ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 43–49
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-43-49

УДК 517.956.2

О СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2022 г. **Е. А. ГОЛОВКО**

Аннотация. В работе исследована задача Дирихле в полупространстве для эллиптической по Петровскому системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями, зависящими от трех независимых переменных. Найдены условия нарушения нётеровости задачи в конкретном полупространстве. Показано, что из сильной связанности системы не следует нарушение нётеровости задачи Дирихле во всяком полупространстве.

Ключевые слова: многомерная эллиптическая система, сильно связанные системы, задача Дирихле, многомерный аналог система Бицадзе, нарушение нётеровости.

ON STRONGLY COUPLED MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEMS

© 2022 **E. A. GOLOVKO**

Abstract. The article investigates the Dirichlet problem in a half-space for an elliptic system as per Petrovsky of three equations with three unknown functions depending on three independent variables. Conditions for violation of the Noetherian property of the problem in a concrete half-space are found. It is shown that the strong connectedness of the system does not imply the violation of the Noetherian property of the Dirichlet problem in any half-space.

Keywords and phrases: multidimensional elliptic system, strongly coupled systems, Dirichlet problem, multidimensional analog of the Bitsadze system, violation of the Noether property.

AMS Subject Classification: 35J57

1. Введение. В настоящее время еще не решена задача гомотопической классификации многомерных эллиптических по Петровскому систем, поставленная еще на третьем Всесоюзном математическом съезде в 1958 году [2]. При этом хорошо разработана теория эллиптических по Петровскому систем уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Эллиптические по Петровскому системы уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными А. В. Бицадзе разделил на два класса: сильно связанные и слабо связанные. Для слабо связанных систем задача Дирихле всегда нётерова, а для сильно связанных систем нётеровость задачи Дирихле и других классических граничных задач нарушается. Определение сильно связанной эллиптической системы уравнений с двумя независимыми переменными и с постоянными коэффициентами дается через структуру общего решения системы и не выражается явно через коэффициенты системы [1]

Известно, что для сильно связанных систем с двумя независимыми переменными всегда нарушается нётеровость задачи Дирихле. А. И. Янушаускас положил это свойство в основу обобщения понятия сильной связанность на многомерный случай [4].

ISSN 2782–4438

Определение 1. Эллиптическую по Петровскому систему уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами называют сильно связанной, если существует полупространство, в котором задача Дирихле для этой системы не является нётеровой.

Нарушение нётеровости задачи Дирихле для эллиптической системы заключается в том, что однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений, либо для разрешимости неоднородной задачи на граничные данные необходимо наложить бесконечное множество условий типа условий ортогональности.

Одним из ещё не до конца исследованных вопросов теории многомерных эллиптических систем является вопрос о том, как влияет структура системы на разрешимость задачи Дирихле и как зависит разрешимость этой задачи от области, в которой рассматривается система.

Среди многомерных систем хорошо изучена система, которую называют многомерным аналогом системы Бицадзе:

$$-\Delta u_j + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Установлено, что при $\lambda \neq 2$ задача Дирихле в любом полупространстве разрешима для любых дифференцируемых граничных данных и её решение единственно. Если $\lambda = 2$, то однородная задача Дирихле для однородной системы в полупространстве имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Таким образом, система при $\lambda = 2$ сильно связана, а при $\lambda \neq 2$ не является таковой [3].

Автором рассматриваются более общие системы, в которых параметр λ заменен матрицей. Одной из таких систем является следующая система трех уравнений с тремя неизвестными функциями, зависящими от трех независимых переменных:

$$\begin{aligned} &-\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) = 0,\\ &-\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) = 0,\\ &-\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Для этой системы рассмотрена задача Дирихле в полупространстве $E : \{z > 0\}$. Показано, что при выполнении условий

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - 1} \tag{2}$$

однородная задача Дирихле в рассматриваемом полупространстве имеет бесконечное множество линейно независимых решений, зависящих от одной произвольной функции переменных x и y. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо потребовать выполнения условия, которое нельзя заменить никаким конечным числом условий типа условий ортогональности. Таким образом, условия (2) гарантируют сильную связанность системы (1). Однако эта система может быть сильно связанной и при нарушении условий (2), так как нетеровость задачи Дирихле может быть нарушена в другом полупространстве, а не обязательно в полупространстве $E : \{z > 0\}$.

2. Задача Дирихле. Рассмотрим задачу Дирихле для системы (1) в следующей постановке: найти регулярные в полупространстве $D : \{x > 0\}$ решения системы (1), удовлетворяющие на границе этого полупространства $\Gamma : \{x = 0\}$ условиям

$$u\big|_{x=0} = f_1(y,z), \quad v\big|_{x=0} = f_2(y,z), \quad w\big|_{x=0} = f_3(y,z). \tag{3}$$

Введем обозначение

$$u_x + v_y + w_z = H. \tag{4}$$

Тогда система (1) перепишется в виде

$$-\Delta u + \lambda_1 H_x = 0, \quad -\Delta v + \lambda_2 H_y = 0, \quad -\Delta w + \lambda_3 H_z = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем уравнения системы (5) по x, y и z соответственно и сложим результаты дифференцирований:

$$(\lambda_1 - 1)H_{xx} + (\lambda_2 - 1)H_{yy} + (\lambda_3 - 1)H_{zz} = 0. \tag{6}$$

Если λ_1, λ_2, λ_3 попарно различны, то H не является гармонической функцией. Далее задачу будем решать с помощью преобразования Фурье.

Пусть $\widetilde{H}(x, \eta, \zeta)$ — преобразование Фурье для функции $H(x, y, z)$ по переменным y и z. Применяя преобразование Фурье по переменным y и z к уравнению (6), получим

$$\lambda_1 - 1)\widetilde{H}_{xx} - (\lambda_2 - 1)\eta^2\widetilde{H} - (\lambda_3 - 1)\zeta^2\widetilde{H}_{zz} = 0,$$

или

$$\widetilde{H}_{xx} - \frac{\eta^2(\lambda_2 - 1) + \zeta^2(\lambda_3 - 1)}{\lambda_1 - 1}\widetilde{H} = 0. \tag{7}$$

Введя обозначение

$$\frac{\eta^2(\lambda_2 - 1) + \zeta^2(\lambda_3 - 1)}{\lambda_1 - 1} = \rho_1^2, \tag{8}$$

перепишем уравнение (7) в виде

$$\widetilde{H}_{xx} - \rho_1^2\widetilde{H} = 0.$$

Ограниченные на бесконечности решения последнего уравнения имеют вид

$$\widetilde{H} = C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}, \tag{9}$$

где $C(\eta, \zeta)$ — произвольная функция.

Применим преобразование Фурье по переменным y, z к системе (5). Найдем сначала H_x, H_y, H_z. Учитывая (9), имеем

$$\begin{aligned}
H_x &\to \widetilde{H}_x = -\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\
H_y &\to i\eta\widetilde{H} = i\eta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\
H_z &\to i\zeta\widetilde{H} = i\zeta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}.
\end{aligned}$$

Тогда в терминах преобразования Фурье система (5) примет вид

$$\begin{aligned}
-\widetilde{u}_{xx} + \eta^2\widetilde{u} + \zeta^2\widetilde{u} + \lambda_1\widetilde{H}_x &= 0; \\
-\widetilde{v}_{xx} + \eta^2\widetilde{v} + \zeta^2\widetilde{v} + i\eta\lambda_2\widetilde{H} &= 0; \\
-\widetilde{w}_{xx} + \eta^2\widetilde{w} + \zeta^2\widetilde{w} + i\zeta\lambda_3\widetilde{H} &= 0.
\end{aligned}$$

Введя обозначение

$$\eta^2 + \zeta^2 = \rho^2, \tag{10}$$

перепишем последнюю систему последнюю систему в виде

$$\begin{aligned}
-\widetilde{u}_{xx} + \rho^2\widetilde{u} &= \lambda_1\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\
-\widetilde{v}_{xx} + \rho^2\widetilde{v} &= \lambda_2 i\eta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}; \\
-\widetilde{w}_{xx} + \rho^2\widetilde{w} &= \lambda_3 i\zeta C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что каждое из уравнений системы (11) содержит только одну неизвестную функцию. Решим каждое уравнение отдельно. Первое уравнение

$$-\widetilde{u}_{xx} + \rho^2\widetilde{u} = \lambda_1\rho_1 C(\eta, \zeta)e^{-\rho_1 x}.$$

является линейным уравнением второго порядка. Его общее решение имеет вид

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}_{oo} + \widetilde{u}^*,$$

где $\widetilde{u}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $\widetilde{u}^*$ — частное решение неоднородного уравнения. С учетом того, что интересуемся ограниченными на бесконечности решениями, общее решение однородного уравнения можно записать так:

$$\widetilde{u}_{oo} = A_1(\eta, \zeta)e^{-\rho x},$$

где $A_1(\eta,\zeta)$ — произвольная функция.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$\widetilde{u}^* = B(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Чтобы определить функцию $B(\eta,\zeta)$, подставим $\widetilde{u}^*$ в рассматриваемое уравнение:

$$B(\eta,\zeta)(\rho_1^2 e^{-\rho_1 x} - \rho^2 e^{-\rho x}) + \rho^2 B(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}) = \lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$B(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}(\rho^2 - \rho_1^2) = \lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x},$$

откуда

$$B(\eta,\zeta) = \frac{\lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)}{\rho^2 - \rho_1^2}.$$

Тогда

$$u^* = \frac{\lambda_1\rho_1 C(\eta,\zeta)}{\rho^2 - \rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Общее решение первого уравнения системы (11) имеет вид

$$\widetilde{u} = A_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2 - \rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Рассмотрим второе уравнение системы (11):

$$-\widetilde{v}_{xx} + \rho^2\widetilde{v} = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}.$$

Его общее решение представимо в виде

$$\widetilde{v} = \widetilde{v}_{oo} + \widetilde{v}^*,$$

где $\widetilde{v}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, $\widetilde{v}^*$ — частное решение неоднородного уравнения.

Ограниченное на бесконечности общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$\widetilde{v}_{oo} = A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x},$$

где $A_2(\eta,\zeta)$ — произвольная функция. Частное решение неоднородного уравнения запишем в виде

$$\widetilde{v}^* = D(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Тогда из рассматриваемого уравнения находим

$$D(\eta,\zeta)(\rho_1^2 e^{-\rho_1 x} - \rho^2 e^{-\rho x}) + \rho^2 D(\eta,\zeta)(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}) = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x};$$
$$D(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x}(\rho^2 - \rho_1^2) = \lambda_2 i\eta C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x},$$

откуда

$$D(\eta,\zeta) = \frac{\lambda_2 C(\eta,\zeta)\eta i}{\rho^2 - \rho_1^2}.$$

Следовательно,

$$v^* = \frac{\lambda_2 C(\eta,\zeta)\eta i}{\rho^2 - \rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x})$$

и общее решение второго уравнения системы (11) имеет вид

$$\widetilde{v} = A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2 - \rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Аналогично находится общее решение третьего уравнения системы (11):

$$\widetilde{w} = A_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2 - \rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).$$

Таким образом, общее решение системы (11) представимо в виде

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} &= A_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}),\\
\widetilde{v} &= A_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}),\\
\widetilde{w} &= A_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}),
\end{aligned}\tag{12}$$

где $A_1(\eta,\zeta)$, $A_2(\eta,\zeta)$, $A_3(\eta,\zeta)$, $C(\eta,\zeta)$ — произвольные функции. Три из этих функций легко находятся из граничных условий (3) исходной задачи. Применим к условиям (3) преобразование Фурье по переменным y, z:

$$\widetilde{u}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_1(\eta,\zeta), \quad \widetilde{v}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_2(\eta,\zeta), \quad \widetilde{w}\big|_{x=0} = \widetilde{f}_3(\eta,\zeta). \tag{13}$$

Подставив решения (12) в условия (13), найдем $A_1(\eta,\zeta)$, $A_2(\eta,\zeta)$, $A_3(\eta,\zeta)$:

$$A_1(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_1(\eta,\zeta), \quad A_2(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_2(\eta,\zeta), \quad A_3(\eta,\zeta) = \widetilde{f}_3(\eta,\zeta). \tag{14}$$

Тогда решение системы (11), удовлетворяющее граничным условиям (14), имеет вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} &= \widetilde{f}_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}),\\
\widetilde{v} &= \widetilde{f}_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}),\\
\widetilde{w} &= \widetilde{f}_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}).
\end{aligned}\tag{15}$$

В этом решении содержится еще одна произвольная функция $C(\eta,\zeta)$. Для ее определения используем условие связи (4), предварительно применив к нему преобразование Фурье

$$\widetilde{H} = \widetilde{u}_x + i\eta\widetilde{v} + i\zeta\widetilde{w}. \tag{16}$$

Подставляя в равенство (16) функции, определенные по формулам (9) и (15), получим уравнение для определения функции $C(\eta,\zeta)$

$$\begin{aligned}
C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x} = -\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_1\rho_1}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x}) -&\\
- i\eta\left(\widetilde{f}_2(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_2\eta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x})\right) -&\\
- i\zeta\left(\widetilde{f}_3(\eta,\zeta)e^{-\rho x} + C(\eta,\zeta)\frac{\lambda_3\zeta i}{\rho^2-\rho_1^2}(e^{-\rho_1 x} - e^{-\rho x})\right)&.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
C(\eta,\zeta)e^{-\rho_1 x} = -e^{-\rho x}(-\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta) - i\eta\widetilde{f}_2(\eta,\zeta) - i\zeta\widetilde{f}_3(\eta,\zeta)) +&\\
+ C(\eta,\zeta)\left\{\frac{-\lambda_1\rho_1^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right\}e^{-\rho_1 x} +&\\
+ C(\eta,\zeta)\left(\frac{\lambda_1\rho_1\rho + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right)e^{-\rho x}&.
\end{aligned}\tag{17}$$

Используя формулы (8) и (10), преобразуем числитель выражения, стоящего в фигурных скобках.

$$\begin{aligned}-\lambda_1\rho_1^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2 &= -\frac{\eta^2(\lambda_2-1)\lambda_1+\zeta^2(\lambda_3-1)\lambda_1}{\lambda_1-1}+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=\\ &=\frac{\lambda_1(\eta^2+\zeta^2)-\lambda_2\eta^2-\lambda_3\zeta^2+\eta^2+\zeta^2-\eta^2-\zeta^2}{\lambda_1-1}=\\ &=\frac{(\lambda_1-1)(\eta^2+\zeta^2)-(\lambda_2-1)\eta^2-(\lambda_3-1)\zeta^2}{\lambda_1-1}=\\ &=\frac{(\lambda_1-1)(\eta^2+\zeta^2)}{\lambda_1-1}-\frac{(\lambda_2-1)\eta^2+(\lambda_3-1)\zeta^2}{\lambda_1-1}=\rho^2-\rho_1^2.\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{-\lambda_1\rho_1^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}=\frac{\rho^2-\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1.$$

Или

$$\frac{-\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}+\frac{\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2}{\rho^2-\rho_1^2}\equiv 1+\frac{\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}. \tag{18}$$

Учитывая соотношение (18), уравнение (16) преобразуется к виду

$$C(\eta,\zeta)\left(\frac{\lambda_1\rho_1\rho}{\rho^2-\rho_1^2}-\frac{-\rho^2+\rho_1^2-\lambda_1\rho_1^2}{\rho^2-\rho_1^2}\right)=-\rho\widetilde{f}_1(\eta,\zeta)-i\eta\widetilde{f}_2(\eta,\zeta)-i\zeta\widetilde{f}_3(\eta,\zeta).$$

После преобразований получим

$$((\lambda_1-1)(\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2)-\lambda_1(\eta^2+\zeta^2))C(\eta,\zeta)=\widetilde{F}, \tag{19}$$

где $\widetilde{F}=(-\rho f_1-i\eta f_2-i\zeta f_3)((\lambda_1-1)\rho_1-\rho)(\rho-\rho_1)$. Пусть $C(\eta,\zeta)$ — преобразование Фурье некоторой функции w. Применяя к уравнению (19) обратное преобразование Фурье, получим

$$w_{yy}(\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_2)+w_{zz}(\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_3)=F, \tag{20}$$

где F — известная функция, выражающаяся через функции f_1, f_2, f_3 из граничных условий (3).

3. Заключение. Если рассматривается однородная задача Дирихле, то функции f_1, f_2, f_3, а следовательно, и функция F тождественно равны нулю. Уравнение (20) в этом случае является однородным.

Если все коэффициенты уравнения (20) равны нулю, т.е.

$$\lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_2=0,\quad \lambda_1-(\lambda_1-1)\lambda_3=0,$$

то однородное уравнение, соответствующее уравнению (20), а следовательно, и однородная задача Дирихле для системы (1), будут иметь бесконечное множество линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо на данные задачи наложить условие

$$\Delta\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(\alpha_2,\alpha_3)d\alpha_2\cdot d\alpha_3}{\sqrt{(y-\alpha_2)^2+(z-\alpha_3)^2}}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0,$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным y и z.

Итак, при выполнении условий

$$\lambda_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1},\quad \lambda_3=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}. \tag{21}$$

нётеровость рассматриваемой задачи нарушается в полупространстве D. Условия (21) являются условиями сильной связанности системы (1), но они не совпадают с условиями (2). Таким образом, из сильной связанности системы, вообще говоря, не следует нарушение нётеровости задачи Дирихле во всяком полупространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
2. *Гельфанд И. М., Петровский И. Г., Шилов Г. Е.* Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными// Труды третьего всесоюзного математического съезда. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — *3*. — С. 5–72.
3. *Черняева Т. Н.* Решение не сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных/// Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — Иркутск, 2015. — *2(46)*. — С. 29–32.
4. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

Головко Елена Анатольевна
Иркутский государственный университет
E-mail: elena-golovko@mail.ru