ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 72–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-72-79

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА—ЛЯВА

© 2022 г. **А. А. МУХАМЕТЬЯРОВА**

Аннотация. Рассматривается обратная задача с финальным переопределением для абстрактных неполных уравнений соболевского типа высокого порядка. Найдены условия однозначной разрешимости поставленной задачи. Рассмотрены некоторые частные случаи. Основной результат работы содержит необходимые и достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи для математической модели соболевского типа высокого порядка. Данная методика применена к исследованию обратной задачи для уравнения Буссинеска—Лява.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа высокого порядка, уравнение Буссинеска—Лява, обратная задача, однозначная разрешимость.

INVERSE PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ–LOVE EQUATION

© 2022 **A. A. MUKHAMETYAROVA**

Abstract. For an abstract, high-order, incomplete Sobolev-type equation, an inverse problem with final redefinition is considered. Conditions for the unique solvability of the problem are found. Some special cases are considered. The main result contains necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution of the inverse problem for high-order, Sobolev-type equations. This technique is applied to the study of the inverse problem for the Boussinesq–Love equation.

Keywords and phrases: high-order Sobolev-type equation, Boussinesq–Love equation, inverse problem, unique solvability.

AMS Subject Classification: 47D03, 35R30

1. Введение. Уравнение Буссинеска—Лява

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha^2 \Delta u + g \tag{1}$$

моделирует продольные колебания в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции. Здесь α, λ — вещественные ненулевые параметры, характеризующие материал стержня, функция $g = \varphi(t)f(x)$ соответствует объемным силам.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(x,t)$, определенную в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$, а также функцию $f = f(x)$, удовлетворяющие уравнению (1), начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

краевому условию

$$u(x,0) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

а также условию переопределения

$$u(x,T) = v(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Статья организована следующим образом. В разделе 2 содержится исследование разрешимости обратной задачи для абстрактного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка.

В разделе 3 проводится редукция конкретной задачи к уравнению и рассматривается соответствующая обратная задача. Обратные задачи для уравнений соболевского типа и других неклассических уравнений математических физики изучались ранее в [4–8, 10, 11].

2. Абстрактная схема. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — сепарабельные банаховы пространства, операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линейны и непрерывны (будем обозначать этот факт следующим образом: $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$), причем оператор M является (L, p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В этом случае пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, причем $\ker L \subset \mathfrak{U}^0$. Обозначим через L_k и M_k сужения операторов L и M на подпространства $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Лемма 1. *Операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$, линейны и непрерывны, причем существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.*

Построим множество $\sigma_n^L(M) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^L(M)\}$; оно компактно в $\mathbb{C}$ в силу компактности L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M. Возьмем замкнутый контур $\gamma = \{|\mu| = r : r > \lambda,\ \lambda \in \sigma_n^L(M)\}$ и построим оператор-функции

$$U_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \mu^{n-m-1} (\mu^n L - M)^{-1} L e^{\mu} t d\mu,$$

где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, а интеграл понимается в смысле Римана.

Лемма 2. *$U_m^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^1))$, $(U_m^t)^{(l)} = U_{m+l}^t$, где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 0, 1, \ldots, m$; $(U_m^t)^{(l)}\big|_{t=0} = \mathbb{O}$ при $m \neq l$ и $(U_m^t)^{(l)}\big|_{t=0}$ — проектор $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{U}^1$ вдоль $\mathfrak{U}^0$.*

Для линейного неоднородного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + f\varphi(t) \tag{5}$$

рассмотрим следующую задачу с финальным переопределением:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \ldots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \quad u(T) = v, \tag{6}$$

где число $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и векторы $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, v произвольны, а функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ задана (I — отрезок с концами в точках 0 и T).

Определение 1. Пару (u, f) назовем решением задачи (5), (6), если вектор $f \in \mathfrak{F}$ и вектор-функция $u \in C^\infty((0; T); \mathfrak{U}) \cap C^{n-1}([0; T]; \mathfrak{U})$ удовлетворяет уравнению (5) и соотношениям (6).

Обратная задача (5), (6) допускает разные интерпретации. Можно считать, например, что мы восстанавливаем в уравнении (5) неточно заданное неоднородное слагаемое $g = f\varphi(t)$ при помощи дополнительных краевых условий (6). Можно считать, что мы подбираем элемент $f \in \mathfrak{F}$ так, чтобы перевести систему из начального состояния u_0 в заданное финальное состояние v.

Для нахождения условий разрешимости обратной задачи нам понадобятся результаты о разрешимости прямой задачи, более подробно описанные в [1, 9].

Определение 2. Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовем решением неполного линейного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu, \tag{7}$$

если она обращает уравнение (7) в тождество при любом $t \in \mathbb{R}$, а решение $u = u(t)$ уравнения (7) назовем решением задачи Коши

$$u^{(m)}(0) = u_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

для уравнения (7) (или просто решением задачи (7), (8)), если оно удовлетворяет условиям (8).

Лемма 3. *Для любых $u_m \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение $u = u(t)$ задачи (7), (8), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m.$$

Наконец, следуя традиционной схеме, рассмотрим однородную (т.е. $u_m = 0$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$) задачу (8) для неоднородного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Lu^{(n)} = Mu + g,$$

где $g\colon [0,\tau) \to \mathfrak{F}$ — некоторая вектор-функция. Нетрудно убедиться, что его единственным (в силу леммы 3) формальным решением будет вектор-функция

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Qg(s)ds, \tag{9}$$

где $H = M_0^{-1}L_0$, а $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проектор на $\mathfrak{F}^1$ вдоль $\mathfrak{F}^0$.

Заметим, что поскольку

$$u^{(m)}(0) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(0),$$

вектор-функция (9) не удовлетворяет однородным начальным условиям (8). Итак, подытожим наши рассмотрения.

Теорема 1. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любых векторов $u_m \in \mathfrak{U}^1$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, и для любой вектор-функции $g \in C^\infty((0,\tau);\mathfrak{F}) \cup C^{pn+n-1}([0;\tau);\mathfrak{F})$ существует единственное решение $u \in C^\infty((0;\tau);\mathfrak{U}) \cup C^{n-1}([0;\tau);\mathfrak{U})$ задачи Коши*

$$u^{(m)}(0) = u_m - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(0), \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

которое к тому же имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} Qg(s)ds. \tag{10}$$

Перейдем к решению поставленной обратной задачи. Следуя [3], подействуем на (10) оператором $(\mathbb{I} - P)$, считая $g = f\varphi(t)$

$$(\mathbb{I} - P)u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(t) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{11}$$

Выбрав $T \in \mathbb{R}_+$ и подставив значения $u(0) = u_0$, $u(T) = v$ в (11), имеем

$$(\mathbb{I} - P)u_0 = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f, \tag{12}$$

$$(\mathbb{I} - P)v = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть M — (L,p)-ограниченный оператор, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\varphi \in C^{pn+n}([0;T];\mathbb{R})$. Тогда выполнение равенства*

$$\sum_{q=0}^{p} H^q (\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I} - P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I} - P)v) = 0$$

является необходимым условием однозначной разрешимости задачи (5), (6).

Доказательство. Действительно, пусть (u, f) — единственное решение задачи (5), (6), тогда для того, чтобы удовлетворить равенствам (6), u и f должны быть связаны формулами (12), (13). Подействуем на (12) и на (13) соответственно операторами

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T), \quad \sum_{q=0} H^q \varphi^{(qn)}(0).$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I} - P)u_0 = \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I} - P)v. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда необходимым условием однозначной разрешимости обратной задачи* (5), (6) *является выполнение неравенств* $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi(0) \neq 0$; тогда из необходимости выполнения условия

$$u_m \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{m}} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u^{(m)} = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn+m)}(0) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f \right\}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

вытекает, что

$$(\mathbb{I} - P)u_0 = -\varphi(0) \left(\mathbb{I} + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\varphi(0)} H + \ldots + \frac{\varphi^{(pn)}(0)}{\varphi(0)} H^p \right) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{14}$$

Далее, оператор

$$N = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{\varphi(0)} H + \ldots + \frac{\varphi^{(pn)}(0)}{\varphi(0)} H^p$$

нильпотентен степени p, поэтому из (14) вытекает

$$(\mathbb{I} - Q)f = -\left[\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0) M_0^{-1} \right]^{-1} (\mathbb{I} - P)u_0. \tag{15}$$

Отсюда получаем однозначность определения проекции вектора f на подпространство $\mathfrak{F}^0$. Если же $\varphi(0) = 0$ или $\varphi(T) = 0$, то в силу нильпотентности операторов

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(0), \quad \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(qn)}(T)$$

однозначность этой проекции невозможна. $\square$

Теперь подействуем на (10) проектором P; получим

$$Pu(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1} \varphi(s) Qf\, ds.$$

Отсюда при $t = T$ имеем

$$Pv = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m + \int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s) Qf\, ds, \quad Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m = \left(\int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s)\, ds \right) (Qf).$$

Через $S^T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ обозначим сужение оператора

$$\int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1} \varphi(s)\, ds$$

на $\mathfrak{F}^1$. Если оператор S^T непрерывно обратим, то

$$Qf = (S^T)^{-1}\Big(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Big) \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть оператор M является (L,p)-ограниченным, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функция $\varphi \in C^{pn+n}(I;\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) \neq 0$, векторы $u_m, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что*

$$\sum_{q=0}^{p} H^q(\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v) = 0,$$

а оператор $S^T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ непрерывно обратим. Тогда существует единственное решение (u,f) обратной задачи (5), (6).

Доказательство. Действительно, в силу $\varphi(0) \neq 0$ и непрерывной обратимости оператора S^T из (15) и (15) при любых $u_m \in \mathfrak{U}$ найдем единственный вектор f. Подставим u_m и f в (11), считая $g = \varphi(t)f$, найдем единственное решение $u \in C^1(I;\mathfrak{U})$ уравнения (5), которое удовлетворяет условию $u(0) = u_0$. Проверим выполнение условия $u(T) = v$. Для этого подставив T в (10) и считая $g = \varphi(t)f$, получим

$$(\mathbb{I}-P)u(T) = -\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f =$$

$$= \sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)\left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}(\mathbb{I}-P)u_0 = \left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 =$$

$$= \left(\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)\right)^{-1}\sum_{q=0}^{p} H^q\varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v = (\mathbb{I}-P)v$$

в силу равенства

$$\sum_{q=0}^{p} H^q(\varphi^{(qn)}(T)(\mathbb{I}-P)u_0 - \varphi^{(qn)}(0)(\mathbb{I}-P)v) = 0$$

и включения $u_m \in \mathfrak{P}_\mathfrak{m}$. Далее,

$$Pu(T) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m + \int_0^T U_{n-1}^{T-s} L_1^{-1}\varphi(s)Qf\,ds = Pv$$

в силу (16) и непрерывной обратимости оператора S^T. Теорема доказана. □

В заключение рассмотрим важный случай $(L,0)$-ограниченности оператора M, причем в этот случай входит ситуация, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Итак, пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$; тогда оператор M является $(L,0)$-ограниченным, причем условия на функцию φ можно существенно упростить. Именно, имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$. Тогда при любых $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_m, v \in \mathfrak{U}$ и такой функции $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$, что оператор S^T непрерывно обратим, существует единственное решение $(u;f)$ задачи (5), (6).*

Доказательство. Действительно, в данном случае проекторы $P = \mathbb{I}$, $Q = \mathbb{I}$, поэтому решение искомой задачи имеет вид

$$u(t) = \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1}\varphi(s)f\,ds,$$

где f в силу (16) находится по формуле

$$f = (S^T)^{-1}\Bigl(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Bigr).$$

Теперь рассмотрим случай $(L,0)$-ограниченного оператора, но оператор L уже не будет обратимым. В этом случае справедлив частный случай теоремы. □

Следствие 2. *Пусть оператор M является $(L,0)$-ограниченным, $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, векторы $u_m, v \in \mathfrak{U}$ и функция $\varphi \in C^1(I;\mathfrak{U})$ таковы, что $\varphi(0)(\mathbb{I}-P)v = \varphi(T)(\mathbb{I}-P)u_0$, $\varphi(0) \neq 0$ и $\varphi(T) \neq 0$, а оператор S^T непрерывно обратим. Тогда существует единственное решение (u,f) задачи* (5), (6).

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 2 искомое решение имеет вид

$$u(t) = -\varphi(t)M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q)f + \sum_{m=0}^{n-1} U_m^t u_m + \int_0^t U_{n-1}^{t-s} L_1^{-1}\varphi(s)Qf\,ds,$$

где

$$(\mathbb{I}-Q)f = -\frac{1}{\varphi(0)}M_0(\mathbb{I}-P)u_0, \quad Qf = (S^T)^{-1}\Bigl(Pv - \sum_{m=0}^{n-1} U_m^T u_m\Bigr).$$ □

3. Конкретная интерпретация.

Задачу (1)—(4) редуцируем к задаче

$$L\ddot{u} = Mu + \varphi(t)f,$$
$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad u(T) = v,$$

взяв в качестве пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ либо пространства Соболева

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_p^{k+2}(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = W_p^k(\Omega),$$

либо пространства Гельдера

$$\mathfrak{U} = \{u \in C^{k+2+\mu}(\Omega) : u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}, \quad \mathfrak{F} = C^{k+\mu}(\Omega),$$

а операторы L и M определим формулами

$$L = \lambda - \Delta, \quad M = \alpha^2\Delta\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора Δ, занумерованные по убыванию с учетом их кратности, а через $\{\psi_k\}$ — соответствующее семейство ортонормированных собственных функций.

Лемма 6. *Оператор M является (L,σ)-ограниченным, причем ∞ является устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M (в случае $\lambda \in \sigma(\Delta)$).*

В силу $(L,0)$-ограниченности оператора M можно построить операторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda \neq \lambda_k, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, & \lambda = \lambda_k, \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, & \lambda \neq \lambda_k, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda=\lambda_k} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, & \lambda = \lambda_k \end{cases}$$

(заметим, что несмотря на «похожесть» проекторы P и Q определены на разных пространствах). Далее выберем $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, через I обозначим отрезок с концами в точках 0 и T. В силу следствий 1 и 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $T \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_k$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^{pn+n}([0;T];\mathbb{R})$ и любых векторов u_m, $v \in \mathfrak{U}$, удовлетворяющих условиям*

$$\varphi(T)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k = \varphi(0)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle v,\psi_k\rangle\psi_k, \quad \varphi(0) \neq 0, \quad \varphi(T) \neq 0,$$

а также

$$\int_0^T \varphi(s) \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}(T-s)\right) ds \neq 0$$

при $\lambda < \lambda_k$ *и*

$$\int_0^T \varphi(s) \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}(T-s)\right) ds \neq 0$$

при $\lambda > \lambda_k$*, существует единственное решение* (u, f) *обратной задачи* (1)—(4)*, представимое формулой*

$$u(t) = -\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle f,\psi_k\rangle + \sum_{\lambda<\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k \operatorname{ch}\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}} + \sum_{\lambda>\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k \cos\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}} +$$
$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda<\lambda_k}\langle u_1,\psi_k\rangle\psi_k\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}}\operatorname{sh}\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}} + \sum_{\lambda>\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k\sqrt{\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k}}\sin\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}} +$$
$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda<\lambda_k}\frac{\langle f,\psi_k\rangle}{\lambda_k}\psi_k\left(\operatorname{ch}\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}-1\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{\lambda>\lambda_k}\frac{\langle f,\psi_k\rangle}{\lambda_k}\psi_k\left(\cos\alpha t\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}-1\right),$$

где

$$\langle f,\psi_k\rangle = -\frac{\alpha^2\lambda\langle u_0,\psi_k\rangle}{\varphi(0)} \quad \textit{при} \quad \lambda=\lambda_k,$$

$$\langle f,\psi_k\rangle = (\lambda-\lambda_k)\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}\left(\int_0^T \varphi(s)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}(T-s)\right)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\langle v,\psi_k\rangle - \operatorname{ch}\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}T\langle u_0,\psi_k\rangle - \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}T\langle u_1,\psi_k\rangle\right) \quad \textit{при} \quad \lambda<\lambda_k,$$

$$\langle f,\psi_k\rangle = (\lambda-\lambda_k)\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}\left(\int_0^T \varphi(s)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}(T-s)\right)ds\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(\langle v,\psi_k\rangle - \cos\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}T\langle u_0,\psi_k\rangle - \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}}\sin\sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k}{-\lambda+\lambda_k}}T\langle u_1,\psi_k\rangle\right) \quad \textit{при} \quad \lambda>\lambda_k.$$

Замечание 1. В случае обратимости оператора L, т.е. если при всех k выполнено $\lambda \neq \lambda_k$, условия

$$\varphi(T)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle u_0,\psi_k\rangle\psi_k = \varphi(0)\sum_{\lambda=\lambda_k}\langle v,\psi_k\rangle\psi_k, \quad \varphi(0)\neq 0, \quad \varphi(T)\neq 0$$

исчезают, как и слагаемое $-\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum\limits_{\lambda=\lambda_k}\langle f,\psi_k\rangle$ в решении $u(t)$ уравнения.

В заключение отметим, что результаты раздела 2 без доказательств были опубликованы в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Замышляева А. А.* Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2012. — № 14. — С. 73–82.
2. *Мухаметьярова А. А.* Об одной обратной задаче для неполного уравнения соболевского типа высокого порядка// Мат. 3 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (Иркутск, 2021). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2021. — С. 67–71.
3. *Свиридюк Г. А., Баязитова А. А.* Обратная задача для уравнений Баренблатта—Желтова—Кочиной на графе// Сб. тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. — Новосибирск, 2007. — С. 244–250.
4. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev-type equations// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2004. — *12*, № 5. — P. 1–9.
5. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. — VSP: Utrecht, 1999.
6. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — Marcel Dekker: New York, 1999.
7. *Pyatkov S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems. — VSP: Utrecht–Boston–Tokyo, 2002.
8. *Romanov V. G.* Investigation Methods for Inverse Problems. — VSP: Utrecht–Boston–Tokyo, 2002.
9. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht: VSP, 2003.
10. *Zamyshlyaeva A. A., Lut A. V.* Inverse problem for Sobolev type mathematical models// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2019. — *12*, № 2. — С. 25–36.
11. *Zamyshlyaeva A. A., Muravyev A. S.* Inverse problem for Sobolev type equation of the second order// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. програм. — 2016. — *8*, № 3. — С. 5–12.

Мухаметьярова Альфия Адыгамовна
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет), Челябинск
E-mail: balfiya@mail.ru, baiazitovaaa@susu.ru