t,x)=\frac{-\nu(t,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad B_4(t,x)=\frac{a_1(t,x,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$B_5(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\alpha_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\beta_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,l)(\beta_1(t,x))_{x_i}-(\beta_1(t,x))_t+$$
$$+f_1(t,x,l)-\beta_1(t,x)\left(\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)(\alpha_1(t,x))\right)_{x_ix_i}-\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,0)(\alpha_1(t,x))_{x_i}-(\alpha_1(t,x))_t+f_1(t,x,0),$$

$$C_1(t,x)=\frac{-a_2(t,x,0)\beta_2(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad C_2(t,x)=\frac{-a_2(t,x,l)\alpha_2(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$C_3(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\beta_2(t,x)\left(f_2(t,x,0)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,0)((\alpha_2(t,x))_{x_i}-(\alpha_2(t,x))_t\right)-$$
$$-\alpha_2(t,x)\left(f_2(t,x,l)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,l)((\beta_2(t,x))_{x_i}-(\beta_2(t,x))_t\right)\Bigg),$$

$$D_1(t,x)=\frac{-a_2(t,x,l)\alpha_1(t,x)}{\gamma(t,x)},\quad D_2(t,x)=\frac{a_2(t,x,0)\beta_1(t,x)}{\gamma(t,x)},$$

$$D_3(t,x)=\frac{1}{\gamma(t,x)}\Bigg(\alpha_1(t,x)\left(f_2(t,x,l)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,l)(\beta_2(t,x))_{x_i}-(\beta_2(t,x))_t\right)-$$
$$-\beta_1(t,x)\left(f_2(t,x,0)-\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,0)(\alpha_2(t,x))_{x_i}-(\alpha_2(t,x))_t\right)\Bigg).$$

Заметим, что $A_j(t,x)$, $B_j(t,x)$, $C_j(t,x)$, $D_j(t,x)$, $j=1,\ldots,4,$ — известные функции, а $\gamma(t,x)$ не обращается в ноль в силу условия (5). Подставляя полученные выражения в (1), приходим к следующей прямой задаче:

$$\begin{cases} u_t^1(t,x,z)+\sum_{i=0}^{n}a_{1i}(t,x,z)u_{x_i}^1(t,x,z)+a_1(t,x,z)u_z^1(t,x,z)+\\ \qquad +u^1(t,x,z)\Big(A_1u_{zz}^1(t,x,0)+A_2u_z^1(t,x,0)+A_3u_{zz}^1(t,x,l)+A_4u_z^1(t,x,l)+A_5\Big)+\\ \qquad +u^2(t,x,z)\Big(B_1u_{zz}^1(t,x,l)+B_2u_z^1(t,x,l)+B_3u_{zz}^1(t,x,0)+B_4u_z^1(t,x,0)+B_5\Big)=\\ \qquad\qquad =\sum_{i=0}^{n}\nu_i(t,x_i)u_{x_ix_i}^1(t,x,z)+\nu(t,z)u_{zz}^1(t,x,z)+f_1(t,x,z), \\ u_t^2(t,x,z)+\sum_{i=0}^{n}a_{2i}(t,x,z)u_{x_i}^2(t,x,z)+a_2(t,x,z)u_z^2(t,x,z)+\\ \qquad +u^1(t,x,z)\Big(C_1u_z^2(t,x,0)+C_2u_z^2(t,x,l)+C_3\Big)+\\ \qquad +u^2(t,x,z)\Big(D_1u_z^2(t,x,l)+D_2u_z^2(t,x,0)+D_3\Big)=f_2(t,x,z), \end{cases} \tag{7}$$

$$u^k(0,x,z) = u_0^k(x,z), \quad k=1,2. \tag{8}$$

Ниже докажем классическую разрешимость задачи (7)—(8).

3. Теорема существования решения. Для доказательства существования решения задачи (7)—(8) применим метод слабой аппроксимации [1]. Расщепим задачу на $n+2$ шага и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(n+2)$-м временном слое:

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{11}(t,x,z)u_{x_1}^{1\tau} + (n+2)\nu_1(t,x_1)u_{x_1x_1}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{21}(t,x,z)u_{x_1}^{2\tau}, \quad s\tau < t \leqslant \left(s+\dfrac{1}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{12}(t,x,z)u_{x_2}^{1\tau} + (n+2)\nu_2(t,x_2)u_{x_2x_2}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{22}(t,x,z)u_{x_2}^{2\tau}, \quad \left(s+\dfrac{1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s+\dfrac{2}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{10}$$

. . . .

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_{1n}(t,x,z)u_{x_n}^{1\tau} + (n+2)\nu_n(t,x_n)u_{x_nx_n}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_{2n}(t,x,z)u_{x_n}^{2\tau}, \quad \left(s+\dfrac{n-1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s+\dfrac{n}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)a_1(t,x,z)u_z^{1\tau} + (n+2)\nu(t,z)u_{zz}^{1\tau}, \\ u_t^{2\tau} = -(n+2)a_2(t,x,z)u_z^{2\tau}, \quad \left(s+\dfrac{n}{n+2}\right)\tau < t \leqslant \left(s+\dfrac{n+1}{n+2}\right)\tau, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau} = -(n+2)u^1(t,x,z)\Bigg(A_1u_{zz}^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + A_2u_z^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + \\ \quad + A_3u_{zz}^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + A_4u_z^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + A_5\Bigg) - \\ \quad - (n+2)u^2(t,x,z)\Bigg(B_1u_{zz}^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + B_2u_z^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + \\ \quad + B_3u_{zz}^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + B_4u_z^1\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + B_5\Bigg) + f_1(t,x,z), \\ u_t^2 = -(n+2)u^1(t,x,z)\Bigg(C_1u_z^2\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + C_2u_z^2\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + C_3\Bigg) - \\ \quad - (n+2)u^2(t,x,z)\Bigg(D_1u_z^2\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,l\right) + D_2u_z^2\left(t-\dfrac{\tau}{n+2},x,0\right) + D_3\Bigg) + \\ \quad + (n+2)f_2(t,x,z), \qquad \left(s+\dfrac{n+1}{n+2}\right)\tau < t \leqslant (s+1)\tau, \end{cases} \tag{13}$$

$$u^k(0,x,z) = u_0^k(x,z), \quad k=1,2. \tag{14}$$

Здесь $s = 0,1,\ldots,S-1$, $\tau S = T$. Отметим, что на первых $n+1$ шагах решаются задачи Коши для параболических уравнений и уравнений первого порядка в частных производных. На $n+2$ дробном шаге решается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем следующие обозначения:

$$U^\tau(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{6} U_{k_1,k_2}^{k\tau}(t), \tag{15}$$

$$U_{k_1,k_2}^{k\tau}(t) = \max_{|\alpha|=k_1}\sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\sup_{x\in E_n z\in E_1}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u^{k\tau}(\eta,x,z)\right|, \tag{16}$$

$$U_{k_1,k_2}^{k}(0) = \max_{|\alpha|=k_1}\sup_{x\in E_n z\in E_1}\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}D_x^\alpha u_0^{k}(x,z)\right|, \tag{17}$$

где

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad k = 1, 2.$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им:

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha a_{ki}(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha f^k(t,x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha u_0^k(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \nu(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x_i^{k_1}} \nu_i(t,x_i)\right| + \\ + |D_x^\alpha(\alpha_k(t,x))| + |D_x^\alpha(\beta_k(t,x))| + |D_x^\alpha(\alpha_k(t,x))_t| + |D_x^\alpha(\beta_k(t,x))_t| \leqslant C, \quad (18)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2$, $k_2 = 0, 1, \ldots, 6$, $k_1, |\alpha| = 1, 2, \ldots, 4$.

Получим априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $u^{1\tau}(t,x,z)$, $u^{2\tau}(t,x,z)$ задачи (9)—(14) в классе непрерывных функций. Для уравнений, решаемых на первых $n+1$ временных шагах, а именно уравнений в частных производных первого порядка и параболических уравнений, процесс получения оценок, гарантирующих сходимость метода слабой аппроксимации показан в [7]. Следуя предложенному в [7] алгоритму, получим, учитывая обозначения (15)—(17) и условия(18)

$$U^\tau(t) \leqslant e^{M\tau} U(0), \quad 0 < t \leqslant \frac{n+1}{n+2}\tau. \quad (19)$$

Здесь и далее под обозначением M будем понимать константы, зависящие от величин C в (18), δ в (5) и размерности задачи n. При этом константы M не зависят от параметра расщепления τ. Исследуем систему (13) на нулевом шаге (при $s = 0$). Проинтегрируем уравнения системы (13) в пределах от $\dfrac{n+1}{n+2}\tau$ до t. Используя неравенство треугольника, получим

$$|u^{1\tau}| \leqslant \left|u^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau, x, z\right)\right| + (n+2)\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t} \Bigg(|u^1(\eta,x,z)|\Bigg(|A_1|\left|u^1_{zz}\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + \\ + |A_2|\left|u^1_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |A_3|\left|u^1_{zz}\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |A_4|\left|u^1_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |A_5|\Bigg) + \\ + |u^2(\tau,x,z)||B_1|\left|u^1_{zz}\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + |B_2|\left|u^1_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + \\ + |B_3|\left|u^1_{zz}\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |B_4|\left|u^1_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |B_5|\Bigg) + |f_1(\eta,x,z)|\Bigg) d\eta,$$

$$|u^{2\tau}| \leqslant \left|u^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau, x, z\right)\right| + (n+2)\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t} \Bigg(|u^1(\eta,x,z)|\Bigg(|C_1|\left|u^2_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + \\ + |C_2|\left|u^2_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right) + C_3\right)\Bigg| + |u^2(\eta,x,z)|\Bigg(|D_1|\left|u^2_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, l\right)\right| + \\ + |D_2|\left|u^2_z\left(\eta - \frac{\tau}{n+2}, x, 0\right)\right| + |D_3|\Bigg) + |f_2(\eta,x,z)|\Bigg) d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Возьмем $\sup\limits_{0 \leqslant \eta \leqslant t} \sup\limits_{x \in E_n, z \in E_1}$ от правых, а затем левых частей неравенств. Учитывая обозначения (15)—(17) и условия на входные данные (5), (18), приходим к соотношениям

$$U_{0,0}^{1\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right) + M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\right.$$

$$\left.+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\right)d\eta,$$

$$U_{0,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right) + M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\right)+$$

$$+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Сложив данные неравенства, получим

$$U_{0,0}^{1\tau}(t)+U_{0,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{0,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{0,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\Big(\big(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta)\big)$$

$$\left(U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Продифференцируем (13) по x_i, затем проинтегрируем полученные уравнения в пределах от $\dfrac{n+1}{n+2}\tau$ до t. Возьмем $\sup\limits_{0\leqslant\eta\leqslant t}$ $\sup_{x\in E_n, z\in E_1}$ от правых, а затем левых частей неравенств. Учитывая обозначения (15)—(17) и условия на входные данные задачи, после суммирования неравенств получим

$$U_{1,0}^{1\tau}(t)+U_{1,0}^{2\tau}(t) \leqslant U_{1,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{1,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+$$

$$+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)+U_{1,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+$$

$$+(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\right.$$

$$\left.+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau.$$

Дифференцируя (13) по x_i, а затем s раз по z и делая аналогичные преобразования, получим

$$U_{1,s}^{1\tau}(t)+U_{1,s}^{2\tau}(t) \leqslant U_{1,s}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{1,s}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+$$

$$+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{1,s}^{1\tau}(\eta)+U_{1,s}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+$$

$$+(U_{0,s}^{1\tau}(\eta)+U_{0,s}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\right.$$

$$\left.+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta, \quad \frac{n+1}{n+2}\tau < t \leqslant \tau, \quad s=0,1,\ldots,6.$$

Дифференцируя (13) по x_i, а затем по x_j, получим

$$
\begin{gathered}
U_{2,0}^{1\tau}(t)+U_{2,0}^{2\tau}(t)\leqslant U_{2,0}^{1\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+U_{2,0}^{2\tau}\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+\\
+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(U_{2,0}^{1\tau}(\eta)+U_{2,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\\
+(U_{0,0}^{1\tau}(\eta)+U_{0,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\right.\\
+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{2,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\\
\left.+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)\left(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\right.\\
+U_{0,0}^{1\tau}(\eta)\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+\\
+(U_{1,0}^{1\tau}(\eta)+U_{1,0}^{2\tau}(\eta))\left(U_{0,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+U_{1,2}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+\\
\left.+U_{1,1}^{1\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{0,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+U_{1,1}^{2\tau}\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)+1\Big)d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.
\end{gathered}
$$

Продолжая аналогичные рассуждения, последовательно дойдем до производных по x D_x^α, $|\alpha|=4$ и производной по z до шестого порядка. Суммируя все полученные неравенства, имеем

$$
U^\tau(t)\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U^\tau(\eta)\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.
$$

В силу того, что функция $U^\tau(t)$ на любом полуинтервале $(s\tau,(s+1)\tau]$ неотрицательна и монотонна, приходим к неравенству

$$
\begin{gathered}
U^\tau(t)\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}\left(U^\tau(\eta)\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)+1\right)d\eta\leqslant\\
\leqslant U\left(\frac{n+1}{n+2}\tau\right)+M\left(1+U^\tau\left(\eta-\frac{\tau}{n+2}\right)\right)\int\limits_{\frac{n+1}{n+2}\tau}^{t}(1+U^\tau(\eta))d\eta,\quad \frac{n+1}{n+2}\tau<t\leqslant\tau.
\end{gathered}
$$

Учитывая (19), на нулевом целом временном шаге получим

$$
U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}U(0)+M(1+e^{M\tau}U(0))\int\limits_0^t(1+U^\tau(\eta))d\eta,\quad 0<t\leqslant\tau.
$$

После применения неравенства Гронуолла

$$
U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}-1,\quad 0<t\leqslant\tau.
$$

Для того чтобы получить оценку функции $U^\tau(t)$ на первом шаге ($\tau<t\leqslant 2\tau$), нужно в полученном неравенстве взять вместо величины $U(0)$ величину $e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}-1$:

$$
U^\tau(t)\leqslant e^{M\tau}\left(e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}\right)\exp\left(e^{M\tau}\left(e^{M\tau}(U(0)+1)e^{e^{M\tau}(1+U(0))\tau}\right)\tau\right)-1,\quad \tau<t\leqslant 2\tau.
$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{M\tau}e^{e^{M\tau}(U(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$U^\tau(t) \leqslant e^{2M\tau}(U(0)+1)e^{e^{3M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad \tau < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге при условии

$$e^{2M\tau}e^{e^{3M\tau}(U(0)+1)\tau} \leqslant 2$$

имеет место оценка

$$U^\tau(t) \leqslant e^{3M\tau}(U(0)+1)e^{e^{5M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad 2\tau < t \leqslant 3\tau,$$

и так далее. На s-м шаге ($s < N$) получим неравенство

$$U^\tau(t) \leqslant e^{(s+1)M\tau}(U(0)+1)e^{e^{(2s+1)M\tau}(1+U(0))\tau} - 1, \quad s\tau < t \leqslant (s+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t^*, $0 < t^* \leqslant T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{Mt^*}e^{e^{2Mt^*}(U(0)+1)} \leqslant 2.$$

В последнем неравенстве предполагается, что $\tau \leqslant 1$. Заметим, что t^* не зависит от τ, поскольку константы M и $U(0)$ не зависят от τ. Таким образом, с учетом неравенств, полученных на предыдущих временных шагах, справедлива оценка

$$U^\tau(t) \leqslant e^{Mt^*}(U(0)+1)e^{e^{2Mt^*}(1+U(0))} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t^*.$$

Получили равномерную по τ оценку

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha u^{k\tau}(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \quad |\alpha| \leqslant 4, \quad k = 1,2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,6. \tag{20}$$

Легко заметить, что в силу (18), (20) правые части уравнений (9), (13) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t^*]$. Следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$\left|u_t^{1\tau}(t,x,z)\right| + |u_t^{2\tau}(t,x,z)| \leqslant C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{21}$$

Дифференцируя уравнения (9), (13) по переменным x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ и z необходимое число раз, можем доказать равномерные по τ оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_2+1}}{\partial z^{k_2}\partial t} D_x^\alpha u^{k\tau}(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,4, \quad k = 1,2, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]},$$

что вместе с (20), (21) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности. В силу теоремы Арцела некоторые подпоследовательности $u^{1\tau_k}(t,x,z)$, $u^{2\tau_k}(t,x,z)$ последовательностей $u^{1\tau}(t,x,z)$, $u^{2\tau}(t,x,z)$ решений задачи (9)—(14) сходятся вместе с производными по x до второго, и по z до четвертого порядка включительно к функциям $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$. В силу теоремы о сходимости метода слабой аппроксимации [1] функции $u^1(t,x,z)$, $u^2(t,x,z)$ есть решение задачи (7)—(8), причем $u^k(t,x,z) \in C^{1,2,4}_{t,x,z}$, где

$$C^{1,k_1,k_2}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t,x,z) : u_t, \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u(t,x,z) \in C(G_{[0,t^*]}),\ k = 0,1,\ldots,k_2;\ |\alpha| \leqslant k_1\right\}.$$

При $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$ справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha u^k(t,x,z)\right| \leqslant C, \quad |\alpha| \leqslant 2, \quad k = 1,2, \quad k_2 = 0,1,\ldots,4, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}. \tag{22}$$

Таким образом, доказана разрешимость задачи (7)—(8). Докажем теперь, что решение исходной обратной задачи (1)—(3) выражается через решение задачи (7)—(8). Поскольку $u^k(t,x,z)$, $k = 1,2,$ — решение прямой задачи (7)—(8), то, подставляя $u^k(t,x,z)$, $b_{mk}(t,x)$, $m,k = 1,2,$

в (1)—(2), мы получим верное тождество. В силу (5), (18), (22) очевидно, что функции $u^k(t,x,z)$, $k=1,2$, $b_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, принадлежат классу

$$Z_{[0,t^*]} = \{u^k(t,x,z), b_{mk}(t,x) \mid u^k \in C^{1,2,4}_{t,x,z},\ b_{mk} \in C^{0,2}_{t,x},\ m,k=1,2\}$$

и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k_2=0}^{4} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} D_x^\alpha u^k(t,x,z) \right| + \sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D_x^\alpha b_{mk}(t,x)| \leqslant C. \tag{23}$$

Осталось доказать, что для функций $u^k(t,x,z)$, $k=1,2$, выполняется условие переопределения (3). Положим в системе (7) $z=0$, получим

$$\begin{cases} u_t^1(t,x,0) - \alpha_t^1(t,x) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{1i}(t,x,0) u^1_{x_i}(t,x,0) + a_1(t,x,0)u^1_z(t,x,0) \\ \quad + \Big(u^1(t,x,0) - \alpha^1(t,x)\Big)\Big(A_1 u^1_{zz}(t,x,0) + A_2 u^1_z(t,x,0) + A_3 u^1_{zz}(t,x,l) + A_4 u^1_z(t,x,l) + A_5\Big) + \\ \quad + \Big(u^2(t,x,0) - \alpha^2(t,x)\Big)\Big(B_1 u^1_{zz}(t,x,l) + B_2 u^1_z(t,x,l) + B_3 u^1_{zz}(t,x,0) + B_4 u^1_z(t,x,0) + B_5\Big) = \\ \quad = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \nu_i(t,x_i) u^1_{x_i x_i}(t,x,0) + \nu(t,0) u^1_{zz}(t,x,0) + f_1(t,x,0), \\ u_t^2(t,x,0) - \alpha_t^2(t,x) + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i}(t,x,0) u^2_{x_i}(t,x,0) + a_2(t,x,0)u^2_z(t,x,0) + \\ \quad + \Big(u^1(t,x,0) - \alpha^1(t,x)\Big)\Big(C_1 u^2_z(t,x,0) + C_2 u^2_z(t,x,l) + C_3\Big) + \\ \quad + \Big(u^2(t,x,0) - \alpha^2(t,x)\Big)\Big(D_1 u^2_z(t,x,l) + D_2 u^2_z(t,x,0) + D_3\Big) = f_2(t,x,0). \end{cases} \tag{24}$$

Обозначим $g_1(t,x) = u^1(t,x,0) - \alpha^1(t,x)$, $g_2(t,x) = u^2(t,x,0) - \alpha^2(t,x)$. С учетом условий согласования (4), функции $g_1(t,x)$, $g_2(t,x)$ являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} g_{1t}(t,x) = \lambda^1(t,x) g_1(t,x) + \lambda^2(t,x) g_2(t,x), & g_1(t,x) = 0, \\ g_{2t}(t,x) = \lambda^1(t,x) g_1(t,x) + \lambda^2(t,x) g_2(t,x), & g_2(t,x) = 0, \end{cases}$$

где $\lambda^1(t,x)$, $\lambda^2(t,x)$ — функции, выражающиеся через коэффициенты системы (1) и производные по x функций $u_1(t,x,z)$, $u_2(t,x,z)$ при $x=0$ и $x=l$. Очевидно, что $g_k(t,x) \equiv 0$, $k=1,2$, является единственным решением системы, следовательно, $u^1(t,x,0) = \alpha_1(t,x)$, $u^2(t,x,0) = \alpha_2(t,x)$ при $t \in [0,T]$, и мы доказали выполнение первой пары условий переопределения (3). Полагая $x=l$ в системе (7) и повторяя рассуждения, приведенные выше, с учетом условий согласования (4), получаем, что $u^1(t,x,0) = \beta_1(t,x)$, $u^2(t,x,0) = \beta_2(t,x)$ при $t \in [0,T]$. Таким образом, доказали выполнение второй пары условий переопределения (3), и разрешимость задачи (1)—(3) полностью доказана.

4. Доказательство единственности решения. Докажем единственность решения задачи (1)—(3) при условии выполнения (18), (23). Пусть $U = (u^1(t,x,z),\ u^2(t,x,z),\ b_{mk}(t,x))$, $\widetilde{U} = (\widetilde{u}^1(t,x,z), \widetilde{u}^2(t,x,z), \widetilde{b}_{mk}(t,x))$, $m,k=1,2$,— два различных решения задачи (1)—(3). Введем функции

$$\omega^k(t,x,z) = u^k(t,x,z) - \widetilde{u}^k(t,x,z), \quad \varphi_{mk}(t,x) = b_{mk}(t,x) - \widetilde{b}_{mk}(t,x), \quad m,k=1,2.$$

Функции $\omega^k(t,x,z)$, $\varphi_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \omega^1_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(t,x,z)\omega^1_{x_i}(t,x,z)+a_1(t,x,z)\omega^1_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^{2} b_{1k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+ \\ \qquad +\varphi_{11}(t,x)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\varphi_{12}(t,x)\widetilde{u}^2(t,x,z)=\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i(t,x_i)\omega^1_{x_ix_i}(t,x,z)+\nu(t,z)\omega^1_{zz}(t,x,z), \\ \omega^2_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(t,x,z)\omega^2_{x_i}(t,x,z)+a_2(t,x,z)\omega^2_z(t,x,z)+ \\ \qquad +\sum\limits_{k=1}^{2} b_{2k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+\varphi_{21}(t,x)\widetilde{u}^1(t,x,z)+\varphi_{22}(t,x)\widetilde{u}^2(t,x,z)=0, \end{cases} \tag{25}$$

начальным условиям

$$\omega^k(0,x,z)=0, \quad k=1,2 \tag{26}$$

и условиям переопределения

$$\omega^k(t,x,0)=0, \quad \omega^k(t,x,l)=0, \quad k=1,2. \tag{27}$$

Рассмотрим уравнения системы (25) при $x=0$, $x=l$ с учетом (26)—(27). Разрешая систему полученных четырех уравнений относительно $\varphi_{mk}(t,x)$, $m,k=1,2$, и подставляя полученные выражения в (25), приходим к прямой задаче определения пары функции $\omega^1(t,x,z)$, $\omega^2(t,x,z)$:

$$\begin{cases} \omega^1_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(t,x,z)\omega^1_{x_i}(t,x,z)+a_1(t,x,z)\omega^1_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^{2} b_{1k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+ \\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(\Big(\nu(t,0)\omega^1_{zz}(t,x,0)-a_1(t,x,0)\omega^1_z(t,x,0)\Big)\widetilde{\beta}_2(t,x)- \\ \qquad -\Big(\nu(t,l)\omega^1_{zz}(t,x,l)-a_1(t,x,l)\omega^1_z(t,x,l)\Big)\widetilde{\alpha}_2(t,x)\Big)\widetilde{u}^1(t,x,z)+ \\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(\Big(\nu(t,l)\omega^1_{zz}(t,x,l)-a_1(t,x,l)\omega^1_z(t,x,l)\Big)\widetilde{\beta}_1(t,x)- \\ \qquad -\Big(\nu(t,0)\omega^1_{zz}(t,x,0)-a_1(t,x,0)\omega^1_z(t,x,0)\Big)\widetilde{\alpha}_1(t,x)\Big)\widetilde{u}^2(t,x,z)= \\ \qquad =\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i(t,x_i)\omega^1_{x_ix_i}(t,x,z)+\nu(t,z)\omega^1_{zz}(t,x,z), \\ \omega^2_t(t,x,z)+\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(t,x,z)\omega^2_{x_i}(t,x,z)+a_2(t,x,z)\omega^2_z(t,x,z)+\sum\limits_{k=1}^{2} b_{2k}(t,x)\omega^k(t,x,z)+ \\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(-a_2(t,x,0)\omega^2_z(t,x,0)\widetilde{\beta}_2(t,x)+a_2(t,x,l)\omega^2_z(t,x,l)\widetilde{\alpha}_2(t,x)\Big)\widetilde{u}^1(t,x,z)+ \\ \qquad +\dfrac{1}{\widetilde{\gamma}(t,x)}\Big(-a_2(t,x,l)\omega^2_z(t,x,l)\widetilde{\beta}_1(t,x)+a_2(t,x,0)\omega^2_z(t,x,0)\widetilde{\alpha}_1(t,x)\Big)\widetilde{u}^2(t,x,z)=0, \end{cases} \tag{28}$$

$$\omega^k(0,x,z)=0, \quad k=1,2. \tag{29}$$

Здесь

$$\widetilde{\gamma}(t,x)=\widetilde{\alpha}_1(t,x)\widetilde{\beta}_2(t,x)-\widetilde{\alpha}_2(t,x)\widetilde{\beta}_1(t,x).$$

Покажем, что $\omega^1(t,x,z)=\omega^2(t,x,z)=0$. Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g^k_r(t)=\sup_{G[0,t]}\left|\frac{\partial^r}{\partial z^r}\omega^{k\tau}(\xi,x,z)\right|, \quad k=1,2, \quad r=0,1,2.$$

Учитывая оценки (5), (23), в силу принципа максимума для уравнений системы (28) получим

$$\begin{cases} |\omega^1(\xi,x,z)|\leqslant Ce^{C\xi}(g^1_1(t)+g^1_2(t)+g^2_0(t))t, \\ |\omega^2(\xi,x,z)|\leqslant Ce^{C\xi}(g^2_1(t)+g^1_0(t))t, \quad (\xi,x,z)\in G[0,t], \quad 0\leqslant t\leqslant t^*. \end{cases}$$

Здесь и далее C — это некоторые различные константы. В силу неотрицательности функций $g_r^k(t)$

$$\begin{cases} g_0^1(t) \leqslant C(g_1^1(t) + g_2^1(t) + g_0^2(t))t, \\ g_0^2(t) \leqslant C(g_1^2(t) + g_0^1(t))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \end{cases}$$

Дифференцируя (28) по z, учитывая оценки (5), (23), получим

$$\begin{cases} g_r^1(t) \leqslant C(g_1^1(t) + g_2^1(t) + g_r^2(t))t, \\ g_r^2(t) \leqslant C(g_1^2(t) + g_r^1(t))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*, \quad r = 1, 2. \end{cases}$$

Сложив полученные неравенства и усилив их, придем к неравенствам

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{r=0}^{2} g_r^k(t) \leqslant C \sum_{k=0}^{2}\sum_{r=0}^{2} g_r^k(t)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{30}$$

Отсюда следует, что при $t \in [0, \xi]$, где $\xi < 1/C$, справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} g_r^k(t) \equiv 0,$$

следовательно,

$$\omega^k(t, x, z) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad (t, x, z) \in G_{[0,\xi]}.$$

Рассуждая аналогично, для $t \in [\xi, 2\xi]$ получим, что $\omega^k(t, x, z) \equiv 0$, $k = 1, 2$, $(t, x, z) \in G_{[0,2\xi]}$. Через конечное число шагов докажем, что $\omega^k(t, x, z) \equiv 0$, $k = 1, 2$, при $(t, x, z) \in G_{[0,t^*]}$. В силу того, что $\varphi_{mk}(t, x)$ выражаются через $\omega^k(t, x, 0)$, $\omega^k(t, x, l)$, получаем $\varphi_{mk}(t, x) = 0$, $m, k = 1, 2$, при $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5), (18). *Тогда существует и единственно решение* $u^1(t, x, z)$, $u^2(t, x, z)$, $b_{11}(t, x)$, $b_{12}(t, x)$, $b_{21}(t, x)$, $b_{22}(t, x)$ *задачи* (1)—(3) *в классе* $Z_{[0,t^*]}$, *удовлетворяющее соотношению* (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. — Красноярск: КрасГУ, 1999.
2. *Вячеславова П. Ю., Сорокин Р. В.* Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа// Ж. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2009. — *2*, № 3. — С. 288–297.
3. *Рихтмайер Р. Д.* Звук и теплопроводность// в кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: Наука, 1966. — С. 183–185.
4. *Сорокин Р. В., Шипина Т. Н.* Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае// Вычисл. технологии. — 2004. — *9*, № 3. — С. 59–68.
5. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967.
6. *Belov Yu. Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. — Utrecht: VSP, 2002.
7. *Belov Yu. Ya.* On estimates of solutions of the split problems for some multi-dimensional partial differential equations// Ж. Сиб. Федер. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2009. — *2*, № 3. — С. 258–270.
8. *Belov Yu. Ya., Shipina T. N.* The problem of determining the source function for a system of composite type// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 1998. — *6*, № 4. — P. 287–308.

Сорокин Роман Викторович
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `rsorokin@sfu-kras.ru`

Шипина Татьяна Николаевна
Сибирский федеральный университет, Красноярск
E-mail: `tshipina@sfu-kras.ru`