ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 104–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-104-114

УДК 517.968

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

© 2022 г. **С. С. ОРЛОВ, О. С. БУДНИКОВА, М. Н. БОТОРОЕВА**

Аннотация. Рассматривается класс интегро-алгебраических уравнений типа Вольтерра с двумя интегрируемыми степенными особенностями в ядре. Отмечены принципиальные трудности исследования таких объектов. В терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения. Предложены многошаговые методы решения, основанные на методе интегрирования произведений и квадратурных формулах типа Адамса. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: интегро-алгебраическое уравнение типа Вольтерра; многошаговый метод; граничная особенность; диагональная особенность; критерий ранг-степень.

MULTI-STEP METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRO-ALGEBRAIC EQUATIONS WITH TWO SINGULARITIES IN THE KERNEL

© 2022 **S. S. ORLOV, O. S. BUDNIKOVA, M. N. BOTOROEVA**

Abstract. We consider a class of Volterra integro-algebraic equations with two integrable power singularities in the kernel and indicate fundamental difficulties in studying such equations. In terms of matrix pencils, we formulate sufficient conditions for the existence of a unique continuous solution. Also, we propose multi-step methods for solving such equations based on the method of integrating products and Adams quadrature formulas and present the results of numerical experiments.

Keywords and phrases: Volterra integro-algebraic equation; multi-step method; boundary singularity; diagonal singularity; rank-degree criterion.

AMS Subject Classification: 45F15, 65R20

1. Введение.

При математическом моделировании упругих механических систем, гидравлических и электрических сетей (см. [1,5,14] и библиографию в них) обычно используются либо обыкновенные дифференциальные уравнения, либо дифференциальные уравнения в частных производных (уравнения динамики) и алгебраические соотношения (уравнения баланса). Их принято объединять в системы дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при старшей производной. В современной научной литературе эти системы называют *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). В отличие от невырожденных систем дифференциальных уравнений, начальные и краевые условия для ДАУ необходимо согласовать с правой частью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Вьетнамской академии наук и технологий (проект № 20-51-54003 Вьет_а.)

Один из способов исследования ДАУ, о котором подробно изложено в [3], состоит в редукции ДАУ к его интегральному аналогу — системе интегральных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей в главной части, называемой *интегро-алгебраическим уравнением* (ИАУ). Переход к интегральным аналогам позволяет решать ДАУ, содержащие различного рода особенности (см. [9]). Изучение ИАУ началось с работы В. Ф. Чистякова [7], в которой описаны принципиальные трудности исследования таких объектов, указаны достаточные условия существования и единственности непрерывного решения и предложен метод первого порядка для численного решения. Систематические исследования в области качественной теории и численных методов решения ИАУ проводят М. В. Булатов и В. Ф. Чистяков [8,12], Х. Бруннер [10], М. Хадизаде [15]. К настоящему времени изучены лишь отдельные классы ИАУ.

В представляемой работе рассматриваются ИАУ с двумя слабыми особенностями в ядре. Частным случаем этих абстрактных объектов являются интегральные уравнения типа Вольтерра с аналогичными особенностями, исследованные недавно в [16]. Близкими к изучаемому классу уравнений являются также слабосингулярные ИАУ с диагональной особенностью или ИАУ типа Абеля (см. [13]), рассмотренные впервые в [11]. В [4] к этим уравнениям были применены k-шаговые методы, основанные на экстраполяции главной части ИАУ, формуле интегрирования произведений для интегрального слагаемого и явных методах типа Адамса. В настоящей статье разработанный подход применяется к более сложному объекту — ИАУ с диагональной и граничной слабыми особенностями.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$A(t)x(t)+\int\limits_0^t s^{-a}(t-s)^{-b}K(t,s)x(s)ds=f(t),\quad t\in[0;1],\tag{1}$$

где $x\colon[0;1]\to\mathbb{R}^n$ и $f\colon[0;1]\to\mathbb{R}^n$ — искомая и заданная вектор функции соответственно, $A\colon[0;1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и $K\colon\Delta\to\mathbb{R}^{n\times n}$ — заданные матрицы-функции, Δ — компакт вида

$$\Delta=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant s\leqslant t\}.$$

Предполагается, что все матрицы и векторы представлены в стандартном базисе Гамеля $\{\mathrm{e}_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Символ $\mathbb{R}^{n\times n}$ означает векторное пространство $(n\times n)$-матриц (квадратных матриц порядка n) с операторной нормой

$$\|A\|_{\mathbb{R}^{n\times n}}=\sup\Big\{|Ax|_{\mathbb{R}^n}:|x|_{\mathbb{R}^n}=1\Big\},$$

где $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Матрицы-функции $A\colon[0;1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $K\colon\Delta\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и вектор-функция $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n$ являются по крайней мере *сильно* непрерывными (т.е. непрерывными по нормам в $\mathbb{R}^{n\times n}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно) на множествах, где они определены. Более тонкие топологические свойства этих функций будут уточнены позже. Сильную непрерывность $A\colon[0;1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $K\colon\Delta\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и $f\colon[0;1]\to\mathbb{R}^n$ будем обозначать $A(t)\in C([0;1];\mathbb{R}^{n\times n})$, $K(t,s)\in C(\Delta;\mathbb{R}^{n\times n})$ и $f(t)\in C([0;1];\mathbb{R}^n)$. Предположим, что

$$A(t)\neq\mathbb{O}_n,\quad \det A(t)=0$$

для всех $t\in[0,1]$, где $\mathbb{O}_n$ — нулевая матрица порядка n. Тогда абстрактное уравнение вида (1) задает систему, в которую входят интегральные уравнения типа Вольтерра первого и второго рода, а также алгебраические уравнения, и называется *интегро-алгебраическим уравнением* (ИАУ). Удачную терминологию для обозначения особенностей ядра на прямых $s=0$ и $s=t$ ввели М. Колк и А. Педас в [16], называя их *граничной* и *диагональной* особенностями ядра соответственно. Будем предполагать, что $a,b\in(0;1)$, т.е. граничная и диагональная степенные особенности ядра ИАУ (1) являются слабыми (интегрируемыми). Заметим, что для любой $x(t)\in C([0;1];\mathbb{R}^n)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int\limits_0^t s^{-a}(t-s)^{-b}|K(t,s)x(s)|_{\mathbb{R}^n}ds\sim\mathrm{B}(1-a,1-b)\cdot|K(0,0)x(0)|_{\mathbb{R}^n}\cdot t^{1-a-b},\quad t\to 0,$$

из которого следует, что интегральное слагаемое ИАУ (1) является ограниченным в точке $t = 0$, если $a + b < 1$. Это объясняется тем, что в точке $(0, 0) \in \Delta$ прямые $s = 0$ и $s = t$ пересекаются, т.е. два типа особенностей ядра, накладываясь, влияют друг на друга.

Определение 1. Любую вектор-функцию $x = x(t)$, сильно непрерывную на отрезке $[0; 1]$ и обращающую в тождество ИАУ (1), назовем решением рассматриваемого ИАУ.

Хорошо известно, что ИАУ имеют непрерывные решения не при любых входных данных (матрице в главной части, ядре интегрального оператора, свободной функции). Проблема разрешимости является естественной для всех классов ИАУ. Таким образом, одной из задач нашего исследования является поиск условий, при которых имеет место однозначная разрешимость рассматриваемого ИАУ (1).

3. Теорема существования и единственности непрерывного решения. Эта часть исследования выполнена на основе подходов и терминологии, разработанных В. Ф. Чистяковым (см. [7, 8]). Приведем одно из основополагающих понятий.

Определение 2. Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет *критерию ранг-степень* на отрезке $[0, 1]$ (имеет индекс 1, имеет простую структуру), если выполняются следующие условия:

(i) $\max\limits_{t\in[0,1]} \operatorname{rank} A(t) = m$;

(ii) $\det(\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^m + a_1(t)\lambda^{m-1} + \ldots + a_0(t)$, где $a_0(t) \neq 0$ при всех $t \in [0, 1]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $a, b \in (0; 1)$ *таковы, что* $a + b < 1$, *и выполнены следующие условия*:

(i) $\operatorname{rank}(A(0)|f(0)) = \operatorname{rank} A(0) = m < n$;

(ii) $A(t) \in C^1([0; 1]; \mathbb{R}^{n\times n})$; $K(t, s), \partial_t K(t, s) \in C(\Delta; \mathbb{R}^{n\times n})$;

(iii) $f(t) \in C^1([0; 1]; \mathbb{R}^n)$;

(iv) *пучок матриц* $\lambda A(t) + K(t, t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень.*

Тогда ИАУ (1) *имеет единственное непрерывное на отрезке* $[0; 1]$ *решение.*

Доказательство утверждения основано на лемме о постоянстве ранга матрицы $A(t)$ и блочном разложении пучка матриц $\lambda A(t)+K(t, t)$ (см. [7, 8]), которые следуют из условия (iv), и проводится сведением изучаемого ИАУ (1) к *нормальной* форме, т.е. к ИАУ вида (1) с $A(t) = \mathbb{E}_n$ при всех $t \in [0; 1]$, где $\mathbb{E}_n$ — единичная матрица порядка n. Далее приведем примеры, характеризующие роль критерия ранг-степень.

Пример 1. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида (1) с компонентами

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(t, s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

где $a\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ и $b\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ — заданные функции. Здесь $A(t) \neq \mathbb{O}_3$ и $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0, 1]$. Заметим, что $\operatorname{rank} A(t) = 1$ в тех точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) = 0$, и $\operatorname{rank} A(t) = 2$ в тех точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) \neq 0$, т.е.

$$\max_{t\in[0,1]} \operatorname{rank} A(t) = 2,$$

причем

$$\det(\lambda A(t) + K(t, t)) = a(t)\lambda^2 - (a(t) + 1)\lambda + 1.$$

По определению 2 критерий ранг-степень не выполняется в точках $t \in [0, 1]$, где $a(t) = 0$. Это может привести к неединственности решения. Если $a(t) = \mathrm{B}(1 - a, 1 - b) \cdot t^{1-a-b}$ и $b(t) = t$ при всех $t \in [0, 1]$, то рассматриваемое ИАУ имеет семейство непрерывных решений

$$x(t) = C, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = \frac{\sin \pi b}{\pi b} t^{a+b}.$$

Для функции

$$a(t)=\begin{cases}(\alpha-t)^{-\lambda}\left(\alpha^{\lambda}\mathrm{B}(1-a,1-b)\cdot t^{1-a-b}\cdot {}_2F_1\left(-\lambda,1-a;2-a-b;\dfrac{t}{\alpha}\right)+b(t)\right), & 0\leqslant t\leqslant\alpha,\\ \alpha^{-a}\mathrm{B}(\lambda+1,1-b)\cdot(t-\alpha)^{1-b}\cdot {}_2F_1\left(a,\lambda+1;2-b+\lambda;\dfrac{\alpha-t}{\alpha}\right), & \alpha<t\leqslant 1,\end{cases}$$

критерий ранг-степень нарушается в точке $t=\alpha$; если

$$b(t)=\begin{cases}-\alpha^{1-a-b+\lambda}\mathrm{B}(1-a,1-b+\lambda), & 0\leqslant t\leqslant\alpha,\\ -\alpha^{1-a+\lambda}\mathrm{B}(1-a,\lambda+1)\cdot t^{-b}\cdot {}_2F_1\left(b,1-a;2-a+\lambda;\dfrac{\alpha}{t}\right), & \alpha<t\leqslant 1,\end{cases}$$

то ИАУ имеет множество непрерывных решений вида

$$x(t)=\begin{cases}(\alpha-t)^{\lambda}, & 0\leqslant t\leqslant\alpha;\\ C(t-\alpha)^{\lambda}, & \alpha<t\leqslant 1;\end{cases}\qquad y(t)=0,\qquad z(t)=\frac{\sin\pi b}{\pi b}t^{a+b}.$$

На отрезке $[0,\alpha]$ решение единственно, а в точке $t=\alpha$ имеет место *ветвление* решения. В приведенных выше формулах используются обозначения для произвольной постоянной $C\in\mathbb{R}$, фиксированного числа $\lambda\in(0;1)$, *бета-функции Эйлера*

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,\quad \alpha>0,\quad \beta>0,$$

и *гипергеометрической функции Гаусса* в интегральной форме

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt,\quad b>0,\quad c>0,\quad a<c-b,\quad |z|\leqslant 1.$$

Пример 2. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида (1) с компонентами

$$A(t)=\begin{pmatrix}t&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad K(t,s)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix},$$

Здесь $A(t)\neq\mathbb{O}_3$ и $\det A(t)\neq 0$ при всех $t\in[0,1]$. В предыдущем примере отмечено, что

$$\max_{t\in[0,1]}\operatorname{rank}A(t)=2.$$

Многочлен $\det(\lambda A(t)+K(t,t))=\lambda-1$ имеет первую степень при всех $t\in[0,1]$, значит, критерий ранг-степень нарушается всюду на отрезке $[0,1]$. Тем не менее, рассматриваемое ИАУ имеет единственное непрерывное решение вида

$$x(t)=\frac{\sin\pi b}{\pi b}t^{a+b},\quad y(t)=0,\quad z(t)=\frac{\sin\pi b}{\pi b\mathrm{B}(1-b,a+2b+1)}t^{2a+2b}.$$

Примеры 1 и 2 показывают, что условие (iv) теоремы 1 носит достаточный характер. Если матричный пучок $\lambda A(t)+K(t,t)$ не удовлетворяет критерию ранг-степень, то исследование сопряжено с большими трудностями, так как ИАУ (1) может иметь множество решений.

4. Численный метод. Для построения численных методов решения интегральных уравнений с особенностями эффективным является подход, основанный на введении весовой функции и применении метода интегрирования произведений (см. [18]). В данной работе для ИАУ (1) модифицированы явные методы Адамса, описание которых можно найти в [2, 6, 17]. Выбор именно этих методов обусловлен их устойчивостью при численном решении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядром, отличным от нуля на диагонали $s=t$.

Пусть на отрезке $[0;1]$ определена равномерная сетка

$$t_i=ih,\quad i=0,1,\ldots,N,\quad h=\frac{1}{N};$$

Таблица 1. Значения коэффициентов α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	—	—	—	—
2	3	-3	1	—	—	—
3	4	-6	4	-1	—	—
4	5	-10	10	-5	1	—
5	6	-15	20	-15	6	-1

тогда для заданной на отрезке $[0;1]$ функции g с известными значениями $g_i = g(t_i)$ в узлах сетки и весовой функции $p(t,s) = s^{-a}(t-s)^{-b}$, где $a, b \in (0;1)$, запишем квадратурную формулу на основе явного метода Адамса

$$\int\limits_0^{t_{i+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b} g(\tau)d\tau = \int\limits_0^{t_{k+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b} g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b} g(\tau)d\tau \approx$$

$$\approx \int\limits_0^{t_{k+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b} L_{k+1}^0(g_0, g_1, \ldots, g_k, \tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \tau^{-a}(t_{i+1}-\tau)^{-b} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \ldots, g_j, \tau)d\tau =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} d_l(i+1)g_l + \sum_{j=k+1}^{i} \sum_{l=0}^{k} b_l(i+1,j)g_{j-l} = \sum_{j=0}^{i} \omega_{i+1,j} g_j,$$

где $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, \ldots, g_j, t)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), \ldots, (g_j, t_j)$, где $j = k+1, k+2, \ldots, i$.

Вернемся к ИАУ (1) и предположим, что начальные значения $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ в первых k узлах сетки заранее вычислены с достаточной точностью. Для упрощения дальнейшей записи введем обозначения $A_i = A(t_i)$, $K_{i,j} = K(t_i, s_j)$ и $x_j \approx x(t_j)$, $j = k, \ldots, i$. Согласно идее работы [2], в силу вырожденности матрицы $A(t)$ главную часть ИАУ (1) в точке $t = t_{i+1}$ будем вычислять следующим образом:

$$A_{i+1}x_{i+1} \approx A_{i+1}L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i, t_{i+1}) = A_{i+1}\sum_{l=0}^{k} \alpha_j x_{i-l},$$

где $L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, \ldots, x_i, t)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки (x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), $\ldots$, (x_i, t_i). С учетом всех рассуждений, изложенных выше, предлагаемые k-шаговые методы имеют вид

$$A_{i+1}\sum_{l=0}^{k} \alpha_j x_{i-l} + \sum_{j=0}^{i} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = f_{i+1}, \quad i = k, k+1, \ldots, N-1.$$

Коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, 3, 4, 5$ представлены в таблице 1.

Далее выпишем многошаговые алгоритмы при $k = 0, 1, 2$. При $k = 0$ получим метод

$$A_{i+1}x_i + \sum_{j=0}^{i} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = f_{i+1},$$

с весами вида

$$\omega_{i+1,j} = t_{i+1}^{1-a-b} \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du.$$

При $k = 1$ получим метод

$$A_{i+1}(2x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=0}^{i} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = f_{i+1},$$

где веса определяются следующим образом:

$$\omega_{i+1,j} = \begin{pmatrix} d_0(1) & d_1(1) & & & \\ d_0(2) & d_1(2)+b_1(2,2) & b_0(2,2) & & \\ d_0(3) & d_1(3)+b_1(3,2) & b_0(3,2)+b_1(3,3) & b_0(3,3) & \\ d_0(4) & d_1(4)+b_1(4,2) & b_0(4,2)+b_1(4,3) & b_0(4,3)+b_1(4,4) & b_0(4,4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Здесь приняты обозначения

$$d_0(i) = t_{i+1}^{1-a-b} \int\limits_{0}^{\frac{2}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du - \frac{1}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int\limits_{0}^{\frac{2}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$d_1(i) = \frac{1}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int\limits_{0}^{\frac{2}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$b_1(i,j) = t_{i+1}^{1-a-b} \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du - \frac{1}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du + t_{i+1}^{1-a-b}(j-1) \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du,$$

$$b_0(i,j) = \frac{1}{h} t_{i+1}^{2-a-b} \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b} du + t_{i+1}^{1-a-b}(j-1) \int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b} du.$$

В случае $k = 2$ получим метод

$$A_{i+1}(3x_i - 3x_{i-1} + x_{i-2}) + \sum_{j=0}^{i} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = f_{i+1},$$

где веса имеют следующий вид:

$$\omega_{i+1,0} = d_0(i), \quad i = 2, \dots, N-1;$$
$$\omega_{i+1,1} = d_1(i), \quad i = 2; \quad \omega_{i+1,1} = d_1(i) + b_2(i,j), \quad j = 3, \quad i = 3, \dots, N-1;$$
$$\omega_{i+1,2} = d_2(i), \quad i = 2; \quad \omega_{i+1,2} = d_2(i) + b_1(i,j), \quad j = 3, \quad i = 3;$$
$$\omega_{i+1,2} = d_2(i) + b_1(i,j) + b_2(i,j), \quad j = 4, \quad i = 4, \dots, N-1;$$
$$\omega_{i+1,m} = b_0(i,m) + b_1(i,m+1) + b_2(i,m+2), \quad m = 4, \dots, \quad i-2, \quad i = 5, \dots, N-1;$$
$$\omega_{i+1,i-1} = b_0(i,i-1) + b_1(i,i), \quad i = 4, \dots, N-1;$$
$$\omega_{i+1,i} = b_0(i,i), \quad i = 3, \dots, N-1.$$

Здесь приняты обозначения

$$d_0(i) = t_{i+1}^{1-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du - \frac{3}{2h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du + \frac{1}{2h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b}du,$$

$$d_1(i) = \frac{2}{h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du - \frac{1}{h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b}du,$$

$$d_2(i) = \frac{1}{2h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{2-a}(1-u)^{-b}du - \frac{1}{2h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_0^{\frac{3}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du,$$

$$b_2(i,j) = \frac{j(j-1)}{2}t_{i+1}^{1-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du - \\ - \frac{2j-1}{2h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du + \frac{1}{2h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du,$$

$$b_1(i,j) = -j(j-2)t_{i+1}^{1-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du + \\ + \frac{2j-2}{h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du - \frac{1}{h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du,$$

$$b_0(i,j) = \frac{(j-1)(j-2)}{2}t_{i+1}^{1-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du - \\ - \frac{2j-3}{2h}t_{i+1}^{2-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{1-a}(1-u)^{-b}du + \frac{1}{2h^2}t_{i+1}^{3-a-b}\int\limits_{\frac{j}{i+1}}^{\frac{j+1}{i+1}} u^{-a}(1-u)^{-b}du.$$

Веса для $k = 3, 4, 5$ не приведены из-за громоздкости формул.

5. Численные эксперименты. Численные расчеты проводились на нескольких тестовых ИАУ. Введем обозначения err для погрешности вычислений по евклидовой норме и p для порядка метода, определяемого по формуле

$$p = \log_2 \frac{\mathrm{err}_h}{\mathrm{err}_{\frac{h}{2}}}.$$

Пример 3. Интегро-алгебраическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \frac{\Gamma(3-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(2-a)}\int\limits_0^t s^{-a}(t-s)^{-b}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} t + t^{2-a-b} \\ t^{2-a-b} \end{pmatrix}$$

имеет точное решение $x(t) = (t, t)^T$. Результаты расчетов для $k = 0, 1, 2$ приведены в таблицах 2, 3 и 4.

Таблица 2. Результаты численных расчетов при $k = 0$ в примере 3

$0 < a+b < 1$	$a = 0{,}1$ $b = 0{,}1$		$a = 0{,}2$ $b = 0{,}75$		$a = 0{,}8$ $b = 0{,}15$		$a = 0{,}001$ $b = 0{,}99$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,16444	0,90	0,17392	1,00	0,09799	0,92	0,19901	1,00
0,1	0,08797	0,93	0,08716	1,00	0,05165	0,95	0,09951	1,00
0,05	0,04615	0,95	0,04368	1,00	0,02673	0,97	0,04975	1,00
0,025	0,02382	0,97	0,02189	1,00	0,01366	0,98	0,01244	1,00
$a+b = 1$	$a = 0{,}3$ $b = 0{,}7$		$a = 0{,}7$ $b = 0{,}3$		$a = 0{,}5$ $b = 0{,}5$		$a = 0{,}9$ $b = 0{,}1$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,16471	1,00	0,11219	0,96	0,13333	1,00	0,09427	0,96
0,1	0,08235	1,00	0,05781	0,97	0,06667	1,00	0,04839	0,94
0,05	0,04118	1,00	0,02953	0,98	0,03333	1,00	0,02523	0,95
0,025	0,02059	1,00	0,01498	0,99	0,01667	1,00	0,01303	0,97
$1 < a+b < 2$	$a = 0{,}9$ $b = 0{,}9$		$a = 0{,}99$ $b = 0{,}9$		$a = 0{,}99$ $b = 0{,}99$		$a = 0{,}999$ $b = 0{,}999$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,14739	1,00	0,09924	0,94	0,15012	1,00	0,15038	1,00
0,1	0,07367	1,00	0,05175	0,96	0,07493	1,00	0,07504	1,00
0,05	0,03686	1,00	0,02661	0,97	0,03745	1,00	0,03750	1,00
0,025	0,01844	1,00	0,01357	0,98	0,01872	1,00	0,01878	1.00

Таблица 3. Результаты численных расчетов при $k = 1$ в примере 3

$0 < a+b < 2$	$a = 0{,}9$ $b = 0{,}9$		$a = 0{,}9$ $b = 0{,}96$		$a = 0{,}001$ $b = 0{,}961$		$a = 0{,}961$ $b = 0{,}1$		$a = 0{,}015$ $b = 0{,}99$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0	2	0	2	$*$	–	$*$	–	$*$	–
0,1	0	2	0	2	$*$	–	$*$	–	$*$	–
0,05	0	2	0	2	$*$	–	$*$	–	$*$	–
0,025	0	2	0	2	$*$	–	$*$	–	$*$	–

Пример 4. Интегро-алгебраическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} x(t) + \frac{\Gamma(2-a-b)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)} \int\limits_0^t s^{-a}(t-s)^{-b} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ -2e^{-s} & e^{t+s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(1+t^{1-a-b}) + te^{-t} \\ e^t(t+t^{1-a-b}) + t^2e^{-t} - 2t^{1-a-b} \end{pmatrix}$$

имеет точное решение $x(t) = (e^t, e^{-t})^T$. Результаты расчетов для $k = 1, 2$ приведены в табл. 5 и 6.

Таблица 4. Результаты численных расчетов при $k = 2$ в примере 3

$1 < a + b < 2$	$a = 0{,}1$ $b = 0{,}961$		$a = 0{,}99$ $b = 0{,}99$		$a = 0{,}999$ $b = 0{,}999$	
h	err	p	err	p	err	p
0,2	0	3	0	3	0	3
0,1	0	3	0	3	0	3
0,05	0	3	0	3	0	3

Таблица 5. Результаты численных расчетов при $k = 1$ примере 4

$0 < a + b < 1$	$a = 0{,}1$ $b = 0{,}1$		$a = 0{,}2$ $b = 0{,}75$		$a = 0{,}8$ $b = 0{,}15$		$a = 0{,}001$ $b = 0{,}961$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,04561	1,99	0,04915	1,92	0,06440	2,00	$*$	–
0,1	0,01146	2,02	0,01303	1,97	0,01614	2,05	$*$	–
0,05	0,00282	2,01	0,00334	1,98	0,00390	2,06	$*$	–
0,025	0,00070	2,01	0,00084	1,99	0,00094	2,06	$*$	–
$a + b = 1$	$a = 0{,}3$ $b = 0{,}7$		$a = 0{,}7$ $b = 0{,}3$		$a = 0{,}5$ $b = 0{,}5$		$a = 0{,}9$ $b = 0{,}1$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,05001	1,92	0,05921	1,99	0,05310	1,96	0,07174	1,97
0,1	0,01318	1,97	0,01492	2,03	0,01367	1,99	0,01827	2,03
0,05	0,00336	1,98	0,00366	2,03	0,00343	2,00	0,00447	2,05
0,025	0,00085	1,99	0,00089	2,03	0,00086	2,00	0,00108	2,06
$1 < a + b < 2$	$a = 0{,}9$ $b = 0{,}9$		$a = 0{,}9$ $b = 0{,}96$		$a = 0{,}961$ $b = 0{,}1$		$a = 0{,}015$ $b = 0{,}99$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,06015	1,91	0,05422	1,90	$*$	–	$*$	–
0,1	0,01603	1,96	0,01454	1,95	$*$	–	$*$	–
0,05	0,00413	1,98	0,00376	1,97	$*$	–	$*$	–
0,025	0,00105	1,99	0,00096	1,99	$*$	–	$*$	–

Таблица 6. Результаты численных расчетов при $k = 2$ в примере 4

$1 < a + b < 2$	$a = 0{,}7$ $b = 0{,}5$		$a = 0{,}1$ $b = 0{,}961$		$a = 0{,}99$ $b = 0{,}99$		$a = 0{,}999$ $b = 0{,}999$	
h	err	p	err	p	err	p	err	p
0,2	0,00775	2,82	0,00559	2,69	0,00706	2,67	0,00705	2,67
0,1	0,00110	2,93	0,00087	2,85	0,00111	2,85	0,00111	2,85
0,05	0,00014	2,99	0,00012	2,93	0,00015	2,93	0,00015	2,93

Анализируя результаты численных расчетов, можно сделать вывод, что предлагаемый нуль-шаговый метод имеет первый порядок сходимости. Для случая $k = 1$ приведены лишь некоторые результаты расчетов, демонстрирующие его очевидные преимущества — второй порядок точности. Численные эксперименты выявили интересный факт потери устойчивости метода, если хотя бы одно из значений параметров a или b превосходит значение 0,96. В таблицах значения параметров a, b и h, при которых одношаговый метод неустойчив, указаны символом $*$. Тестирование двухшагового метода не выявило случаев неустойчивости алгоритма и подтверждает третий порядок точности. Увеличение порядка точности влечет за собой значительное рост времени, затраченного на вычисления. Это чрезвычайно затрудняет использование трехшагового метода и практически не позволяет использовать алгоритмы при $k = 4$ и $k = 5$.

6. Заключение. В представленной работе в терминах матричных пучков сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости в классе непрерывных функций рассматриваемого ИАУ и разработаны многошаговые методы его приближенного решения. Выполненные численные расчеты разработанными k-шаговыми алгоритмами демонстрируют порядок $k+1$ сходимости к точному решению. Дальнейшим направлением работы предполагается исследование зависимости границ устойчивости предложенных алгоритмов от параметров a, b и h. В качественной теории особое внимание планируется уделить случаю $a + b \geqslant 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумов С. Б., Булатов М. В., Ли М. Г., Чистяков В. Ф.* Дифференциально-алгебраические уравнения и их приложения// Тр. Средневолж. мат. о-ва. — 2007. — *9*, № 1. — С. 62–69.
2. *Будникова О. С., Булатов М. В.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 5. — С. 829–839.
3. *Булатов М. В., Будникова О. С.* Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений// Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер Матем. модел. программ. — 2013. — *6*, № 4. — С. 5–14.
4. *Булатов М. В., Будникова О. С.* Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами// Изв. Иркут. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — *13*. — С. 3–15..
5. *Николаев В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П.* Моделирование гемодинамики в сети сосудов, основанных на дифференциально-алгебраических уравнениях, построенных по клиническим данным// в кн.: Тез. докл. Всеросс. конф. «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение». — Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2014. — С. 106.
6. *Тен Мен Ян.* Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода/ дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Иркутск, 1985.
7. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах// в кн.: Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 231–239.
8. *Чистяков В. Ф.* О разрешимости линейных интегро-алгебраических уравнений и численных методах их решения// Сиб. мат. ж. — 2013. — *54*, № 4. — С. 932–946.
9. *Auzinger W., Lehner H., Weinmüller E.* An efficient asymptotically correct error estimator for collocation solutions to singular index-1 DAEs// BIT Numer. Math. — 2011. — *51*, № 1. — P. 43–65.
10. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
11. *Brunner H., Bulatov M. V.* On singular systems of integral equations with weakly singular kernels// Proc. 11 Baikal Int. School-Seminar “Optimization Methods and Their Applications”. — Irkutsk, 1998. — P. 64–67.
12. *Bulatov M. V., Hadizadeh M., Chistyakova E. V.* Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Проц. упр. — 2019. — *15*, № 3. — С. 310–322.
13. *Bulatov M. V., Lima P. M., Weinmüller E. B.* Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations// Central Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 2. — P. 308–321.

14. *Chistyakova E. V., Chistyakov V. F., Levin A. A.* Linearization of differential algebraic equations with integral terms and their application to the thermal energy modelling// Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Мат. модел. програм. — 2018. — *11*, № 4. — С. 94–109.
15. *Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S.* Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index 2// Appl. Numer. Math. — 2011. — *61*, № 1. — P. 131–148.
16. *Kolk M., Pedas A.* Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernels which may have a boundary singularity// Math. Model. Anal. — 2009. — *14*, № 1. — P. 79–89.
17. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Philadelphia: SIAM, 1985.
18. *Weiss R., Anderssen R. S.* A product integration methods for a class of singular first kind Volterra equations// Numer. Math. — 1972. — *18*, № 5. — P. 442–456.

Орлов Сергей Сергеевич
Иркутский государственный университет
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

Будникова Ольга Сергеевна
Иркутский государственный университет
E-mail: osbud@mail.ru

Ботороева Мария Николаевна
Иркутский государственный университет
E-mail: masha888888@mail.ru