ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 213 (2022). С. 54–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-213-54-62

УДК 517.957

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ» В СЛУЧАЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОСТЯХ ОБЩЕГО ВИДА

© 2022 г. **А. Л. КАЗАКОВ, П. А. КУЗНЕЦОВ, Л. Ф. СПЕВАК**

Аннотация. В статье рассмотрена система «реакция-диффузия» с нелинейностями общего вида в случаях цилиндрической и сферической симметрии. Для указанной системы построено решение типа диффузионных волн, имеющих конечную скорость распространения по нулевому фону. Решение представлено в виде рядов Тейлора с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Сходимость доказана методом мажорант с использованием теоремы Коши—Ковалевской. Исследование дополнено численными расчетами, выполненными на основе разложений по радиальным базисным функциям. Статья продолжает цикл работ авторов, посвященных построению и исследованию решений типа волн в классе аналитических функций.

Ключевые слова: система «реакция-диффузия», диффузионная волна, степенной ряд, метод мажорант, радиальные базисные функции, вычислительный эксперимент.

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO A DEGENERATE REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH A GENERAL NONLINEARITY IN THE CASES OF CYLINDRICAL AND SPHERICAL SYMMETRY

© 2022 **A. L. KAZAKOV, P. A. KUZNETSOV, L. F. SPEVAK**

Abstract. We consider a reaction-diffusion system with a general nonlinearity with cylindrical or spherical symmetry. For this system, we find a solution of the diffusion-wave type propagating over a zero background with a finite velocity. The solution is constructed as a Taylor series with recurrent coefficients whose convergence is proved by the majorant method and the Cauchy–Kovalevskaya theorem. The research is supplemented by numerical calculations based on the expansion in radial basis functions. This paper continues a series of our publications devoted to the study of wave-type solutions in the class of analytical functions.

Keywords and phrases: reaction-diffusion system, diffusion wave, power series, majorant method, radial basis functions, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K57, 35K40

Результаты получены в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

1. Введение. В статье рассматривается система нелинейных параболических уравнений второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} T_t &= [\Phi(T)T_x]_x + \Gamma(T,S),\\ S_t &= [\Psi(S)S_x]_x + \Lambda(S,T). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t, x — независимые переменные; $T(t,x)$ и $S(t,x)$ — искомые функции; $\Phi(T)$, $\Psi(S)$, $\Gamma(T,S)$, $\Lambda(S,T)$ — известные достаточно гладкие функции, причем $\Gamma(0,0) = \Lambda(0,0) = 0$.

Системы вида (1) используются для описания тепломассопереноса [21], а также диффузионных и реакционно-диффузионных процессов [8,10]. Уравнения, составляющие систему (1), используются также при описании механизмов лучистой теплопроводности [1], фильтрации жидкостей и газов [13,22], популяционной динамики [9,20] и др.

Отметим, что при $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ параболический тип уравнений (1) вырождается. Такое вырождение, в частности, наблюдается в случае степенных функций

$$\Phi(T) = T^\sigma, \quad \Psi(S) = S^\delta, \quad \sigma, \delta > 0 - \mathrm{const}. \tag{2}$$

Системы (1) со степенными нелинейностями (2) применяются в химической кинетике для описания процессов «реакция-диффузия» [14,19], они удобны тем, что дают хорошее приближение к реальности при сравнительной простоте исследования.

Интересный класс решений системы (1) составляют диффузионные (фильтрационные, тепловые) волны, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью. В случае одного уравнения такие волны представляют собой тривиальное и нетривиальное решения, непрерывно состыкованные на некоторой кривой или поверхности (фронт волны). Среди работ, посвященных построению и исследованию таких решений можно отметить монографии Я. Б. Зельдовича [1] и А. А. Самарского [6]. Особо выделим исследования, проводимые в научной школе А. Ф. Сидорова [7], в которых, в частности, предложены постановки краевых задач, предполагающих инициирование волны по известному заранее компоненту (например, фронту), а также алгоритмы построения решений этих задач в виде специальных [11] и характеристических рядов [12] и др. Исследования разрешимости подобных одномерных и неодномерных задач также проводились авторами, при этом рассматривались как отдельные уравнения [3,17], так и системы [4,16]. В ряде работ авторов также предложены алгоритмы построения численных решений уравнений [17,18] и систем [4,5] на основе метода граничных элементов (МГЭ) и разложений по радиальным базисным функциям (РБФ).

В развитие результатов, полученных авторами ранее [4,5], в настоящей статье изучена задача с заданным фронтом для обобщенной системы «реакция-диффузия» в случаях цилиндрической и сферической симметрии [15]. Доказана теорема существования ее аналитического решения. Последнее построено в виде рядов Тейлора по степеням пространственных переменных. Предложен пошаговый алгоритм построения численного решения на заданном промежутке времени, основанный на разложении по РБФ. Выполнен вычислительный эксперимент.

2. Постановка задачи. Систему (1) в случае простейших пространственных симметрий можно привести (см. [4]) к виду

$$\begin{aligned} u_t &= uu_{xx} + P(u)u_x^2 + \frac{\mu}{x}uu_x + F(u,v),\\ v_t &= vv_{xx} + Q(v)v_x^2 + \frac{\mu}{x}vv_x + G(v,u), \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь u, v — искомые функции; P, Q, F, G — известные достаточно гладкие функции, такие, что $P(0), Q(0) > 0$ и $F(0,0) = G(0,0) = 0$; μ — параметр, который принимает значения 1, 2 в случаях цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Плоскосимметричный случай $\mu = 0$ был рассмотрен ранее в статье [4].

Систему (3) будем рассматривать вкупе с краевым условием

$$u(t,x)|_{x=a(t)} = v(t,x)|_{x=a(t)} = 0, \tag{4}$$

предполагая, что фронт волны $x = a(t)$ задан достаточно гладкой функцией $a(t)$, причем $a(0) > 0$, $a'(0) \neq 0$.

Будем строить решение задачи (3), (4) в виде характеристических рядов. Для удобства построения сделаем замену переменной $z = x - a(t)$, после которой характеристические ряды становятся рядами Тейлора. Задача (3), (4) примет вид

$$\begin{aligned} u_t - a'u_z &= uu_{zz} + P(u)u_z^2 + \frac{\mu}{z+a}uu_z + F(u,v), \\ v_t - a'v_z &= vv_{zz} + Q(v)v_z^2 + \frac{\mu}{z+a}vv_z + G(v,u), \end{aligned} \tag{5}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $P(u)$, $Q(v)$, $F(u,v)$, $G(v,u)$, $a(t)$ — функции, аналитические при $u = 0$, $v = 0$, $u = v = 0$, $t = 0$ соответственно. Пусть также выполняется одно из следующих условий:*

$$u_z(t,0), v_z(t,0) \not\equiv 0, \tag{7}$$

$$u_z(t,0), v_z(t,0) \equiv 0. \tag{8}$$

Тогда

(i) *задача (5), (6), (7) имеет единственное аналитическое решение (нетривиальное);*
(ii) *задача (5), (6), (8) имеет единственное аналитическое решение (тривиальное).*

Отметим, что упомянутые в теореме нетривиальное и тривиальное решения соединяются на фронте $z = 0$ и образуют диффузионную волну.

Доказательство теоремы делится на два этапа: построение формальных рядов и доказательство их сходимости.

3. Построение решения. На первом этапе строится решение задачи (5), (6) в виде рядов Тейлора

$$\begin{aligned} u(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\frac{z^n}{n!}, \qquad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}, \\ v(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)\frac{z^n}{n!}; \qquad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}, \end{aligned} \tag{9}$$

коэффициенты которых определяются по рекуррентной процедуре.

Из краевого условия (6) следует тождество $u_0, v_0 \equiv 0$. Чтобы определить коэффициенты $u_1(t)$ и $v_1(t)$, положим в каждом уравнении системы (5) $z = 0$. Полученная система

$$-a'u_1 = P(0)u_1^2, \quad -a'v_1 = Q(0)v_1^2$$

имеет четыре решения, только два из которых подпадают под условия (7), (8). Конкретно, это решения

$$\left[\begin{aligned} &u_1 \equiv 0, && v_1 \equiv 0, \\ &u_1 = -\frac{a'}{P(0)}, && v_1 = -\frac{a'}{Q(0)}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Применив к каждому уравнению системы (5) оператор

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\bigg|_{z=0},$$

получим равенства

$$\begin{aligned} u_n' - a'u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k P_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} + \\ + \mu \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_l u_{k+1-l} + F_n, \end{aligned} \tag{11a}$$

$$v_n' - a'v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_k v_{n+2-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k Q_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_{l+1} v_{k+1-l} + \\ + \mu \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_l v_{k+1-l} + G_n, \quad (11b)$$

в которых использованы обозначения

$$P_{n-k} = \left.\frac{\partial^{n-k} P(u)}{\partial z^{n-k}}\right|_{z=0}, \quad Q_{n-k} = \left.\frac{\partial^{n-k} Q(v)}{\partial z^{n-k}}\right|_{z=0}, \quad F_n = \left.\frac{\partial^n F(u,v)}{\partial z^n}\right|_{z=0}, \quad G_n = \left.\frac{\partial^n G(v,u)}{\partial z^n}\right|_{z=0}.$$

Положив $n = 1$ в (11), получим формулы

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{a' + u_1 + 2P_0 u_1}\left(u_1' - P_1 u_1^2 - \frac{\mu}{a} u_1^2 - F_1\right), \\ v_2 &= \frac{1}{a' + v_1 + 2Q_0 v_1}\left(v_1' - Q_1 v_1^2 - \frac{\mu}{a} v_1^2 - G_1\right), \end{aligned} \quad (12)$$

из которых при известных u_1, v_2 однозначно определяются u_2, v_2.

Аналогично, положив $n = 2$ в (11), получим формулы коэффициентов u_3 и v_3. Следуя такому алгоритму, выведем общую формулу для $n \geqslant 3$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{a' + nu_1 + 2P_0 u_1}\Bigg[u_n' - \sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k u_{n+2-k} - P_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l u_{l+1} u_{n+1-l} - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k P_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l u_{l+1} u_{k+1-l} - \mu \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=1}^{k} C_k^l u_l u_{k+1-l} - F_n\Bigg], \quad (13a)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{a' + nv_1 + 2Q_0 v_1}\Bigg[v_n' - \sum_{k=2}^{n} C_n^k v_k v_{n+2-k} - Q_0 \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l v_{l+1} v_{n+1-l} - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k Q_{n-k} \sum_{l=0}^{k} C_k^l v_{l+1} v_{k+1-l} - \mu \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{a^{n+1-k}} \sum_{l=1}^{k} C_k^l v_l v_{k+1-l} - G_n\Bigg]. \quad (13b)$$

Таким образом, коэффициенты рядов (9) определяются согласно формулам $u_0, v_0 \equiv 0$, (10), (12), (13).

Несложно показать, что выбор $u_1, v_1 \equiv 0$ (см. (10)) дает нам тривиальное решение задачи (5), (6), (8). При выборе $u_1 = -a'/P(0)$, $v_1 = -a'/Q(0)$ мы можем говорить лишь о том, что если аналитическое решение задачи (5), (6), (7) существует, то оно нетривиально и единственно. Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать сходимость формальных рядов (9).

4. Построение мажорантной задачи. Сходимость будем доказывать методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи сделаем в (5), (6) замену

$$u(t,z) = u_1 z + z^2 U(t,z), \quad v(t,z) = v_1 z + z^2 V(t,z), \quad (14)$$

которая представляет собой частичное разложение искомых функций в ряды Тейлора (9). При такой замене отпадает необходимость рассматривать краевое условие (6), так как оно выполняется автоматически. После приведения подобных и деления на z, задачу (5), (6) можно свести к системе

$$2U(1+P_0) + (4+P_0)zU_z + z^2 U_{zz} = \\ = f_0(t) + zf_1(t,U,U_t,V) + z^2 f_2(t,U,V,U_z) + z^3 f_3(t,z,U,V,U_z,U_{zz}), \quad (15a)$$

$$2V(1+Q_0) + (4+Q_0)zV_z + z^2 V_{zz} = \\ = g_0(t) + zg_1(t,V,V_t,U) + z^2 g_2(t,V,U,V_z) + z^3 g_3(t,z,V,U,V_z,V_{zz}), \quad (15b)$$

в которой f_i, g_i, $i = 0, 1, 2, 3$ — известные аналитические функции своих переменных. Более подробно вывод системы (15) представлен в статье [4].

Решения уравнений можно представить в виде рядов Тейлора

$$
\begin{aligned}
U(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad U_n = \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)};\\
V(t,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\frac{z^n}{n!}, \quad V_n = \frac{v_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Так как все эти коэффициенты, а также функции f_i, g_i, $i = 0, 1, 2, 3$, аналитичны, то для них можно построить мажоранты. При выполнении мажорантных оценок

$$
U_0(t), V_0(t) \ll W_0(t); \quad U_1(t), V_1(t) \ll W_1(t);
$$
$$
f_1(t,U,U_t,V), g_1(t,V,V_t,U) \ll h_1(t,W,W_t,W); \quad f_2(t,U,V,U_z), g_2(t,U,V,U_z) \ll h_2(t,W,W,W_z);
$$
$$
f_3(t,z,U,V,U_z,U_{zz}), g_3(t,z,U,V,U_z,U_{zz}) \ll h_3(t,z,W,W,W_z,W_{zz})
$$

решение задачи

$$
W_{zz} = \frac{\partial h_1(t,W,W_t,W)}{\partial z} + h_2(t,W,W,W_z) + z h_3(t,z,W,W,W_z,W_{zz}), \tag{17}
$$
$$
W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t) \tag{18}
$$

мажорирует решение задачи (15), в чем можно убедиться, построив его в виде ряда Тейлора

$$
W(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\frac{z^n}{n!}.
$$

Отсюда следует, что задача (17), (18) будет мажорантной для (15). Сводя (17), (18) к задаче типа Ковалевской, продифференцируем уравнение (17) по z, разрешим его относительно W_{zzz} и добавим третье краевое условие $W_{zz}(t,0) = W_2(t)$. При этом, чтобы не возникло путаницы, по какой именно переменной идет дифференцирование, используем обозначение $h_3 = h_3(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Задача (17), (18) примет вид

$$
W_{zzz} = \frac{1}{1 - z\frac{\partial h_3}{\partial y_5}}\left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial z^2} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + h_3 + z\frac{\partial h_3}{\partial y_1} + z\frac{\partial h_3}{\partial y_2}W_z + z\frac{\partial h_3}{\partial y_3}W_z + z\frac{\partial h_3}{\partial y_4}W_{zz}\right), \tag{19}
$$
$$
W(t,z)|_{z=0} = W_0(t), \quad W_z(t,z)|_{z=0} = W_1(t), \quad W_{zz}(t,z)|_{z=0} = W_2(t). \tag{20}
$$

Теперь мы имеем задачу (19), (20) типа Ковалевской с аналитическими входными данными. По теореме Коши—Ковалевской получаем, что ряды (16) и (9) имеют ненулевой радиус сходимости. Теорема доказана.

5. Построение численного решения. Построенное решение задачи (3), (4) является локальным, причем оценить радиус сходимости рядов (т.е. область существования решения) в общем случае невозможно. В связи с этим является актуальной задача построения приближенных решений на заданном промежутке времени $t \in [0, T]$. При этом для тестирования последних могут быть использованы отрезки рядов, для которых показана численная сходимость.

В произвольный момент времени $t > 0$ задача (3), (4) может быть представлена в виде задачи Коши для системы двух уравнений Пуассона

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{1}{u}\left[u_t - P(u)u_x^2 - \frac{\mu}{x}u u_x - F(u,v)\right],\\
v_{xx} &= \frac{1}{v}\left[v_t - Q(u)u_x^2 + \frac{\mu}{x}v v_x - G(u,v)\right],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
u|_{x=a(t)} = v|_{x=a(t)} = 0, \quad u_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{P(0)}, \quad v_x|_{x=a(t)} = -\frac{a'(t)}{Q(0)}. \tag{22}
$$

Условия для производных в (22) следуют из (10).

Разобьем отрезок $[0,T]$ на шаги размером h. Решение задачи (3), (4) на шаге $t=t_k=kh$ будем искать в виде

$$u(t_k,x)=U(x)+U_p(x), v(t_k,x)=V(x)+V_p(x), \tag{23}$$

где $(U_p(x),V_p(x))$ — частное решение системы (21) в момент времени $t=t_k$, а $(U(x),V(x))$ — решение следующей задачи Коши для однородной системы:

$$\begin{gathered} U''=0, \quad V''=0, \\ U|_{x=L}=-U_p(L), \quad U'|_{x=L}=-\frac{a'(t_k)}{P(0)}-U_p'(L), \\ V|_{x=L}=-V_p(L), \quad V'|_{x=L}=-\frac{a'(t_k)}{Q(0)}-V_p'(L). \end{gathered} \tag{24}$$

Здесь $L=a(t_k)$, решение (23) строится на отрезке $x\in[0,L]$. При найденном частном решении $(U_p(x),V_p(x))$ решение задачи (24) в виде двух линейных функций определяется однозначно.

Следуя подходу, предложенному в [5], выберем некоторую систему РБФ $f_i(x)=f_i(|x-x_i|)$, $i=1,\dots,m$, где $x_1,x_2,\dots,x_m$ — точки коллокации, лежащие на отрезке $[0,L]$. Для каждой функции $f_i(x)$ существует такая функция $\widehat{u}_i$, что $f_i=\partial^2\widehat{u}_i/\partial x^2$. Определять частное решение будем итерационно, при нулевых начальных приближениях ($U_p^{(0)}\equiv 0, V_p^{(0)}\equiv 0$). На $(n+1)$-й итерации правые части уравнений (21) для n-й итерации разложим по системе РБФ

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^{(n)}}\left[u_t^{(n)}-\frac{1}{\sigma}(u_x^{(n)})^2-F(u^{(n)},v^{(n)})\right]&=\sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)}f_i(x), \\ \frac{1}{v^{(n)}}\left[v_t^{(n)}-\frac{1}{\sigma}(v_x^{(n)})^2-G(u^{(n)},v^{(n)})\right]&=\sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)}f_i(x), \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} u^{(n)}&=U^{(n)}+U_p^{(n)}, \quad U^{(n)}=-\left(\frac{a'(t_k)}{P(0)}+U_p^{(n)'}(L)\right)x-U_p^{(n)}(L), \\ v^{(n)}&=V^{(n)}+V_p^{(n)}, \quad V^{(n)}=-\left(\frac{a'(t_k)}{Q(0)}+V_p^{(n)'}(L)\right)x-V_p^{(n)}(L). \end{aligned}$$

Записав равенства (25) во всех точках коллокации, получим две системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\alpha_i^{(n+1)}$, $\beta_i^{(n+1)}$, $i=1,\dots,m$. Найденные коэффициенты определят $(n+1)$-ю итерацию частного решения

$$U_p^{(n+1)}(x)=\sum_{i=1}^m \alpha_i^{(n+1)}\widehat{u}_i(x), \quad V_p^{(n+1)}(x)=\sum_{i=1}^m \beta_i^{(n+1)}\widehat{u}_i(x).$$

Итерационный процесс останавливается тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{|U_p^{(n+1)}-U_p^{(n)}|}{|U_p^{(n+1)}|}<\varepsilon, \quad \frac{|V_p^{(n+1)}-V_p^{(n)}|}{|V_p^{(n+1)}|}<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — заданная точность. Тогда в качестве решения задачи (3), (4) в момент $t=t_k$ принимаются функции $u(t_k,x)=u^{(n+1)}(x)$, $v(t_k,x)=v^{(n+1)}(x)$, непрерывные по x.

6. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим задачу (3), (4) с цилиндрической симметрией ($\mu=1$) при $P(u)=\sigma/(\sigma+u)$, $Q(v)=\delta/(\delta+v)$, где σ, δ — положительные константы, $F(u,v)=v^3$, $G(u,v)=u$, $a(t)=R+ct$. Данный вид функций $P(u)$ и $Q(v)$ соответствует показательным функциям $\Phi(T)$ и $\Psi(S)$.

Приближенные решения были построены при следующих значениях параметров: $\sigma=3$, $\delta=1$, $R=1$, $c=1$. В табл. 1 приведены значения искомых функций при $t=1$ в точке $x=a(0)=1$, где наблюдается наибольшее различие решений, что соответствует виду заданного граничного условия. Сравнение значений функций u и v, полученных с использованием отрезков рядов различных степеней N, и РБФ-решений при различных размерах шага по времени h и количествах точек

Таблица 1. Сравнение численных решений с отрезками рядов, $mu = 1$.

Решение	$u(1,1)$	$v(1,1)$
Ряд, $N = 3$	1,26119	1,09144
Ряд, $N = 5$	1,21205	1,11159
Ряд, $N = 10$	1,21444	1,11594
Ряд, $N = 15$	1,21445	1,11600
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 17$	1,19674	1,10956
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 33$	1,19846	1,11039
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 17$	1,20294	1,11186
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 33$	1,20499	1,11290
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 17$	1,20665	1,11306
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 33$	1,20884	1,11420
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 17$	1,20902	1,11374
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 33$	1,21141	1,11497

Таблица 2. Сравнение численных решений с отрезками рядов, $mu = 2$.

Решение	$u(1,1)$	$v(1,1)$
Ряд, $N = 3$	1,46142	1,32407
Ряд, $N = 5$	1,45943	1,40775
Ряд, $N = 10$	1,45891	1,43331
Ряд, $N = 15$	1,45853	1,43403
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 17$	1,42469	1,39890
Численное, $h = 0{,}1$, $m = 33$	1,42767	1,40117
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 17$	1,43692	1,41214
Численное, $h = 0{,}05$, $m = 33$	1,44046	1,41505
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 17$	1,44417	1,41999
Численное, $h = 0{,}025$, $m = 33$	1,44793	1,42317
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 17$	1,44843	1,42503
Численное, $h = 0{,}01$, $m = 33$	1,45291	1,42853

коллокации m, приводит к следующим выводам. На рассмотренном интервале времени наблюдается численная сходимость рядов, что позволяет использовать их для верификации численных решений. Численные решения сходятся к аналитическому относительно шага по времени и числа точек коллокации, что свидетельствует о корректности предложенного численного алгоритма, основанного на разложении по РБФ.

Аналогичные расчеты были проведены для задачи (3), (4) со сферической симметрией ($\mu = 2$) для аналогичных функций P, Q, R, G, a и тех же значениях числовых параметров. Результаты решения, приведенные в табл. 2, подтверждают заключения, сделанные для первого примера.

Таким образом, численный алгоритм, использующий радиальные базисные функции, позволяет с хорошей точностью строить приближенные решения рассмотренной задачи.

7. Заключение. Подводя итог, отметим, что главным результатом проведенного исследования является то, что авторам удалось обобщить результаты, полученные ранее в плоскосимметричном случае [4], на случаи цилиндрической и сферической симметрии. Доказана новая теорема существования решений, имеющих тип диффузионной волны, для нелинейной вырождающейся параболической системы достаточно общего вида. Предложен пошаговый алгоритм построения численного решения, основанный на разложении по радиальным базисным функциям, для тестирования которого использованы отрезки построенных сходящихся рядов. Тем самым усовершенствован математический и алгоритмический инструментарий исследования нелинейных вырождающихся задач математической физики, которые имеют многочисленные содержательные приложения.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть посвящены построению точных решений [2] задачи (3), (4), которые являются более гибким инструментом для тестирования численных алгоритмов, чем отрезки рядов, а также позволяют описать качественное поведение соответствующих диффузионных волн. Кроме того, могут быть рассмотрены более общие постановки задач, например, когда усложняются краевые условия, или система имеет более высокую размерность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
2. *Казаков А. Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1057–1068.
3. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах// Сиб. ж. индустр. мат. — 2018. — *21*, № 2(74). — С. 56–65.
4. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф.* Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы// Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — *24*, № 4. — С. 1–13.
5. *Казаков А. Л., Спевак Л. Ф.* Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия// Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — *62*, № 4. — С. 169–180.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
7. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
8. *Cherniha R., Davydovych V.* Nonlinear reaction-diffusion systems with a non-constant diffusivity: Conditional symmetries in no-go case// Appl. Math. Comput. — 2015. — *268*. — P. 23–34.
9. *Colombo E. H., Anteneodo C.* Nonlinear population dynamics in a bounded habitat// J. Theor. Biology. — 2018. — *446*. — P. 11–18.
10. *Ding J.* Blow-up problem of quasilinear weakly coupled reaction-diffusion systems with Neumann boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 2021. — *502*. — P. 125283.
11. *Filimonov M. Yu.* Representation of solutions of boundary-value problems for nonlinear evolution equations by special series with recurrently caculated coefficients// J. Phys. Conf. Ser. — 2019.
12. *Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F.* Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series// Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1993. — *8*, № 2. — P. 101–125.
13. *Fotache A. R., Muratori M.* Smoothing effects for the filtration equation with different powers// J. Differ. Equations. — 2017. — *263*. — P. 3291–3326.
14. *Gambino G., Lombardo M. C., Sammartino M., Sciacca V.* Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion// Phys. Rev. E. — 2013. — *88*. — 042925.
15. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A.* Analytical diffusion wave-type solutions to a nonlinear parabolic system with cylindrical and spherical symmetry// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2021. — *37*. — С. 31–46.
16. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A.* Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — *12*, № 6. — 999.
17. *Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Spevak L. F.* Analytical and numerical construction of heat wave type solutions to the nonlinear heat equation with a source// J. Math. Sci. — 2019. — *239*, № 2. — P. 111–122.

18. *Kazakov A. L., Spevak L. F.* An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry// Appl. Math. Model. — 2016. — *40*, № 2. — P. 1333–1343.
19. *Kumar N., Horsthemke W.* Turing bifurcation in a reaction-diffusion system with density-dependent dispersal// Phys. A. — 2010. — *389*. — P. 1812–1818.
20. *Murray J.* Mathematical Biology: I. An Introduction. — New York: Springer, 2002.
21. *Stepanova I. V.* Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity// Appl. Math. Comput. — 2019. — *343*. — P. 57–66.
22. *Vazquez J. L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. — Oxford: Clarendon Press, 2007.

Казаков Александр Леонидович
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: `kazakov@icc.ru`

Кузнецов Павел Александрович
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск
E-mail: `kuznetsov@icc.ru`

Спевак Лев Фридрихович
Институт машиноведения Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: `lfs@imach.uran.ru`