ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 24–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-24-34

УДК 517.953.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© 2022 г. **Ю. П. АПАКОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ, А. Х. ЖУРАЕВ**

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости одной краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками. При помощи функции Грина в явном виде построено решение поставленной краевой задачи.

***Ключевые слова*:** дифференциальное уравнение в частных производных, уравнение третьего порядка, уравнение с кратными характеристиками, однозначная разрешимость, краевая задача.

ON THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

© 2022 **Yu. P. APAKOV, T. K. YULDASHEV, A. Kh. ZHURAEV**

Abstract. In this paper, we discuss the unique solvability of a boundary-value problem for an inhomogeneous third-order partial differential equation with multiple characteristics. Using the Green function, we is construct a solution of this boundary-value problem in the explicit form.

***Keywords and phrases*:** partial differential equation, third-order equation, equation with multiple characteristics, unique solvability, boundary-value problem.

***AMS Subject Classification*:** 35G15

1. Введение. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении ряда задач в теории нелинейной акустики, в гидродинамической теории космической плазмы и в фильтрации жидкости в пористых средах. Часто резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, прилагающих к ударным волнам. Градиенты параметров потока в таких узких областях могут быть настолько значительными, что наряду с нелинейным характером движения учитываются влияния вязкости и теплопроводности. Такие течения называются короткими волнами. К теории коротких волн относится, в частности, теория трансзвуковых течений. Впервые в работе О. С. Рыжова [12] с учетом свойств вязкости и теплопроводности газа из системы Навье—Стокса было получено вязко-трансзвуковое уравнение (ВТ-уравнение)

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}.$$

При $\nu = 1$ ВТ-уравнение описывает осесимметричный поток. При $\nu = 0$ ВТ-уравнение принимает следующий частный вид, описывающий плоскопараллельный поток (см. [6]):

$$u_{xxx} + u_{yy} = u_x u_{xx}. \tag{1}$$

Уравнение, сопряженное к уравнению (1), было исследовано в [22–24, 26, 27]. В [25] для дифференциального уравнения построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала. В [1, 2] с помощью метода потенциалов изучены различные краевые задачи. В [7, 8] были построены фундаментальные решения для однородного уравнения, сопряженного к уравнению (1). При этом фундаментальные решения выражены через вырожденные гипергеометрические функции $\Psi(a, b; x)$, $\Phi(a, b; x)$:

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} w(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \quad t < 0,$$

где

$$w(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi} t\Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36t}{\sqrt{3}\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \tau = \frac{4}{27}t^3, \quad t = (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}}.$$

На основе оценок, справедливых для вырожденных гипергеометрических функций, получены оценки для фундаментальных решений при стремлении аргумента в бесконечность. Для функции $U(x, y; \xi, \eta)$ справедливы следующие оценки при $||y - \eta|^{-2/3}(x - \xi)| \to \infty$:

$$\left|\frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h dy^k}\right| \leqslant C_{kh} \big|y - \eta\big|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} \big|x - \xi\big|^{-\frac{1}{2}\left[2h+3k-1+\frac{3}{2}(1-(-1)^k)\right]},$$

где $C_{kh} = \mathrm{const}$, $k, h = 0, 1, 2, \ldots$ Для $V(x, y; \xi, \eta)$ имеют место аналогичные оценки при $(x - \xi)|y - \eta|^{-2/3} \to -\infty$. Также отметим работы [3–5, 9–11, 13–21, 28], в которых рассмотрены прямые и обратные краевые задачи для уравнений третьего порядка.

2. Постановка задачи. В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y). \tag{2}$$

Регулярным решением уравнения (2) будем называть функцию $u(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (2) и принадлежит классу $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$.

Задача A. Найти регулярное решение уравнения (2) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, 1) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

$$u_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \quad u_x(1, y) = \psi_2(y), \quad u_{xx}(1, y) = \psi_3(y), \tag{4}$$

где

$$\varphi_i(x) \in C[0; 1], \quad i = 1, 2, \quad \psi_j(y) \in C[0; 1], \quad j = \overline{1, 3}, \quad g(x, y) \in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}).$$

Кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi_1''(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1''(1) = \psi_3(1), \quad \varphi_1'(1) = \psi_2(1),$$
$$\varphi_2''(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2''(1) = \psi_3(1), \quad \varphi_1'(1) = \psi_2(1), \quad g(x, 0) = g(x, 1) = 0.$$

В [3, 9] изучены некоторые краевые задачи в прямоугольной области для уравнения, сопряжённого к уравнению (2). В этих работах решение построено методом Фурье и для этого потребовались нулевые данные на $y = 0$ и $y = l$. В настоящей работе построена функция Грина в прямоугольной области для второй краевой задачи и с помощью функции Грина найден явный вид решения поставленной задачи.

3. Единственность решения.

Теорема 1. *Задача A имеет единственное решение с точностью до постоянного слагаемого, т.е., если существует два решения, то их разность равна постоянному числу.*

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является решением однородной задачи A. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+u_y^2=0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия (3), (4), получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_x^2(0,y)dy+\iint\limits_D u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда $u_y(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=k_0(x)$. Подставляя это в уравнение (1), получим $k_0'''(x)=0$. Тогда из условий $k_0''(0)=k_0'(1)=k_0''(1)=0$ следует, что $k_0(x)=\mathrm{const}$. Отсюда $u(x,y)=\mathrm{const}$. Теорема 1 доказана. □

4. Существование решения задачи A.

Рассмотрим следующие сопряженные дифференциальные операторы

$$L\equiv\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\quad L^*\equiv-\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

Для этих дифференциальных операторов имеет место тождество

$$\varphi L[\psi]-\psi L^*[\varphi]\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi)-\frac{\partial}{\partial\eta}(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi),$$

где φ, ψ — достаточно гладкие функции. Интегрируя тождество по области D, получаем

$$\iint\limits_D[\varphi L[\psi]-\psi L^*[\varphi]]d\xi d\eta=\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi)d\xi d\eta-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial\eta}(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi)d\xi d\eta. \tag{6}$$

Возьмем теперь в качестве функции φ фундаментальное решение $U(x,y;\xi,\eta)$ однородного уравнения $u_{xxx}-u_{yy}=0$, которое как функция от (ξ,η) при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ удовлетворяет сопряженному уравнению:

$$L^*[U]\equiv-U_{\xi\xi\xi}-U_{\eta\eta}=0.$$

В качестве ψ берем любое регулярное решение $u(x,y)$ однородного дифференциального уравнения $u_{xxx}-u_{yy}=0$. Учитывая, что функция $U_\eta(x,y;\xi,\eta)$ имеет особенность при $y=\eta$, область D разделим на две области так, чтобы

$$D=\lim_{\varepsilon\to0}(D_1^\varepsilon\cup D_2^\varepsilon),$$

где

$$D_1^\varepsilon=\Big\{(\xi,\eta):0<\xi<1,\ 0<\eta<y-\varepsilon\Big\},\quad D_2^\varepsilon=\Big\{(\xi,\eta):0<\xi<1,\ y+\varepsilon<\eta<1\Big\}.$$

Тогда тождество (6) принимает вид

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\lim_{\varepsilon\to0+}\int\limits_0^1\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to0+}\int\limits_0^1\int\limits_{y+\varepsilon}^1\frac{\partial}{\partial\xi}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)d\xi d\eta-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}(Uu_\eta-U_\eta u)d\xi d\eta-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\eta}(Uu_\eta-U_\eta u)d\xi d\eta=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^{y-\varepsilon}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{y+\varepsilon}^{1}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1(Uu_\eta-U_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=y-\varepsilon}d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1(Uu_\eta-U_\eta)\Big|_{\eta=y+\varepsilon}^{\eta=1}d\xi$$

$$=\int\limits_0^{y}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta+\int\limits_y^{1}(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,y-\varepsilon)u_\eta(\xi,y-\varepsilon)-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)]d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,1)u_\eta(\xi,1)-U(x,y;\xi,y+\varepsilon)u_\eta(\xi,y+\varepsilon)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,1)u(\xi,1)-U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^1(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int\limits_0^1[U(x,y;\xi,1)u_\eta(\xi,1)-$$

$$-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)]d\xi+\int\limits_0^1[U_\eta(x,y;\xi,1)u(\xi,1)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.$$

Упростив это выражение, получим

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^1[Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u]\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^1U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi+\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^1U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.\quad(7)$$

Учитывая [3, теорема 3], из (7) получим

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^1 (Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-$$

$$-\int\limits_0^1 U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi+\int\limits_0^1 U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi-2u(x,y).$$

Отсюда окончательно находим:

$$2u(x,y)=\int\limits_0^1 (Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int\limits_0^1 (Uu_\eta-U_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi-\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (8)$$

Пусть теперь $W(x,y,\xi,\eta)$ — любое регулярное решение сопряженного уравнения $L^*[W]=0$, а $u(x,y)$ — любое регулярное решение уравнения $u_{xxx}-u_{yy}=g(x,y)$. Тогда полагая в (6) $\varphi=W(x,y;\xi,\eta)$, $\psi=u(\xi,\eta)$, имеем

$$0=\int\limits_0^1 (Wu_{\xi\xi}-W_\xi u_\xi+W_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int\limits_0^1 (Wu_\eta-W_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi-\iint\limits_D W(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (9)$$

Из тождеств (8) и (9) получим

$$2u(x,y)=\int\limits_0^1 (Gu_{\xi\xi}-G_\xi u_\xi+G_{\xi\xi}u)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}d\eta-\int\limits_0^1 (Gu_\eta-G_\eta u)\Big|_{\eta=0}^{\eta=1}d\xi-\iint\limits_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (10)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta)$. Построим теперь функцию $G(x,y;\xi,\eta)$, которая должна обладать следующими свойствами при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$:

$$\begin{cases} L[G]=0,\\ G_y(x,0;\xi,\eta)=G_y(x,1;\xi,\eta)=0,\\ G_{xx}(0,y;\xi,\eta)=G_{xx}(1,y;\xi,\eta)=G_x(1,y;\xi,\eta)=0 \end{cases} \quad (11)$$

по переменным (x,y) и

$$\begin{cases} L^*[G]=0,\\ G_\eta(x,y;\xi,0)=G_\eta(x,y;\xi,1)=0,\\ G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)=G_{\xi\xi}(x,y;1,\eta)=G_\xi(x,y;0,\eta)=0. \end{cases} \quad (12)$$

по переменным (ξ,η). С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача A_1. Найти регулярное решение в области D уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,1)=0, && 0<x<1,\\ &u_{xx}(0,y)=u_x(1,y)=u_{xx}(1,y)=0, && 0<y<1. \end{aligned}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\cos(k\pi y). \quad (13)$$

Предполагается, что функцию $g(x,y)$ можно разложить в ряд Фурье по системе собственных функций $\{\cos(k\pi y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$g(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\cos(k\pi y), \quad (14)$$

где

$$g_k(x) = 2\int_0^1 g(x,y)\cos(k\pi y)dy.$$

Подставляя ряды Фурье (13) и (14) в уравнение (2), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) - g_k(x))\cos(k\pi y) = 0.$$

Отсюда, используя ортонормированность собственных функций $\{\cos(k\pi y)\}_{k=1}^{\infty}$, придем к следующей спектральной задаче

$$\begin{cases} L[X_k] \equiv X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) = g_k(x), \\ X_k''(0) = X_k'(1) = X_k''(1) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $\lambda_k^3 = (k\pi)^2$. Решение задачи (15) будем искать методом построения функции Грина $G_k(x,\xi)$. Как известно, функция Грина обладает следующими свойствами:

(i) функция $G_k(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(ii) ее вторая производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен 1, т.е.

$$\left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^2 G_k(x,\xi)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi-0} = 1;$$

(iii) в каждом из интервалов $0 \leqslant x < \xi$ и $\xi < x \leqslant 1$ функция $G_k(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением следующего дифференциального уравнения

$$L[G_k] = \frac{\partial^3 G_k}{\partial x^3} + \lambda_k^3 G_k = 0;$$

(iv) $G_{kxx}(0,\xi) = G_{kx}(1,\xi) = G_{kxx}(1,\xi) = 0$.

Теперь приступим к построению функции Грина. Так как линейно независимые решения уравнения

$$X_k'''(x) + \lambda_k^3 X_k(x) = 0$$

имеют вид

$$X_1(x) = e^{-\lambda_k x}, \quad X_2(x) = e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x), \quad X_3(x) = e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), \quad \beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k,$$

представим искомую функцию Грина в виде

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} a_1 e^{-\lambda_k x} + a_2 e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x) + a_3 e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ b_1 e^{-\lambda_k x} + b_2 e^{\lambda_k x/2}\cos(\beta_k x) + b_3 e^{\lambda_k x/2}\sin(\beta_k x), & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{16}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — пока что неизвестные функции от ξ. Из свойств (i) и (ii) для функции Грина и положив $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$, $k = 1,2,3$, получим следующую систему линейных функционально-алгебраических уравнений относительно функций $c_k(\xi)$:

$$\begin{cases} c_1 e^{-\lambda_k\xi} + c_2 e^{\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi) + c_3 e^{\lambda_k\xi/2}\sin(\beta_k\xi) = 0, \\ -c_1 e^{-\lambda_k\xi} + c_2 e^{\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi + \dfrac{\pi}{3}\right) + c_3 e^{\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0, \\ c_1 e^{-\lambda_k\xi} + c_2 e^{\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi + \dfrac{2\pi}{3}\right) + c_3 e^{\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\lambda_k^2}. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен значению вронскиана $W(X_1,X_2,X_3)$ в точке $x = \xi$:

$$W(X_1,X_2,X_3) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Вычислив Δc_i, $i=1,2,3$, находим:

$$c_1(\xi)=\frac{e^{\lambda_k\xi}}{3\lambda_k^2},\quad c_2(\xi)=-\frac{2e^{-\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2},\quad c_3(\xi)=\frac{2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2}.$$

Далее, из свойства (iv) для функции Грина получаем следующие соотношения

$$\begin{cases} b_1-\dfrac{1}{2}b_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_3=\dfrac{1}{3\lambda_k^2}\big(e^{\lambda_k\xi}+2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)\big),\\ -b_1e^{-\lambda_k}+b_2e^{\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\dfrac{\pi}{3}\right)+b_3e^{\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k+\dfrac{\pi}{3}\right)=0,\\ b_1e^{-\lambda_k}+b_2e^{\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\dfrac{2\pi}{3}\right)+b_3e^{\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k+\dfrac{2\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

В силу линейной независимости величин $X_1''(0)$, $X_2'(1)$, $X_3''(1)$, определитель этой системы отличен от нуля и равен

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\lambda_k}-2e^{-\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right)\neq 0.$$

Вычислив Δb_i, $i=1,2,3$, находим:

$$\begin{aligned} b_1&=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\big(e^{\lambda_k\xi}+2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)\big),\\ b_2&=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\big(2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\cos(\beta_k)\big),\\ b_3&=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\big(2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\sin(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\sin(\beta_k)\big), \end{aligned}$$

где

$$\overline{\overline{\Delta}}=3\lambda_k^2\left(1-2e^{-3\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Учитывая, что $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$, $k=1,2,3$, находим

$$a_1=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\left(2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos(\beta_k\xi)+2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

$$\begin{aligned} a_2=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\Big(&2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\cos(\beta_k)+\\ &+2e^{-\lambda_k\xi/2}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)-4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\sin\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\Big(&2e^{(\xi-3/2)\lambda_k}\sin(\beta_k)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)\cdot\sin(\beta_k)-\\ &-2e^{-\lambda_k\xi/2}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)+4e^{-(\xi/2+3/2)\lambda_k}\cos\left(\beta_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\Big). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в формулу (16), получим функцию $G_k(x,\xi)$ в виде:

$$\begin{aligned} G_k(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\Big\{&2e^{-(\xi+2x)\lambda_k/2}\cos(\beta_k\xi)+\\ &+2e^{-(3-2\xi+2x)\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)+2e^{-(3-2\xi-x)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+\\ &+4e^{-(\xi-x+3)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k\xi\big]\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+2e^{-(\xi-x)\lambda_k/2}\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)-\\ &-4e^{-(\xi-x+3)\lambda_k/2}\cos\left(\beta_k+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta_k(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)\Big\},\quad 0\leqslant x\leqslant\xi, \end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned} G_k(x,\xi)=\frac{1}{\overline{\overline{\Delta}}}\Big\{&e^{-(x-\xi)\lambda_k}+2e^{-(\xi/2+x)\lambda_k}\cos(\beta_k\xi)+2e^{-(3-2\xi-x)\lambda_k/2}\cos\big[\beta_k(x-1)\big]+\\ &+4e^{-(3+\xi-x)\lambda_k/2}\cos(\beta_k\xi)\cos\big[\beta_k(x-1)\big]\Big\},\quad \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{aligned}\tag{18}$$

Легко можно убедиться, что функции, определенные формулами (17) и (18), обладают всеми свойствами, сформулированными выше для определения функции Грина.

Так как решение задачи (15) имеет вид

$$X_k(x) = \int\limits_0^1 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi, \tag{19}$$

то, подставляя это представление (19) в ряд Фурье (13), получим решение задачи A_1:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^1 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi \cdot \cos(\pi k y) = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \cos(\pi k) \cdot g_k(\xi) d\xi. \tag{20}$$

Если функция $u(x,y)$ и ее производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся равномерно в области D, то функция $u(x,y)$ определяет решение задачи A_1. Для функции (20) получим оценку

$$|u(x,y)| \leqslant \left| \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \cos(\pi k y) g_k(\xi) d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| |\cos(\pi k y)| |g_k(\xi)| d\xi \leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| \cdot |g_k(\xi)| d\xi. \tag{21}$$

При сделанных предположениях относительно $g(x,y)$ имеет место неравенство

$$|g_k(\xi)| \leqslant \frac{M_1}{k^2}, \quad M_1 = \mathrm{const} > 0,$$

где $g_k(\xi)$ — коэффициенты Фурье в разложении функции $g(x,y)$ на отрезке $[0;1]$. Учитывая эту оценку, неравенство (21) можно записать в виде

$$|u(x,y)| \leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |G_k(x,\xi)| \cdot |g_k(\xi)| d\xi \leqslant M_1 \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |G_k(x,\xi)| d\xi. \tag{22}$$

Вычисляя оценки для функции $G_k(x,\xi)$, из (17) и (18), находим:

$$|G_k(x,\xi)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{2e^{-\lambda_k \delta_1/2}}{\lambda_k^2}, & 0 \leqslant x < \xi, \quad 0 < \delta_1 < \xi - x, \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{4}{3}\dfrac{e^{-\lambda_k \delta_2/2}}{\lambda_k^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-\lambda_k \delta_2}}{\lambda_k^2}, & \xi < x \leqslant 1, \quad 0 < \delta_2 < x - \xi \end{cases}$$

или

$$|G_k(x,\xi)| \leqslant \frac{4}{3}\frac{e^{-3\lambda_k/2}}{\lambda_k^2} + 2\frac{e^{-\lambda_k \delta_1/2}}{\lambda_k^2} + \frac{1}{3}\frac{e^{-\lambda_k \delta_2}}{\lambda_k^2} \leqslant M_2 k^{-\frac{4}{3}}, \quad M_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{23}$$

Тогда с учетом оценки (23) из неравенства (22), получим

$$|u(x,y)| \leqslant M_3 k^{-10/3}, \quad M_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно. Покажем также, что ряд, составленный из производных u_{xxx}, сходится абсолютно и равномерно. Дифференцируя (20) по x три раза, получим

$$\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 G_k(x,\xi) g_k(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Для ряда в (24) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \leqslant \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} G_k(x,\xi)\right| |g_k(\xi)| d\xi \leqslant M_4 \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |\lambda_k^3 G_k(x,\xi)| d\xi, \quad M_4 = \mathrm{const} > 0. \quad (25)$$

Так как

$$|\lambda_k^3 G_k(x,\xi)| \leqslant \frac{4}{3}\lambda_k e^{-3\lambda_k/2} + 2\lambda_k e^{-\lambda_k \delta_1/2} + \frac{1}{3}\lambda_k e^{-\lambda_k \delta_2} \leqslant M_5 k^{\frac{2}{3}}, \quad M_5 = \mathrm{const} > 0,$$

то для (25) имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \leqslant M_6 k^{-4/3}, \quad M_6 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует, что ряд (24) сходится абсолютно и равномерно. Поскольку

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3},$$

аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость ряда, составленного из производных $\partial^2 u/\partial y^2$. Отсюда следует возможность почленного дифференцирования ряда (20), необходимый для обоснования существования классического решения уравнения (2). Изменение порядка суммирования и интегрирования всегда законно. В силу этого утверждаем, что ряд под интегралом (20) абсолютно и равномерно сходится по ξ.

Решение (20) задачи A_1 запишем в следующем виде:

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k y)\cdot g_k(\xi) d\xi = 2\int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi) \int\limits_0^1 g(\xi,\eta)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y) d\eta d\xi =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 g(\xi,\eta) \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y) d\xi d\eta = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G(x,\xi,y,\eta) g(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

где

$$G(x,\xi,y,\eta) = 2\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos(\pi k\eta)\cdot\cos(\pi k y). \quad (26)$$

Легко убедиться, что для функции $G(x,\xi,y,\eta)$ выполняются условия (11) и (12). Функция (26) является функцией Грина первой краевой задачи в области D. Сходимость ряда (26) следует из оценки (23) для функций $G_k(x,\xi)$, $x \neq \xi$.

Отметим, что для функции $G(x,\xi,y,\eta)$ выполняются краевые условия (11) и (12), а для функции $u(x,y)$ выполняются краевые условия (3) и (4). Поэтому из представления (10) получим решение задачи A в явном виде:

$$2u(x,y) = \int\limits_0^1 G(x,y,1,\eta)\psi_3(\eta)d\eta - \int\limits_0^1 G(x,y,0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta -$$

$$- \int\limits_0^1 G_\xi(x,y,1,\eta)\psi_2(\eta)d\eta + \int\limits_0^1 G_\eta(x,y,\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_0^1 G_\eta(x,y,\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi - \iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (27)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi_i(x) \in C[0;1], \quad i = 1, 2, \qquad \psi_j(y) \in C[0;1], \quad j = \overline{1,3}, \qquad g(x,y) \in C^{0,2}_{x,y}(\overline{D}).$$

Если имеют место условия согласования, то задача A однозначно разрешима и её решение имеет вид (27)*, где функция Грина* $G(x,y;\xi,\eta)$ *определяется из формулы* (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдиназаров С.* Об одном уравнении третьего порядка// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1986. — № 3. — С. 21–27.
2. *Абдиназаров С., Собиров З. А.* Об одной задаче для смешанного уравнения высокого нечетного порядка с кратными характеристиками// Узбек. мат. ж. — 2003. — № 2. — С. 3–8.
3. *Апаков Ю. П.* Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных// Узбек. мат. ж. — 2007. — № 1. — С. 14–23.
4. *Апаков Ю. П.* К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2019.
5. *Балкизов Ж. А., Кадзаков А. Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Изв. Кабардино-Балкар. науч. центра РАН. — 2010. — № 4. — С. 64–69.
6. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения.// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1972. — *12*, № 5. — С. 1265–1279.
7. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2 (15). — С. 18–26.
8. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени// Укр. мат. ж. — 2010. — *62*, № 1. — С. 40–51.
9. *Иргашев Ю., Апаков Ю. П.* Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа// Узбек. мат. ж. — 2006. — № 2. — С. 44–51.
10. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Пространственно-нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений третьего порядка// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 7. — С. 906–917.
11. *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега—де Фриза// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2011. — № 17 (234). — С. 52–61.
12. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа// Прикл. мат. мех. — 1952. — *2*, № 6. — С. 1004–1014.
13. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнение смешанного типа третьего порядка// Докл. РАН. — 2009. — *427*, № 5. — С. 593–596.
14. *Шубин В. В.* Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом// Вестн. НГУ. Сер. Мат. мех. информ. — 2012. — *12*, № 1. — С. 126–138.
15. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка// Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — № 1 (34). — С. 56–65.
16. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром// Владикавказ. мат. ж. — 2016. — *18*, № 2. — С. 76–85.
17. *Юлдашев Т. К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 9. — С. 74–79.
18. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 101–110.
19. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром// Вестн. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2017. — № 1 (38). — С. 42–54.
20. *Ashyraliev A., Aggez N., Hezenci F.* Boundary-value problem for a third-order partal differential equation// AIP Conf. Proc. — 2012. — *1470*, № 1. — P. 130–133.
21. *Bendjajazia N., Guezane-Lokoudi A., Khaldi R.* On third-order boundary-value problems with multiple characteristics// Differ. Equations Dynam. Systems. — https://doi.org/10.1007/s12591-019-00507-6.

22. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 1// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912. — *7*, № 13. — P. 1–34.
23. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 2// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912. — *7*, № 21. — P. 1–30.
24. *Block H.* Sur les équations linéaires aux dérivées parielles à caratéristiques multiples. Note 3// Ark. Mat. Astron. Fys. — 1912-1913. — *8*, № 23. — P. 1–51.
25. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple// Rend. Semin. Mat. Univ. Padava. — 1961. — № 31. — P. 1–45.
26. *Del Vicchio E.* Sulle equazioni// Mem. R. Accad. Sci. Ser. 2. — 1915. — *66*. — P. 1–41.
27. *Del Vicchio E.* Sur deux problemes d'integration pour les equazios paraboliques// Ark. For Mat. Astr. Fys. — 1916. — *11*. — P. 32–43.
28. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926–944.

Апаков Юсупжон Пулатович
Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан;
Наманганское отделение Института математики им. В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Наманган, Узбекистан
E-mail: `yusupjonapakov@gmail.com`

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Жураев Абдулла Хатамович
Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан
E-mail: `juraevabdulla@gmail.com`