ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 63–71
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-63-71

УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2022 г. **А. К. КЕРИМБЕКОВ, Э. Ф. АБДЫЛДАЕВА, А. А. АНАРБЕКОВА**

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при минимизации кусочно линейного функционала в случае управления колебательными процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. Для функционала Беллмана получено интегро-дифференциальное уравнение специфического вида. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза распределенного и граничного управлений, изложена процедура определения управлений как функций (функционалов) от состояния управляемого процесса.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оператор Фредгольма, обобщенное решение, функционал Беллмана, дифференциал Фреше, синтез оптимального управления.

ON THE SOLVABILITY OF CONTROL SYNTHESIS PROBLEMS FOR NONLINEAR OSCILLATORY OPTIMIZATION PROCESSES DESCRIBED BY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2022 **A. K. KERIMBEKOV, E. F. ABDYLDAEVA, A. A. ANARBEKOVA**

Abstract. The solvability of synthesis problems for distributed and boundary controls in minimizing problems for piecewise linear functionals for oscillatory processes described by partial integro-differential equations with Fredholm integral operators are examined. For the Bellman functional, a specific integro-differential equation is obtained. An algorithm for constructing a solution of the control synthesis problem of distributed and boundary controls is described. A procedure for determining controls as functions (functionals) of the state of the controlled process is constructed.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Fredholm operator, generalized solution, Bellman functional, Fréchet differential, optimal control synthesis.

AMS Subject Classification: 49K20

1. Введение. Методы теории оптимизации систем с распределенными параметрами, разработанные при исследовании задач программного управления или задачи синтеза, все более проникают в различные области науки и техники. Об этом свидетельствует большой поток исследований задач оптимального управления процессами описываемыми уравнениями в частных производных [1–5, 11–16, 22].

Задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма (Вольтерра), также начинают привлекать исследователей. В этом направлении по исследованиям задач программного управления выполнено значительное количество работ [8–10, 18–21, 24, 25]. По изучению задачи синтеза можно отметить лишь работы [6,7,17–23], где на основе схемы Беллмана-Егорова изложена методика вывода уравнения типа Беллмана, которое является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением специфического вида. В работах [6,7] А. Керимбековым предложена структура его решения, согласно которой это уравнение распадается на два уравнения, одно из которых является независимым уравнением в частных производных. Это обстоятельство существенно упрощает процедуру построения решения задачи синтеза для управляемых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями.

В данной статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при минимизации кусочно-линейного функционала, в случае управления колебательными процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма. Функции внешнего и граничного воздействий нелинейны по управлению, которое является функциональной переменной. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза распределенного и граничного управлений, то есть изложена процедура определения управлений как функций (функционалов) от состояния управляемого процесса.

2. Постановка задачи синтеза. Рассмотрим задачу минимизации кусочно-линейного функционала

$$I\big[u(t,x),\vartheta(t,x)\big]=\int\limits_Q\Big[(v(T,x)-\xi_1(x))^2+(v_t(T,x)-\xi_2(x))^2\Big]dx+\\+\int\limits_0^T\left(\alpha\int\limits_Q|u(t,x)|dx+\beta\int\limits_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt,\quad \alpha,\beta>0 \tag{1}$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи

$$v_{tt}-Av=\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)],\quad x\in Q,\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi_1(x),\quad v_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q, \tag{3}$$

$$\Gamma v(t,x)\equiv\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\cos(\nu,x_i)+a(x)v(t,x)=p[t,x,\vartheta(t,x)],\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T, \tag{4}$$

где A — эллиптический оператор:

$$Av(t,x)=\sum_{i,k=1}^n(a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x))_{x_i}-c(x)v(t,x), \tag{5}$$

Q — область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно-гладкой кривой γ; $Q_T=Q\times[0,T)$; функции $K(t,\tau)\in H(D)$, $D=\{0\leqslant t,\tau\leqslant T\}$, $\xi_1(x)\in H(Q)$, $\xi_2(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $a_{ik}(x),a(x)\geqslant 0$, $c(x)\geqslant 0$ считаются известными; ν — вектор нормали, выходящей из точки $x\in\gamma$; $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q_T)$, для любого распределенного управления $u(t,x)\in H(Q_T)$, $p[t,x,\vartheta(t,x)]\in H(\gamma_T)$, для любого граничного управления $\vartheta(t,x)\in H(\gamma_T)$, $\gamma_T=\gamma\times(0,T)$; $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y; $H_1(Y)$ — пространство Соболева первого порядка; λ — параметр; T — фиксированный момент времени. Относительно функции внешнего и граничного воздействий будем считать, что

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0,\quad\forall(t,x)\in Q_T;\quad p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]\neq 0,\quad\forall(t,x)\in\gamma_T, \tag{6}$$

то есть функции являются монотонными по функциональной переменной.

Определение 1. Под обобщенным решением краевой задачи (2)—(6) понимается функция $v(t,x)\in H(Q_T)$, которая вместе с обобщенными производными $v_t(t,x)$ и $v_{x_i}(t,x)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_Q (v_t(t,x)\Phi(t,x))_{t_1}^{t_2} dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Biggl\{ \int\limits_Q \Biggl[v_t(t,x)\Phi_t(t,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) v_{x_k}(t,x)\Phi_{x_i}(t,x) -$$
$$-c(x)v(t,x)\Phi(t,x) + \Biggl(\lambda \int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)]\Phi(t,x) \Biggr) \Biggr] dx +$$
$$+ \int\limits_\gamma (p[t,x,\vartheta(t,x)]) - a(x)v(t,x)\Phi(t,x)dx \Biggr\} dt$$

при любых t_1 и t_2 $(0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant T)$ для любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(\tilde{Q}_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, то есть равенства

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_Q [v(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x)dx = 0, \quad \lim_{t\to 0} \int\limits_Q [v_t(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_1(x)dx = 0$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x) \in H(Q)$ и $\Phi_1(x) \in H(Q)$.

Теорема 1. *Краевая задача* (2)—(6) *при каждой паре управлений* $\{u(t,x), \vartheta(t,x)\} \in H(Q_T) \times H(\gamma_T)$ *имеет единственное обобщенное решение* $v(t,x) \in H_1(Q_T)$ *[7].*

Заметим, что согласно условиям (6) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства управлений $\{[u(t,x), \vartheta(t,x)]\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{v(t,x)\}$.

В задаче синтеза искомые управления $u^0(t,x) \in H(Q_T)$ и $\vartheta^0(t,x) \in H(\gamma_T)$ следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса, то есть в виде

$$u^0(t,x) = u[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x) \in Q_T,$$
$$\vartheta^0(t,x) = \vartheta[t,x,v(t,x),v_t(t,x)], \quad (t,x) \in \gamma_T.$$

3. О разрешимости задачи синтеза. Для функционала (1) определим функционал Беллмана в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = \min_{u\in U, \vartheta\in V} \Biggl\{ \int\limits_t^T \Biggl\{ \alpha \int\limits_Q |u(\tau,x)|dx + \beta \int\limits_\gamma |\vartheta(\tau,x)|dx \Biggr\} d\tau +$$
$$+ \int\limits_Q \|\omega(T,x) - \xi(x)\|^2 dx \Biggr\}, \quad \alpha,\beta > 0. \quad (7)$$

Здесь $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$ — вектор-функция состояния; а $\xi(x) = \{\xi_1(x), \xi_2(x)\}$ — вектор-функция желаемого состояния управляемого процесса в момент времени T; $\|.\|$ — норма вектора; U — множество допустимых значений управления $u(t,x), (t,x) \in Q_T$; V — множество допустимых значений управления $\vartheta(t,x)$, $(t,x) \in \gamma_T$.

Предполагая, что $S[t,x,\omega(t,x)]$ как функция, дифференцируема по t, а как функционал, дифференцируем по Фреше, согласно схеме Беллмана—Егорова [7], перепишем (7) в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t = \min_{u\in U, \vartheta\in V} \Biggl\{ \int\limits_t^T \Biggl(\alpha \int\limits_Q |u(\tau,x)|dx + \beta \int\limits_\gamma |\vartheta(\tau,x)|dx \Biggr) d\tau +$$
$$+ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] + o(\Delta t) + \delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] \Biggr\},$$

где $\Delta\omega(t,x) = \Delta\omega[t+\Delta t,x] - \omega[t,x]$, $ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — дифференциал Фреше, а $o(\Delta t)$ и $\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ — бесконечно малые величины относительно Δt. Поскольку дифференциал Фреше относительно $\Delta\omega(t,x) \in H^2(Q_T) = H(Q_T)\times H(Q_T)$, $(t,x)\in Q_T$, является линейным функционалом, то имеет место равенство

$$ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)] = \int\limits_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx \equiv \int\limits_Q (m_1(t,x)\Delta v(t,x) + m_2(t,x)\Delta v_t(t,x))dx,$$

где символ $*$ — знак транспонирования; вектор-функция $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$ и принадлежит пространству $H^2(Q_T) = H(Q_T)\times H(Q_T)$ почти при всех $(t,x)\in Q_T$. Заметим, что $m(t,x)$ определяется в зависимости от функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$, то есть

$$m(t,x) = m(t,x,S[t,x,\omega(t,x)]).$$

Согласно [7] искомое функциональное уравнение типа Беллмана получим в следующем виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_Q \Big(\alpha|u(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx +$$
$$+\int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q \left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right) m_2(t,x)dx +$$
$$+\int\limits_Q m_1(t,x)v_t(t,x) - \int\limits_Q \Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx -$$
$$-\int\limits_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx\Bigg\}, \quad (8)$$

которое имеет место почти для всех $(t,x)\in Q_T$ и $(t,x)\in\gamma_T$.

Используя разложения

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^\infty v_n(t)z_n(x), \quad v_n(t) = \int\limits_Q v(t,x)z_n(x)dx,$$
$$m_2(t,x) = \sum_{n=1}^\infty m_{2_j}(t)z_j(x), \quad m_{2_j}(t) = \int\limits_Q m_2(t,x)z_j(x)dx,$$

а также определение обобщенных собственных функций $z_n(x)$ [7], получим соотношение

$$\int\limits_Q \Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx + \int\limits_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx =$$
$$= \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\left\{\int\limits_Q \Big[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\Big]dx + \int\limits_\gamma a(x)v(t,x)z_j(x)dx\right\} =$$
$$= \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\lambda_j^2\int\limits_Q v(t,x)z_j(x)dx = \sum_{j=1}^\infty m_{2_j}(t)\lambda_j^2 v_j(t) = \int\limits_Q\int\limits_Q m_2(t,x)D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dydx,$$

где

$$D(\lambda^0,x,y) = \sum_{i=1}^\infty z_i(x)\lambda_i^2 z_i(y).$$

Теперь уравнение (8) перепишем в следующем виде:

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\Bigg\{\int\limits_{Q}\Big(\alpha|u(t,x)|+m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{\gamma}\Big(\beta|\vartheta(t,x)|+m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx+\int\limits_{Q}\left(\lambda\int\limits_{0}^{T}K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx+$$
$$+\int\limits_{Q}\left(m_1(t,x)v_t(t,x)-m_2(t,x)\int\limits_{Q}D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy\right)dx\Bigg\}. \quad (9)$$

Согласно (7) это уравнение будем рассматривать вместе с условием

$$S\big[T,x,\omega(T,x)\big]=\int\limits_{Q}\big\|\omega(T,x)-\xi(x)\big\|^2dx. \quad (10)$$

Таким образом, $S[t,x,\omega(t,x)]$ следует находить как решение задачи (9)—(10), которая называется задачей Коши—Беллмана. Для построения решения этой задачи сначала решаем задачу минимизации правой части уравнения (9).

Рассмотрим задачу минимизации в уравнении (9) в случае, когда U и V являются открытыми множествами. Применяя классический метод решения задачи на поиск экстремума, находим, что подозрительное на оптимальность распределенное управление $u^0(t,x)$ определяется следующим образом.

В области $Q_T^+\subset Q_T$, где $u(t,x)>0$, искомое управление $u_+^0(t,x)$ определяется согласно условиям оптимальности в виде равенства

$$a+m_2(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]=0,\quad (t,x)\in Q_T^+, \quad (11)$$

и дифференциального неравенства

$$m_2(t,x)f_{uu}[t,x,u(t,x)]>0,\quad (t,x)\in Q_T^+,$$

которые выполняются одновременно почти для всех $(t,x)\in Q_T^+$. Дифференциальное неравенство является трудно проверяемым условием. Однако согласно (11) его можно преобразовать к виду

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]<0,\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (12)$$

Пусть выполнены условия оптимальности (11) и (12). Тогда согласно теореме о неявных функциях из равенства (11) искомое управление определяется однозначно, т.е. существует такая однозначная функция $\varphi_1(\cdot)$, что

$$u_+^0(t,x)=\varphi_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha],\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (13)$$

Далее доказывается, что в области $Q_T^-\subset Q_T$, где $u(t,x)<0$, искомое управление $u_-^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$-a+m_2(t,x)f_u[t,x,u(t,x)]=0,\quad (t,x)\in Q_T^-, \quad (14)$$

и дифференциального неравенства

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]>0,\quad (t,x)\in Q_T^+. \quad (15)$$

Управление определяется по формуле

$$u_-^0(t,x)=\varphi_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha],\quad (t,x)\in Q_T^-, \quad (16)$$

где $\varphi_2(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (14).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть U является открытым множеством. Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ в области $Q_T^+ \subset Q_T$, где $u(t,x) > 0$, удовлетворяет условию* (12), *то существует функция $\varphi_1(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле* (13).

Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ в области $Q_T^- \subset Q_T$, где $u(t,x) < 0$, удовлетворяет условию (15), *то существует функция $\varphi_2(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле* (16).

Аналогично определяется подозрительное на оптимальность граничное управление $\vartheta_+^0(t,x)$.

В области $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) > 0$, искомое управление $\vartheta_+^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$\beta + m_2(t,x)p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^+, \tag{17}$$

и дифференциального неравенства

$$p_\vartheta^{-1}[t,x,\vartheta(t,x)]p_{\vartheta\vartheta}[t,x,\vartheta(t,x)] < 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^+. \tag{18}$$

Управление определяется по формуле

$$\vartheta_+^0(t,x) = h_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x) \in \gamma_T^+, \tag{19}$$

где $h_1(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (17).

В области $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) < 0$, искомое управление $\vartheta_-^0(t,x)$ удовлетворяет условиям оптимальности в виде равенства

$$-\beta + m_2(t,x)p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^-, \tag{20}$$

и дифференциального неравенства

$$p_\vartheta^{-1}[t,x,\vartheta(t,x)]f_{\vartheta\vartheta}[t,x,\vartheta(t,x)] > 0, \quad (t,x) \in \gamma_T^-. \tag{21}$$

Управление определяется по формуле

$$\vartheta_-^0(t,x) = h_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x) \in \gamma_T^-, \tag{22}$$

где $h_2(\cdot)$ — функция, однозначно определяемая из равенства (20). Относительно граничного управления имеет место утверждение

Теорема 3. *Пусть множество V является открытым. Если функция $p[t,x,\vartheta(t,x)]$ в области $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) > 0$, удовлетворяет условию* (18), *то существует функция $h_1(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле* (19).

Если функция $p[t,x,\vartheta(t,x)]$ в области $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x) < 0$, удовлетворяет условию (21), *то существует функция $h_2(\cdot)$, которая однозначно осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле* (22).

Заметим, что уравнение типа Беллмана (9), полученное согласно схеме Беллмана—Егорова, определяет необходимое условие оптимальности искомого управления. При определенных условиях его можно рассматривать и как достаточное условие оптимальности. Пусть время T свободно, и конечное состояние $\omega(T,x)$ принадлежит некоторому множеству цели $\tilde{H}(Q)$. В пространстве состояний $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$, где $v(t,x) \in H(Q_T)$, $v_t(t,x) \in H(Q_T)$, определим функцию $S[t,x,\omega(t,x)]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(i) $S[t,x,\omega(t,x)]$, как функция, дифференцируема по переменной t.

(ii) $S[t,x,\omega(t,x)]$, как функционал по векторной переменной состояния $\omega(t,x)$, дифференцируем по Фреше и имеет градиент $m(t,x) = \{m_1(t,x), m_2(t,x)\}$, где $m_1(t,x)$ — элемент гильбертова пространства квадратично-суммируемых функций $H(Q_T)$, $m_2(t,x)$ — элемент соболевского пространства $H_1(Q_T)$.

(iii) Для произвольного момента времени $t \in (0,T)$ и любого вектора $\omega(t,x)$ пространства состояний $H(Q_T) \times H(Q_T)$ выражение

$$B[t,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x),m(t,x)] = \\ = \frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \Big(\alpha|u(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u(t,x)\big]\Big)dx + \\ + \int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q \left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right) m_2(t,x)dx + \\ + \int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy\right)dx$$

достигает абсолютного минимума при условии, что допустимая пара $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}$ управлений оптимальна, то есть

$$B\big[t,\omega(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x),m(t,x)\big] > B\big[t,\omega(t,x),u^0(t,x),\vartheta^0(t,x),m(t,x)\big] = 0, \qquad (23)$$

где оптимальная пара $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ — единственным образом определяет оптимальный процесс $\omega^0(t,x) = \{v^0(t,x),v_t^0(t,x)\}$.

(iv) На множестве цели $\tilde H(Q)$ выполняется соотношение $S[T,x,\omega(T,x)] = \|\omega(T,x)-\xi(x)\|^2_{H(Q)}$.

Если условия (i)—(iv) выполнены, то

$$S[t,x,\omega(t,x)] = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int\limits_t^T\left\{\alpha\int\limits_Q|u(\tau,x)|dx + \beta\int\limits_\gamma|\vartheta(\tau,x)|dx\right\}d\tau + \int\limits_Q\|\omega(T,x)-\xi(x)\|_{R^2}dx\right\},$$

то есть $S[t,x,\omega(T,x)]$ является минимумом по векторному управлению $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}$ результата интегрирования целевой функции по переменной времени в промежутке от t до T.

Для доказательства этого утверждения интегрируем правую часть соотношения (23), полагая, что $\omega(t,x)\equiv\omega^0(t,x)$ — оптимальный процесс, соответствующий оптимальной паре управлений $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$. Получим соотношение

$$\int\limits_t^T \beta\Big[\tau,\omega^0(\tau,x),u^0(\tau,x),\vartheta^0(t,x),m(\tau,x)\Big]d\tau = 0.$$

Далее рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int\limits_t^T B\Big[t,\omega(\tau,x),m(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x)\Big]d\tau,$$

который достигает минимального значения только при оптимальной паре управлений $\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ и оптимальном процессе $\omega^0(t,x)=\{v^0(t,x),v_t^0(t,x)\}$. Если это не так, то найдутся пара управлений $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}\neq\{u^0(t,x),\vartheta^0(t,x)\}$ и процесс $\omega(t,x)\neq\omega^0(t,x)$, такие, что при любом t интеграл $I(t)$ будет равен нулю. Тогда в силу произвольности t подынтегральное выражение тождественно равно нулю, что противоречит условию $B[t,\omega(t,x),m(t,x),u(t,x),\vartheta(t,x)]>0$.

Полученное уравнение типа Беллмана (9) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением сложной природы. При $u(t,x)\equiv u^0(t,x)$ и $\vartheta(t,x)\equiv\vartheta^0(t,x)$ оно «упрощается» и имеет вид

$$\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q\Big(\alpha|u^0(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u^0(t,x)\big]\Big)dx + \\ + \int\limits_\gamma\Big(\beta|\vartheta^0(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta^0(t,x)\big]\Big)dx + \int\limits_Q\left(\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)v^0(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx +$$

$$+\int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t^0(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v^0(t,y)dy \right) dx = 0. \quad (24)$$

Следуя методике работы [7], решение уравнения (24) будем искать в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)] = S_0[t,x,\omega(t,x)] + \lambda S[t,x,\omega(t,x)], \quad (25)$$

где $S_0[t,x,\omega(t,x)]$ и $S_1[t,x,\omega(t,x)]$ — неизвестные функции, а λ — параметр уравнения (2). Подставим (25) в (24). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial S_0[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \Big(\alpha|u^0(t,x)| + m_2(t,x)f\big[t,x,u^0(t,x)\big]\Big)dx +$$

$$+\int\limits_\gamma \Big(\beta|\vartheta^0(t,x)| + m_2(t,x)p\big[t,x,\vartheta^0(t,x)\big]\Big)dx +$$

$$+\int\limits_Q \left(m_1(t,x)v_t^0(t,x) - m_2(t,x)\int\limits_Q D(\lambda^0,x,y)v(t,y)dy \right) dx, \quad (26)$$

$$\frac{\partial S_1[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} + \int\limits_Q \left(m_2(t,x)\int\limits_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau \right) dx = 0. \quad (27)$$

Из (10) и (25) вытекает, что уравнение (26) следует рассматривать вместе с дополнительным условием

$$S_0\big[T,x,\omega(T,x)\big] = \int\limits_Q \big\|\omega(T,x) - \xi(x)\big\|^2_{\mathbb{R}^2} dx,$$

а уравнение (27) — с дополнительным условием $S_1\big[T,x,\omega(T,x)\big] = 0$. Таким образом, если U и V открытые множества, то удается более или менее полно исследовать разрешимость задачи синтеза и разработать алгоритм построения оптимальных управлений $u^0[t,x,\omega(t,x)]$ и $\vartheta^0[t,x,\omega(t,x)]$ в зависимости от состояния управляемого процесса $\omega(t,x) = \{v(t,x), v_t(t,x)\}$.

4. Заключение. В заключение отметим, что синтез оптимального управления осуществляется как только будет найден градиент функционала Беллмана. Это довольно трудная задача, ибо градиент остается неизвестным пока не будет найден функционал Беллмана как решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения сложной природы. Тем не менее, при исследовании простейших прикладных задач по изложенной методике решение задачи синтеза удается довести до численных расчетов [23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. — М.: Физматлит, 2007.
2. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Егоров А. И., Знаменская Л. Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. — СПб.: Лань, 2017.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. — Бишкек: Илим, 2003.
6. *Керимбеков А.* Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *183.* — С. 85–97.

7. *Керимбеков А.* О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 2. — С. 128–140.
8. *Керимбеков А., Абдылдаева Э. Ф* О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 163–176.
9. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *15*. — С. 50–61.
10. *Керимбеков А., Наметкулова Р. Ж., Кадиримбетова А. К.* Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — *16*. — С. 71–78.
11. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — М.: Физматлит, 1972.
12. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977.
13. *Arguchintsev A. V., Kedrina M. S.* Determination of functional parameters in boundary conditions of linear hyperbolic systems by optimal control methods// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012014.
14. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by parabolic equation with boundary smooth control and an integral constraint// Num. Alg. Contr. Optim. — 2018. — *8*, № 2. — P. 193–202.
15. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations// Games. — 2021. — *12*, № 1. — 23.
16. *Arguchintsev A., Poplevko P.* An optimal control problem by a hyperbolic system with boundary delay// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2021. — *35*. — С. 3–17.
17. *Egorov A. I.* Optimal stabilization of systems with distributed parameters// Optim. Tech. IFIP Tech. Conf. — 1975. — *27*. — P. 167–172.
18. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations// Eurasian Math. — 2015. — *26*. — P. 28–40.
19. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// 27th IFIP Conf. on System Modeling and Optimization. — Sophia Antipolis, France: Springer, 2016. — P. 312–321.
20. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F.* The optimal vector control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations// in: Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries. — Springer, 2019. — P. 14–30.
21. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F., Duyshenalieva U. E.* Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces// Int. J. Pure Appl. Math. — 2017. — *113*, № 4. — P. 87–101.
22. *Kerimbekov A., Seidakmat E.* On solvability of tracking problem under nonlinear boundary control// 11th ISAAC Congr. “Analysis, Probability, Applications, and Computation”. — Springer, 2019. — P. 312–321.
23. *Kerimbekov A., Tairova O. K.* On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes// IFAC-PapersOnLine. — 2018. — *51*. — P. 754–758.
24. *Sachs E. W., Strauss A. K.* Efficient solution of a partial integro-differntial equation in finance// Appl. Numer. Math. — 2008. — *58*, № 11. — P. 1687–1703.
25. *Thorwe J., Bhaleker S.* Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method// Am. J. Comput. Appl. Math. — 2012. — *2*, № 3. — P. 101–104.

Керимбеков Акылбек Керимбекович
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина, Бишкек, Киргизия
E-mail: `akl7@rambler.ru`

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна
Кыргызско-Турецкий университет Манас, Бишкек, Киргизия
E-mail: `efa69@mail.ru`

Анарбекова Айтолкун Анарбековна
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина, Бишкек, Киргизия
E-mail: `totita@list.ru`