



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 212 (2022). С. 30–42
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-30-42

УДК 517.977, 534.112

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ СМЕЩЕНИЕМ НА ДВУХ КОНЦАХ С ЗАДААННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

© 2022 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Рассматривается задача граничного управления для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями, с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Управление осуществляется смещением на двух концах струны. Предложен конструктивный подход построения граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными начальными, конечными условиями и с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Проведен вычислительный эксперимент с построением соответствующих графиков и их сравнительный анализ, которые подтверждают полученные результаты.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, многоточечные промежуточные состояния, разделение переменных.

THE PROBLEM OF BOUNDARY CONTROL OF VIBRATIONS OF A STRING BY DISPLACEMENTS AT TWO ENDS WITH GIVEN STATES AT INTERMEDIATE TIME MOMENTS

© 2022 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA

ABSTRACT. The boundary control problem is considered for the equation of string vibration with given initial and final conditions, with given values of the deflection function and velocities of points at different intermediate times. The control is carried out by displacement at the two string ends. We propose a constructive approach for constructing boundary control of string vibrations by displacement at two ends with given initial and final conditions and values of the deflection function and velocities of points given at different intermediate times. A computational experiment was carried out with the construction of the corresponding graphs and their comparative analysis, which confirmed the results obtained.

Keywords and phrases: vibrations control, boundary control, multipoint intermediate states, variable separation.

AMS Subject Classification: 93C10, 93C95, 70Q05

1. Введение. Управляемые колебательные процессы широко исследуются в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению

Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №. AAAA-A21-121012090034-3).

которой уделяют внимание многие исследователи [1–3, 5–7, 9, 10, 12–15]. На практике часто возникают задачи граничного управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т. д.) колебания. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. Исследованиям таких задач посвящены, в частности, работы [4, 5, 11–15]. Данная работа примыкает к работам [5, 14, 15].

Цель данной работы состоит в разработке конструктивного подхода построения функции граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени.

2. Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления.

В уравнении (1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$):

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы значения функции прогиба и значения скоростей точек струны

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}. \quad (5)$$

Здесь предполагается, что m — четное число.

Задача граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, требуется найти управления, переводящие систему из заданного начального состояния (2), удовлетворяя промежуточным условиям (4) и (5), в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6)$$

Предполагается, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$. Будем предполагать, что функции $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$, $i = 0, 2\alpha - 1, m + 1$ при $\alpha = 1, \dots, m/2$, а $\psi_j(x) \in C^1[0, l]$, $j = 0, 2\alpha, m + 1$ при $\alpha = 1, \dots, m/2$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования:

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu(t_i) = \varphi_i(0), \quad \dot{\mu}(t_j) = \psi_j(0), \quad \nu(t_i) = \varphi_i(l), \quad \dot{\nu}(t_j) = \psi_j(l), \\ i = 2\alpha - 1, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l). \quad (9)$$

Отметим, что в постановке задачи значения функции прогиба (4) и значения скоростей точек струны (5) можно задавать в любой очередности для промежуточных моментов времени и от этого не зависит применяемый подход.

Отметим также, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$) заданы или только значения функции прогиба (4), или только значения производной функции прогиба (5) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления нецелесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Так как граничные условия (3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями.

Решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (10)$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция с однородными граничными условиями

$$V(0, t) = V(l, t) = 0, \quad (11)$$

требуемая определения, а $W(x, t)$ — решение уравнения (1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t). \quad (12)$$

Функция $W(x, t)$ имеет вид

$$W(x, t) = (\nu(t) - \mu(t))\frac{x}{l} + \mu(t). \quad (13)$$

Подставив (10) в (1) и учитывая (13), получим уравнение для функции $V(x, t)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (14)$$

где

$$F(x, t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t))\frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \quad (15)$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (2), (4)–(6), функция $V(x, t)$ должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) - (\nu(0) - \mu(0))\frac{x}{l} - \mu(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\dot{\nu}(0) - \dot{\mu}(0))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(0), \quad (16)$$

промежуточным условиям

$$\begin{aligned} V(x, t_i) &= \varphi_i(x) - (\nu(t_i) - \mu(t_i))\frac{x}{l} - \mu(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_j} &= \psi_j(x) - (\dot{\nu}(t_j) - \dot{\mu}(t_j))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \quad (17)$$

и конечным условиям

$$V(x, T) = \varphi_T(x) - (\nu(T) - \mu(T))\frac{x}{l} - \mu(T), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\dot{\nu}(T) - \dot{\mu}(T))\frac{x}{l} - \dot{\mu}(T). \quad (18)$$

Следовательно, с учетом условий (7)–(9), условия (16)–(18) запишутся следующим образом:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0))\frac{x}{l} - \varphi_0(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0))\frac{x}{l} - \psi_0(0), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} V(x, t_i) &= \varphi_i(x) - (\varphi_i(l) - \varphi_i(0))\frac{x}{l} - \varphi_i(0), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_j} &= \psi_j(x) - (\psi_j(l) - \psi_j(0))\frac{x}{l} - \psi_j(0), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
V(x, T) &= \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0)) \frac{x}{l} - \varphi_T(0), \\
\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0)) \frac{x}{l} - \psi_T(0).
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, решение задачи сведено к задаче управления (14), (15) с граничными условиями (11), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ при $0 \leq t \leq T$, переводящие колебание, описываемое уравнением (14) с граничными условиями (11), из заданного начального состояния (19) через промежуточные состояния (20) в конечное состояние (21).

4. Решение задачи. Учитывая, что граничные условия (11) однородны и выполнены условия согласованности, согласно теории рядов Фурье, решение уравнения (14) ищем в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \tag{22}$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 3$) и $\psi_i(x)$ ($i = 0, 2, 3$) в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x, t)$ в уравнения (14), (15) и в условия (19)–(21), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l} \right)^2, \quad F_k(t) = \frac{2a}{\lambda_k l} [\ddot{\nu}(t)(-1)^k - \ddot{\mu}(t)], \tag{23}$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \tag{24}$$

$$V_k(t_1) = \varphi_k^{(1)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_1(0), \quad \dot{V}_k(t_2) = \psi_k^{(2)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_2(0), \tag{25}$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0), \tag{26}$$

где через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, 3$) и $\psi_k^{(i)}$ ($i = 0, 2, 3$) обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(x, t)$, $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 3$) и $\psi_i(x)$ ($i = 0, 2, 3$).

Общее решение уравнения (23) с начальными условиями (24) и его производная по времени имеют вид

$$\begin{aligned}
V_k(t) &= V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \\
\dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k(t - \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь, учитывая промежуточные (25) и конечные (26) условия, используя подходы, приведенные в работе [4], и в соответствии с условиями согласованности (7)–(9), из (27) получим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}(T), \\
\int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}(T), \\
\int_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(i)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\int_0^T \mu(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k g_k^{(j)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k} \right], \\ \tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k} \right], \\ \tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} - (-1)^k Y_{1k}^{(i)} \right], \\ \tilde{C}_{1k}(t_i) &= \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_i - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_i, \\ C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} - (-1)^k Y_{2k}^{(j)} \right], \\ \tilde{C}_{2k}(t_j) &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t_j, \\ h_k^{(i)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} \quad g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T, \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k T, & X_{2k} &= \psi_T(0) - \psi_0(0) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(0) \sin \lambda_k T, \\ Y_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k T, & Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k t_i, & Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k t_i, \\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(0) - \psi_0(0) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(0) \sin \lambda_k t_j, & Y_{2k}^{(j)} &= \psi_j(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{H}_k(\tau) &= \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(1)}(\tau) \\ g_k^{(2)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(2)}(\tau) \\ \vdots & \vdots \\ h_k^{(m-1)}(\tau) & (-1)^{k+1} h_k^{(m-1)}(\tau) \\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ C_{2k}(t_2) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_{m-1}) \\ C_{2k}(t_m) \end{pmatrix}, \\ U(\tau) &= \begin{pmatrix} \mu(\tau) \\ \nu(\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда соотношение (28) запишется следующим образом

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau) U(\tau) d\tau = C_k(t_1, \dots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Следовательно, для нахождения функции $U(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получаются бесконечные интегральные соотношения (30).

На практике выбираются первые n гармоник колебаний и решается задача синтеза управления, используя методы теории управления конечномерными системами [4, 6, 8]. Для первых n гармоник

введем следующие обозначения блочных матриц

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \dots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \dots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \dots, t_m, T) \end{pmatrix} \quad (31)$$

с размерностями $(n(m+2) \times 2)$ и $(n(m+2) \times 1)$ соответственно. Для первых n гармоник с учетом (31) из (30) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau) U_n(\tau) d\tau = \eta_n \quad (32)$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы n будет означать — «для первых n гармоник»).

Из (32) следует, что первые n гармоник системы (23) с условиями (24)–(26) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n (31) можно найти управление $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (32).

Для произвольного числа первых гармоник управляющее воздействие $U_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (32), имеет вид [4, 8]

$$U_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t), \quad (33)$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — некоторая вектор-функция и такая, что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt. \quad (34)$$

Здесь $H_n(t) H_n^T(t)$ — внешнее произведение, S_n — известная матрица размерностью $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Подставляя (33) в (23), а найденное для $F_k(t)$ выражение — в (27), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (22) будем иметь

$$V_n(x, t) = \sum_{k=1}^n V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad (35)$$

а с помощью (10) функция прогиба струны $Q_n(x, t)$ для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n(x, t) = V_n(x, t) + W_n(x, t), \quad (36)$$

где

$$W_n(x, t) = (\nu_n(t) - \mu_n(t)) \frac{x}{l} + \mu_n(t). \quad (37)$$

Отметим, что приведенный подход решения позволяет рассматривать задачу граничного управления и для тех случаев, когда в отдельные промежуточные моменты времени заданы только или значения прогиба, или скорости точек струны при различных последовательностях.

5. Построение решения в случае $m = 2$. Для иллюстрации вышеизложенного предположим, что в некоторые промежуточные моменты времени t_1 и t_2 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$) заданы состояние (прогиб) и скорость точек струны в виде:

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_2} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

В этом случае из формулы (28) будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau) (-1)^k \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T),$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}(T), \\ \int_0^T \mu(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k h_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_1), \\ \int_0^T \mu(\tau) g_k^{(2)}(\tau) d\tau - \int_0^T \nu(\tau)(-1)^k g_k^{(2)}(\tau) d\tau &= C_{2k}(t_2), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_k^{(1)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k(t_1 - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ 0, & t_1 < \tau \leq T, \end{cases} \quad g_k^{(2)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_2 - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_2, \\ 0, & t_2 < \tau \leq T, \end{cases} \\ C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} - (-1)^k Y_{1k} \right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} - (-1)^k Y_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_1) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)} - (-1)^k Y_{1k}^{(1)} \right], \quad C_{2k}(t_2) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(t_2) + X_{2k}^{(2)} - (-1)^k Y_{2k}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k} , X_{2k} , $X_{1k}^{(1)}$, $X_{2k}^{(2)}$, $Y_{1k}^{(1)}$, $Y_{2k}^{(2)}$ определяются из формулы (29).

Пусть $n = 1$ (т.е. $k = 1$). Тогда, согласно (31), будем иметь

$$H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1(T - \tau) & \sin \lambda_1(T - \tau) \\ \cos \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) \\ h_1^{(1)}(\tau) & h_1^{(1)}(\tau) \\ g_1^{(2)}(\tau) & g_1^{(2)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_1 = C_1(t_1, t_2, T) = \begin{pmatrix} C_{11}(T) \\ C_{21}(T) \\ C_{11}(t_1) \\ C_{21}(t_2) \end{pmatrix},$$

а из (34) получим

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^T H_1(\tau) H_1^T(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & s_{13}^{(1)} & s_{14}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & s_{24}^{(1)} \\ s_{31}^{(1)} & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & s_{34}^{(1)} \\ s_{41}^{(1)} & s_{42}^{(1)} & s_{43}^{(1)} & s_{44}^{(1)} \end{pmatrix} = 2 \int_0^T \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_1(T - \tau) & \rightarrow \\ \sin \lambda_1(T - \tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & \rightarrow \\ h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) & \rightarrow \\ g_1^{(2)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) & \rightarrow \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} \sin \lambda_1(T - \tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) & g_1^{(2)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) \\ \cos^2 \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & g_1^{(2)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) \\ h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & (h_1^{(1)}(\tau))^2 & h_1^{(1)}(\tau) g_1^{(2)}(\tau) \\ g_1^{(2)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) g_1^{(2)}(\tau) & (g_1^{(2)}(\tau))^2 \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Элементы матрицы S_1 вычисляются с учетом обозначения (29), при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$. Обозначим

$$\hat{S}_1 = S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} & \hat{s}_{14} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{24} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} \\ \hat{s}_{41} & \hat{s}_{42} & \hat{s}_{43} & \hat{s}_{44} \end{pmatrix},$$

где $\hat{s}_{ij} = \hat{s}_{ji}$, $i, j = \overline{1, 4}$.

В явном виде элементы матрицы $\hat{S}_1$ представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= \frac{1}{\Delta} \left(s_{22}^{(1)} \left(s_{33}^{(1)} s_{44}^{(1)} - (s_{34}^{(1)})^2 \right) + 2s_{34}^{(1)} s_{24}^{(1)} s_{23}^{(1)} - (s_{24}^{(1)})^2 s_{33}^{(1)} - (s_{23}^{(1)})^2 s_{44}^{(1)} \right), \\ \hat{s}_{12} = \hat{s}_{21} &= \frac{1}{\Delta} \left(s_{12}^{(1)} \left((s_{34}^{(1)})^2 - s_{33}^{(1)} s_{44}^{(1)} \right) + s_{23}^{(1)} \left(s_{13}^{(1)} s_{44}^{(1)} - s_{14}^{(1)} s_{34}^{(1)} \right) + s_{24}^{(1)} \left(s_{14}^{(1)} s_{33}^{(1)} - s_{13}^{(1)} s_{34}^{(1)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{13} &= \hat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta} \left(s_{13}^{(1)} \left((s_{24}^{(1)})^2 - s_{22}^{(1)} s_{44}^{(1)} \right) + s_{12}^{(1)} (s_{23}^{(1)} s_{44}^{(1)} - s_{24}^{(1)} s_{34}^{(1)}) + s_{14}^{(1)} (s_{34}^{(1)} s_{22}^{(1)} - s_{23}^{(1)} s_{24}^{(1)}) \right), \\
\hat{s}_{14} &= \hat{s}_{41} = \frac{1}{\Delta} \left(s_{14}^{(1)} \left((s_{23}^{(1)})^2 - s_{22}^{(1)} s_{33}^{(1)} \right) + s_{12}^{(1)} (s_{24}^{(1)} s_{33}^{(1)} - s_{23}^{(1)} s_{34}^{(1)}) + s_{13}^{(1)} (s_{34}^{(1)} s_{22}^{(1)} - s_{23}^{(1)} s_{24}^{(1)}) \right), \\
\hat{s}_{22} &= \frac{1}{\Delta} \left(s_{11}^{(1)} (s_{33}^{(1)} s_{44}^{(1)} - (s_{34}^{(1)})^2) + 2s_{34}^{(1)} s_{14}^{(1)} s_{13}^{(1)} - (s_{14}^{(1)})^2 s_{33}^{(1)} - (s_{13}^{(1)})^2 s_{44}^{(1)} \right), \\
\hat{s}_{23} &= \hat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta} \left(s_{23}^{(1)} \left((s_{14}^{(1)})^2 - s_{11}^{(1)} s_{44}^{(1)} \right) + s_{12}^{(1)} (s_{13}^{(1)} s_{44}^{(1)} - s_{34}^{(1)} s_{14}^{(1)}) + s_{24}^{(1)} (s_{34}^{(1)} s_{11}^{(1)} - s_{13}^{(1)} s_{14}^{(1)}) \right), \\
\hat{s}_{33} &= \frac{1}{\Delta} \left(s_{11}^{(1)} (s_{22}^{(1)} s_{44}^{(1)} - (s_{24}^{(1)})^2) + 2s_{12}^{(1)} s_{14}^{(1)} s_{24}^{(1)} - (s_{12}^{(1)})^2 s_{44}^{(1)} - (s_{14}^{(1)})^2 s_{22}^{(1)} \right), \\
\hat{s}_{34} &= \hat{s}_{43} = \frac{1}{\Delta} \left(s_{34}^{(1)} \left((s_{12}^{(1)})^2 - s_{11}^{(1)} s_{22}^{(1)} \right) + s_{13}^{(1)} (s_{14}^{(1)} s_{22}^{(1)} - s_{12}^{(1)} s_{24}^{(1)}) + s_{23}^{(1)} (s_{11}^{(1)} s_{24}^{(1)} - s_{12}^{(1)} s_{14}^{(1)}) \right), \\
\hat{s}_{44} &= \frac{1}{\Delta} \left(s_{11}^{(1)} (s_{22}^{(1)} s_{33}^{(1)} - (s_{23}^{(1)})^2) + 2s_{12}^{(1)} s_{13}^{(1)} s_{23}^{(1)} - (s_{13}^{(1)})^2 s_{22}^{(1)} - (s_{12}^{(1)})^2 s_{33}^{(1)} \right).
\end{aligned}$$

Из формулы (33) следует, что

$$U_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau),$$

где при $\tau \in [0, t_1]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & \sin \lambda_1(t_1 - \tau) & \cos \lambda_1(t_2 - \tau) \\ \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & \sin \lambda_1(t_1 - \tau) & \cos \lambda_1(t_2 - \tau) \end{pmatrix},$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & 0 & \cos \lambda_1(t_2 - \tau) \\ \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & 0 & \cos \lambda_1(t_2 - \tau) \end{pmatrix},$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$H_1^T(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & 0 & 0 \\ \sin \lambda_1(T - \tau) & \cos \lambda_1(T - \tau) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим: при $\tau \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned}
\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= \sin \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{11}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{12}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{13}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{14}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \cos \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{12}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{22}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{23}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{24}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \sin \lambda_1(t_1 - \tau) [\hat{s}_{13}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{23}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{33}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{34}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \cos \lambda_1(t_2 - \tau) [\hat{s}_{14}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{24}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{34}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{44}^{(1)} C_{21}(t_2)],
\end{aligned}$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= \sin \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{11}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{12}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{13}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{14}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \cos \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{12}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{22}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{23}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{24}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \cos \lambda_1(t_2 - \tau) [\hat{s}_{14}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{24}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{34}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{44}^{(1)} C_{21}(t_2)],
\end{aligned}$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$\begin{aligned}
\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= \sin \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{11}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{12}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{13}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{14}^{(1)} C_{21}(t_2)] + \\
&+ \cos \lambda_1(T - \tau) [\hat{s}_{12}^{(1)} C_{11}(T) + \hat{s}_{22}^{(1)} C_{21}(T) + \hat{s}_{23}^{(1)} C_{11}(t_1) + \hat{s}_{24}^{(1)} C_{21}(t_2)].
\end{aligned}$$

6. Пример с вычислительным экспериментом. Предположим, что $t_1 = 2l/a$, $t_2 = 4l/a$, $T = 6l/a$. Тогда с учетом $\lambda_1 = a\pi/l$ получим $t_1\lambda_1 = 2\pi$, $t_2\lambda_1 = 4\pi$, $T\lambda_1 = 6\pi$, $\lambda_1(T - t_1) = 4\pi$, $\lambda_1(T - t_2) = 2\pi$, $\lambda_1(t_2 - t_1) = 2\pi$. Для матриц S и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{6\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{6\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} \\ \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{2\pi}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} & 0 & \frac{4\pi}{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 & -\frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{2\pi} & 0 & -\frac{\lambda_1}{2\pi} \\ -\frac{\lambda_1}{4\pi} & 0 & \frac{3\lambda_1}{4\pi} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{2\pi} & 0 & \frac{3\lambda_1}{4\pi} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = 64\pi^4/\lambda_1^4$. Далее, вычисляя значения постоянных $\tilde{C}_{1k}(T)$, $\tilde{C}_{2k}(T)$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k} , X_{2k} , $X_{1k}^{(1)}$, $X_{2k}^{(2)}$, $Y_{1k}^{(1)}$, $Y_{2k}^{(2)}$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{11}(T) &= \lambda_1 V_1(T) - \lambda_1 V_1(0), & \tilde{C}_{21}(T) &= \dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0), \\ \tilde{C}_{11}(t_1) &= \lambda_1 V_1(t_1) - \lambda_1 V_1(0), & \tilde{C}_{21}(t_2) &= \dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0), \\ X_{11} &= \lambda_1 \varphi_T(0) - \lambda_1 \varphi_0(0), & X_{21} &= \psi_T(0) - \psi_0(0), & Y_{11} &= \lambda_1 \varphi_T(l) - \lambda_1 \varphi_0(l), \\ Y_{21} &= \psi_T(l) - \psi_0(l), & X_{11}^{(1)} &= \lambda_1 \varphi_1(0) - \lambda_1 \varphi_0(0), & Y_{11}^{(1)} &= \lambda_1 \varphi_1(l) - \lambda_1 \varphi_0(l), \\ X_{21}^{(1)} &= \psi_1(0) - \psi_0(0), & Y_{21}^{(1)} &= \psi_1(l) - \psi_0(l), & X_{21}^{(2)} &= \psi_2(0) - \psi_0(0), & Y_{21}^{(2)} &= \psi_2(l) - \psi_0(l). \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} C_{11}(t_1) &= \frac{l}{2a}(V_1(t_1) - V_1(0)) + \frac{\varphi_1(0) - \varphi_0(0) + \varphi_1(l) - \varphi_0(l)}{\lambda_1}, \\ C_{21}(t_2) &= \frac{l}{2a\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{\lambda_1^2}, \\ C_{11}(T) &= \frac{l}{2a}(V_1(T) - V_1(0)) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0) + \varphi_T(l) - \varphi_0(l)}{\lambda_1}, \\ C_{21}(T) &= \frac{l}{2a\lambda_1}(\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0) - \psi_0(l) + \psi_T(l)}{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Для управления имеем: при $\tau \in [0, t_1]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= -\frac{\lambda_1}{2\pi} \sin \lambda_1 \tau C_{11}(t_1) + \frac{\lambda_1}{4\pi} \cos \lambda_1 \tau C_{21}(t_2) = \\ &= \left(\frac{1}{4}(V_1(0) - V_1(t_1)) - \frac{\varphi_1(0) - \varphi_0(0) + \varphi_1(l) - \varphi_0(l)}{2\pi} \right) \sin \lambda_1 \tau + \\ &\quad + \left(\frac{1}{8\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{4\lambda_1 \pi} \right) \cos \lambda_1 \tau, \end{aligned}$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= \frac{\lambda_1}{4\pi} \sin \lambda_1 \tau (C_{11}(t_1) - C_{11}(T)) + \frac{\lambda_1}{4\pi} \cos \lambda_1 \tau C_{21}(t_2) = \\ &= \left(\frac{1}{8}(V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l)}{4\pi} \right) \sin \lambda_1 \tau + \\ &\quad + \left(\frac{1}{8\lambda_1}(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l)}{4\lambda_1 \pi} \right) \cos \lambda_1 \tau, \end{aligned}$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) &= \frac{\lambda_1}{4\pi} \sin \lambda_1 \tau (C_{11}(t_1) - C_{11}(T)) + \frac{\lambda_1}{2\pi} \cos \lambda_1 \tau (C_{21}(T) - C_{21}(t_2)) = \\ &= \left(\frac{1}{8}(V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l)}{4\pi} \right) \sin \lambda_1 \tau + \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{4\lambda_1} (\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(t_2)) + \frac{\psi_T(0) - \psi_2(0) + \psi_2(l) - 2\psi_0(l) + \psi_T(l)}{2\lambda_1\pi} \right) \cos \lambda_1 \tau.$$

Из формулы (23) получим, что

$$F_1(t) = -\frac{4a}{\lambda_1 l} \mu_1''(t)$$

или

$$F_1(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_1 \tau \left[\frac{a^2 \pi}{l^2} (V_1(0) - V_1(t_1)) - \frac{2a^2(\varphi_1(0) - \varphi_0(0) + \varphi_1(l) - \varphi_0(l))}{l^2} \right] + \\ + \cos \lambda_1 \tau \left[\frac{a}{2l} (\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{a(\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l))}{\pi l} \right], & \tau \in [0, t_1], \\ \sin \lambda_1 \tau \left[\frac{a^2 \pi}{2l^2} (V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{a^2(\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l))}{l^2} \right] + \\ + \cos \lambda_1 \tau \left[\frac{a}{2l} (\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0)) + \frac{a(\psi_2(0) - \psi_0(0) - \psi_2(l) + \psi_0(l))}{\pi l} \right], & \tau \in (t_1, t_2], \\ \sin \lambda_1 \tau \left[\frac{a^2 \pi}{2l^2} (V_1(t_1) - V_1(T)) - \frac{a^2(\varphi_T(0) - \varphi_1(0) + \varphi_T(l) - \varphi_1(l))}{l^2} \right] + \\ + \cos \lambda_1 \tau \left[\frac{a}{l} (\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(t_2)) + \frac{2a(\psi_T(0) - \psi_2(0) + \psi_2(l) - 2\psi_0(l) + \psi_T(l))}{\pi l} \right], & \tau \in (t_2, T]. \end{cases}$$

Из формулы (27) имеем: при $\tau \in [0, t_1]$

$$V_1(\tau) = \left(V_1(0) + \frac{a\tau(V_1(t_1) - V_1(0))}{2l} - \frac{a\tau(\varphi_0(0) - \varphi_1(0) + \varphi_0(l) - \varphi_1(l))}{\pi l} \right) \cos \lambda_1 \tau + \\ + \left(\frac{\dot{V}_1(0)}{\lambda_1} + \frac{\tau(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0))}{4\pi} + \frac{V_1(0) - V_1(t_1)}{2\pi} + \right. \\ \left. + \frac{\tau(\psi_0(l) - \psi_0(0) + \psi_2(0) - \psi_2(l))}{2\pi^2} + \frac{\varphi_0(0) - \varphi_1(0) + \varphi_0(l) - \varphi_1(l)}{\pi^2} \right) \sin \lambda_1 \tau,$$

при $\tau \in (t_1, t_2]$

$$V_1(\tau) = \left(\frac{3V_1(t_1) - V_1(T)}{2} + \frac{a\tau(V_1(T) - V_1(t_1))}{4l} - \frac{a\tau(\varphi_1(0) - \varphi_T(0) + \varphi_1(l) - \varphi_T(l))}{2\pi l} + \right. \\ \left. + \frac{3(\varphi_1(0) + \varphi_1(l)) - 2(\varphi_0(0) + \varphi_0(l)) - \varphi_T(0) - \varphi_T(l)}{\pi} \right) \cos \lambda_1 \tau + \\ + \left(\frac{\dot{V}_1(0)}{\lambda_1} + \frac{\tau(\dot{V}_1(t_2) - \dot{V}_1(0))}{4\pi} + \frac{V_1(t_1) - V_1(T)}{4\pi} + \right. \\ \left. + \frac{\tau(\psi_0(l) - \psi_0(0) + \psi_2(0) - \psi_2(l))}{2\pi^2} + \frac{\varphi_1(0) - \varphi_T(0) + \varphi_1(l) - \varphi_T(l)}{2\pi^2} \right) \sin \lambda_1 \tau,$$

при $\tau \in (t_2, T]$

$$V_1(\tau) = \left(\frac{3V_1(t_1) - V_1(T)}{2} + \frac{a\tau(V_1(T) - V_1(t_1))}{4l} - \frac{a\tau(\varphi_1(0) - \varphi_T(0) + \varphi_1(l) - \varphi_T(l))}{2\pi l} + \right. \\ \left. + \frac{3(\varphi_1(0) + \varphi_1(l)) - 2(\varphi_0(0) + \varphi_0(l)) - \varphi_T(0) - \varphi_T(l)}{\pi} \right) \cos \lambda_1 \tau + \\ + \left(\frac{3\dot{V}_1(t_2) - 2\dot{V}_1(T)}{\lambda_1} + \frac{\tau(\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(t_2))}{2\pi} + \frac{V_1(t_1) - V_1(T)}{4\pi} + \right. \\ \left. + \frac{\tau(\psi_2(l) - \psi_2(0) + \psi_T(l) + \psi_T(0) - 2\psi_0(l))}{\pi^2} + \frac{\varphi_1(0) - \varphi_T(0) + \varphi_1(l) - \varphi_T(l)}{2\pi^2} \right) \sin \lambda_1 \tau,$$

$$+ \frac{10\psi_0(l) - 2\psi_0(0) + 6(\psi_2(0) - \psi_2(l)) - 4(\psi_T(0) + \psi_T(l))}{\lambda_1 \pi} \sin \lambda_1 \tau.$$

Для $Q_1(x, t)$ из (35)–(37) имеем

$$Q_1(x, t) = V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \mu_1(t).$$

Теперь предположим, что $a = 1/4$, $l = 1$, тогда $t_1 = 8$, $t_2 = 16$, $T = 24$, $\lambda_1 = \pi/4$ и пусть при $t = 0$ задано следующее начальное состояние: $\varphi_0(x) = x^3/2 - 2x^2/5 - x/10$, $\psi_0(x) = 2x^2/5 - 2x/5$, при $t_1 = 8$ задано промежуточное состояние $\varphi_1(x) = -x^2/3 + x/3$, при $t_2 = 12$ задано промежуточное состояние $\psi_1(x) = 2x^2/15 - 2x/15$, а при $T = 24$ задано следующее конечное состояние: $\varphi_T(x) = 0$, $\psi_T(x) = 0$.

Коэффициенты рядов Фурье для функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$ соответственно равны: $\varphi_1^{(0)} = -14/5\pi^3$, $\psi_1^{(0)} = -16/5\pi^3$, $\varphi_1^{(1)} = 8/3\pi^3$, $\psi_1^{(1)} = -16/15\pi^3$, $\varphi_1^{(T)} = \psi_1^{(T)} = 0$.

Значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0) = \psi_1(0) = \varphi_T(0) = \psi_T(0) = \varphi_0(1) = \psi_0(1) = \psi_1(1) = \varphi_T(1) = \psi_T(1) = 0.$$

Тогда $V_1(0) = -14/5\pi^3$, $\dot{V}_1(0) = -16/5\pi^3$, $\dot{V}_1(t_1) = 8/3\pi^3$, $\dot{V}_1(t_2) = -16/15\pi^3$, $V_1(T) = 0$. Следовательно, получим

$$\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \frac{16}{15\pi^4} \cos \frac{\pi}{4} \tau - \frac{41}{30\pi^3} \sin \frac{\pi}{4} \tau, \quad \tau \in [0, 8],$$

$$\mu_1(\tau) = \nu_1(\tau) = \frac{16}{15\pi^4} \cos \frac{\pi}{4} \tau + \frac{1}{3\pi^3} \sin \frac{\pi}{4} \tau, \quad \tau \in (8, 24],$$

$$V_1(\tau) = \left(-\frac{14}{5\pi^3} + \frac{41\tau}{60\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{4} \tau + \left(-\frac{233}{15\pi^4} + \frac{8\tau}{15\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{4} \tau, \quad \tau \in [0, 8],$$

$$V_1(\tau) = \left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{\tau}{6\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{4} \tau + \left(-\frac{182}{15\pi^4} + \frac{8\tau}{15\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{4} \tau, \quad \tau \in (8, 24],$$

так что

$$Q_1(x, 0) = \frac{16}{15\pi^4} - \frac{14}{5\pi^3} \sin \pi x, \quad \dot{Q}_1(x, 0) = -\frac{41}{120\pi^2} - \frac{16}{5\pi^3} \sin \pi x, \quad Q_1(x, 8) = \frac{16}{15\pi^4} + \frac{8}{3\pi^3} \sin \pi x, \\ \dot{Q}_1(x, 16) = \frac{1}{12\pi^2} - \frac{16}{15\pi^3} \sin \pi x, \quad Q_1(x, 24) = \frac{16}{15\pi^4}, \quad \dot{Q}_1(x, 24) = \frac{1}{12\pi^2}.$$

Сравнительный анализ полученных результатов показал

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &\approx 0,0379, & \max_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 8) &\approx 0,0136, & \max_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 24) &\approx 0,0110, \\ \int_0^1 \varepsilon_1(x, 0) dx &\approx 0,0169, & \int_0^1 \varepsilon_1(x, 8) dx &\approx 0,0102, & \int_0^1 \varepsilon_1(x, 24) dx &\approx 0,0110, \\ \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,0378, & \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 16) &\approx 0,0098, & \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) &\approx 0,0084, \\ \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,0337, & \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 16) dx &\approx 0,0088, & \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) dx &\approx 0,0084, \end{aligned}$$

где $t_3 = T$, $\varepsilon_1(x, t_j) = |Q_1(x, t_j) - \varphi_j(x)|$, $j = 0, 1, 3$; $\widehat{\varepsilon}_1(x, t_k) = |\dot{Q}_1(x, t_k) - \psi_k(x)|$, $k = 0, 2, 3$.

Таким образом, результаты анализа (см. рис. 1) показывают, что под воздействием построенных граничных управлений функция прогиба струны и ее производная достаточно близки в желаемых моментах времени заданным исходным функциям.

7. Заключение. Предложен конструктивный подход построения граничного управления процессом колебаний струны смещением на двух концах с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени с использованием метода Фурье. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления

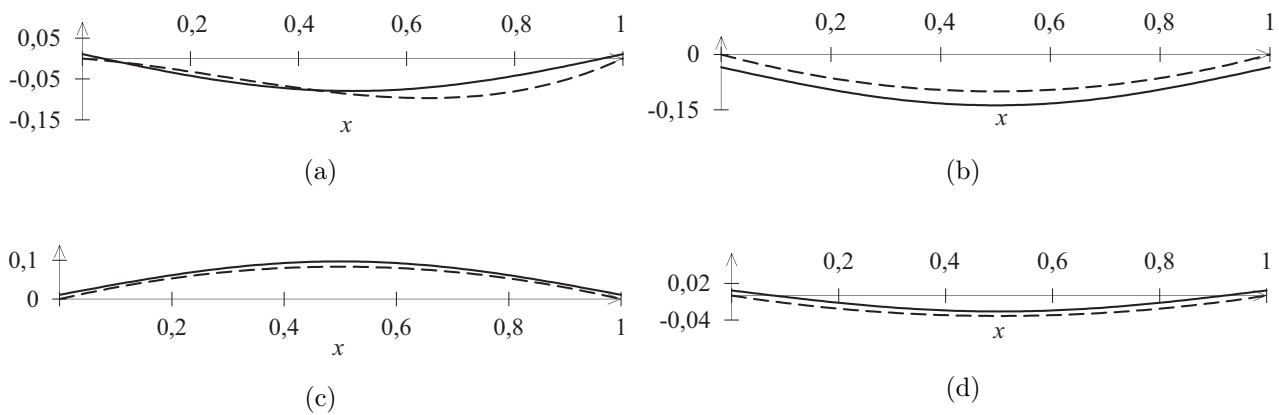


Рис. 1. Графики функций: (a) $Q_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия); (b) $\dot{Q}_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x)$ (пунктирная линия); (c) $Q_1(x, 8)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия); (d) $\dot{Q}_1(x, 16)$ (сплошная линия) и $\psi_2(x)$ (пунктирная линия).

процессами колебаний в физических и технологических системах. Предложенный подход можно распространить на другие неоднородные колебательные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдукаримов М. Ф. Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2013. — 56, № 8. — С. 612–618.
2. Андреев А. А., Лексина С. В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1 (16). — С. 5–10.
3. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
4. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
5. Барсегян В. Р., Солодуша С. В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2020. — 25, № 130. — С. 131–146.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
7. Гибкина Н. В., Сидоров М. В., Стадникова А. В. Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны // Радиоэлектрон. информ. Науч.-техн. ж. ХНУРЭ. — 2016. — № 2. — С. 3–11.
8. Zubov B. I. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
9. Ильин В. А., Мусеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6 (366). — С. 89–114.
10. Конец М. М. Задача оптимального управления процессом колебания струны // в кн.: Теория оптимальных решений. — Киев: Изд-во Ин-та кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, 2014. — С. 32–38.
11. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 62–70.
12. Barseghyan V. R. About one problem of optimal control of string oscillations with nonseparated multipoint conditions at intermediate moments of time // in: Stability, Control and Differential Games. Lect. Notes Control Inform. Sci. (Tarashev A., Maksimov V., Filippova T., eds.). — Cham: Springer, 2020. — P. 13–25.
13. Barseghyan V. R. The problem of optimal control of string vibrations // Int. Appl. Mech. — 2020. — 56, № 4. — P. 471–480.

14. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1847. — 012016.
15. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// in: Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Lect. Notes Comp. Sci. (*Pardalos P., Khachay M., Kazakov A.*, eds.). — Cham: Springer, 2021. — 12755. — P. 299–313.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: solodusha@isem.irk.ru