ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 97–103
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-97-103

УДК 517.98

ТЕОРЕМЫ ОБ ИТЕРАЦИЯХ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© 2022 г. **Л. Н. ЛЯХОВ, Н. И. ТРУСОВА**

Аннотация. В $\mathbb{R}_2$ рассматриваются частные интегралы, действующие по первой или по второй переменной. Получены условия ограниченного действия в пространствах непрерывных функций по одной из переменных со значениями в лебеговом классе L_p по другой переменной. Предполагается, что эти функции определены в конечном прямоугольнике $D \in \mathbb{R}_2$. Доказаны теоремы об ограниченности итераций указанных частных интегралов в пространствах анизотропных функций $C(D_\alpha^{(1)}; L_p(D_{\overline{\alpha}}^{(1)}))$, где $\alpha; \overline{\alpha}$ — дополняющие друг друга индексы до двойного индекса $(1; 2)$.

Ключевые слова: частный интеграл, анизотропное пространство функций, смешанная норма.

THEOREMS ON ITERATIONS OF PARTIAL INTEGRALS IN A SPACE WITH MIXED NORM

© 2022 **L. N. LYAKHOV, N. I. TRUSOVA**

Abstract. In $\mathbb{R}_2$, we consider partial integrals acting on the first or second variable and obtain conditions for bounded action in spaces of continuous functions with respect to one of the variables with values in the Lebesgue class L_p with respect to the other variable. We assume that these functions are defined in a finite rectangle $D \in \mathbb{R}_2$. We prove theorems on the boundedness of iterations of these partial integrals in the spaces of anisotropic functions $C(D_\alpha^{(1)}; L_p(D_{\overline{\alpha}}^{(1)}))$, where α and $\overline{\alpha}$ are indices complementing each other up to the double index $(1; 2)$.

Keywords and phrases: partial integral, anisotropic function space, mixed norm.

AMS Subject Classification: 45B99, 47G99

1. Введение. Через $D = D_1^{(1)} \times D_2^{(1)}$ обозначим конечный прямоугольник в $\mathbb{R}_2$, где $D_1^{(1)} = (a_1, b_1)$, $D_2^{(1)} = (a_2, b_2)$. В данной работе будем рассматривать частные интегралы в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_2$ вида (см. [1–3])

$$(K_1 u)(x) = \int\limits_{D_1^{(1)}} k_1(x; t_1) u(t_1, x_2) dt_1, \tag{1}$$

$$(K_2 u)(x) = \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x; t_2) u(x_1, t_2) dt_2. \tag{2}$$

В [3] подробно изложена теория непрерывности линейных операторов с частными интегралами в классе непрерывных функций, а в [1, 2] показана непрерывность действия частных интегралов

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-41-480002).

вида (1) и (2) в классах функций, обладающих разными свойствами по разным переменным, называемых анизотропными классами функций. В [1] рассмотрены случаи ограниченности частных интегралов в анизотропных лебеговых классах функций $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $p_i>1$, а в [2] рассматривались частные интегралы в $\mathbb{R}_2$, где анизотропность функциональных классов понимается в следующем смысле: по первой переменной применяется sup-норма, а по второй — лебегова L_p-норма при $1<p<\infty$. Данный случай приводит к анизотропным лебеговым классам $L_{\mathbf{r}}$ с мультииндексами $\mathbf{r}=(p,p^2)$ и $\mathbf{r}=(q,pq)$.

Через $C(D_\alpha;L_p(D_{\overline{\alpha}}))$ обозначим пространство непрерывных функций со значениями в лебеговом классе функций, α и $\overline{\alpha}$ — индексы, дополняющие друг друга до двойного индекса $(1;2)$, т.е. если $\alpha=1$, то $\overline{\alpha}=2$ и наоборот, если $\alpha=2$, то $\overline{\alpha}=1$. Норму в данном классе функций определим по следующей формуле:

$$\|u\|_{C(D_\alpha;L_p(D_{\overline{\alpha}}))}=\sup_{x_\alpha\in \overline{D_\alpha^{(1)}}}\|u(x_\alpha,t_{\overline{\alpha}})\|_{L_p(D_{\overline{\alpha}}^{(1)})}=\sup_{x_\alpha\in \overline{D_\alpha^{(1)}}}\left[\int\limits_{D_{\overline{\alpha}}^{(1)}}|u(x_\alpha,t_{\overline{\alpha}})|^p dt_{\overline{\alpha}}\right]^{1/p}<\infty,$$

где D_α — область интегрирования частного интеграла K_α, а α — индекс, принимающий одно значение из номеров $1,2$.

Ранее (см. [2]) доказано неравенство

$$\|K_\alpha u\|_{C(D_\alpha;L_p(D_{\overline{\alpha}}))}\leqslant C\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D_{D_\alpha;L_p(D_{\overline{\alpha}})})},$$

из которого вытекает непрерывность функции K_α по x_1 со значением в банаховом пространстве $L_p(D_2)$. В этой работе мы докажем принципиально другой результат, именно, что функция $K_\alpha u$ непрерывна по x_1 и непрерывна в целом по x_2 в L_p, $p\geqslant 1$. Мы докажем этот факт в случае $\alpha=1$ для частных интегралов K_1 и K_2. Доказательство приведенного выше результата для случая $\alpha=2$ повторяет одно из приведенных доказательств для K_1 или K_2, поэтому мы его не приводим. В некоторых случаях для удобства класс функций $C(D_1;L_p(D_2))$ будем обозначать CL_p. Полученные результаты обобщаются итераций рассмотренных частных интегралов.

При доказательстве теорем в статье используются установленные в [1, 2] неравенства

$$\|K_1u\|_{CL_p}\leqslant\|k_1\|_{C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))}\|u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2}^{(2)})},\tag{3}$$

$$\|K_2u\|_{CL_p}\leqslant(b_2-a_2)^{1/p^2}\|k_2\|_{C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)}))}\|u\|_{CL_p},\tag{4}$$

где $1/p+1/q=1$.

2. О непрерывности частных интегралов в $\mathbb{R}_2$.

Функциональное пространство

$$C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))$$

определено ограниченностью нормы

$$\|f\|_{C(D_1;L_p(D_2))}=\sup_{x_1\in\overline{D}_1}\left[\int\limits_{D_1}|f(x_1,t_2)|^p dt_2\right]^{1/p}<\infty,$$

2.1. Непрерывность частного интеграла K_1 в $C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))$.

Утверждение 1. *Пусть $\psi(x)=(K_1u)(x)$ и $\Delta\psi=(K_1u)(x+\Delta x)-(K_1u)(x)$. Если*

$$k_1\in C(D_1;L_{q,pq}(D_{1,2})),\quad u\in L_p(D_1;L_{p^2}(D_2),$$

то

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1;L_p(D_2))}\to 0\quad \textit{при}\quad h_1\to 0.$$

Другими словами, функция $\psi=K_1u$ является непрерывной в D_1 со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_1u\in C(D_1;L_p(D_2))$.

Доказательство. Рассмотрим частный интеграл вида (1), действующий по первой переменной, в функциональном пространстве $C(D_1; L_p(D_2))$. Пусть $1/p + 1/q = 1$, $u \in L_{\mathbf{p}}(D_{1,2})$ и $\Delta x = (h_1, h_2)$ — приращение аргумента. Рассмотрим выражение

$$\Delta\psi = (K_1u)(x+\Delta x) - (K_1u)(x) = \\ = \int\limits_{D_1^{(1)}} [k_1(x_1+h_1, x_2+h_2; t_1)u(t_1, x_2+h_2) - k_1(x_1, x_2; t_1)u(t_1, x_2)]dt_1. \quad (5)$$

Упростим данное выражение, положив $h_2 = 0$. Применив неравенство Гельдера, получим

$$|\Delta\psi| \leqslant \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |k_1(x_1+h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1\right]^{1/q} \left[\int\limits_{D_1^{(1)}} |u(t_1, x_2)|^p dt_1\right]^{1/p}.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции $\psi(x_1, x_2)$ по x_1, если ядро $k_1 = k_1(x; t_1)$ представляет собой непрерывную функцию по x_1 со значением в L_p. Рассмотрим разность $\Delta\psi$ при условии принадлежности ядра пространству функций со смешанной нормой. В этом случае имеем

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1; L_p(D_2))} \leqslant \\ \leqslant \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\int\limits_{D_2}\left(\left[\int\limits_{D_1} |k_1(x_1+h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1\right]^{1/q}\left[\int\limits_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1\right]^{1/p}\right)^p dx_2\right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1} |k_1(x_1+h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1\right]^{p/q} \times \left[\int\limits_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1\right]^{p/p} dx_2\right)^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \sup_{x_1\in\overline{D_1}} \left(\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1} |k_1(x_1+h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)|^q dt_1\right]^p dx_2\right)^{1/pq}\left(\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1} |u(t_1, x_2)|^p dt_1\right]^p dx_2\right)^{1/p^2} = \\ = \sup_{x_1\in\overline{D_1}} \|\Delta_{x_1}k_1\|_{L_{q,pq}(D)}\|u\|_{L_{p,p^2}(D)}. \quad (6)$$

Итак, функция ψ непрерывна по x_1 как функция L_p-нормы по x_2, т.е. непрерывна в целом в пространстве со смешанной нормой. Отметим, что справа в неравенстве (6) (даже при принятом упрощении $h_2 = 0$) оказались нормы анизотропных пространств Лебега.

При $h_2 \neq 0$ разность $\Delta\psi$ (5) представим в виде

$$\Delta\psi = (K_1u)(x+\Delta x) - (K_1u)(x) = \\ = \int\limits_{D_1^{(1)}} u(t_1, x_2+h_2)\Big[k_1(x_1+h_1, x_2+h_2; t_1) - k_1(x_1+h_1, x_2; t_1)\Big]dt_1 + \\ + \int\limits_{D_1} u(t_1, x_2+h_2)\Big[k_1(x_1+h_1, x_2; t_1) - k_1(x_1, x_2; t_1)\Big]dt_1 + \\ + \int\limits_{D_1} k_1(x_1, x_2; t_1)\Big[u(t_1, x_2+h_2) - u(t_1, x_2)\Big]dt_1.$$

Здесь можно лишь утверждать, что функция ψ будет непрерывна, если ядро частного интеграла k_1 непрерывно по совокупности переменных $x = (x_1, x_2)$, а функция u непрерывна по свободной от интегрирования переменной.

Если же известно, что $k_1 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))$, $u \in L_{\mathbf{p}}(D_{1,2}^{(2)})$, то применив неравенство (3), получим

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1;L_p(D_2))} \leqslant \|\Delta_{x_2} k_1\|_{C(D_1;L_{q,pq}(D))} \|u\|_{L_{p,p^2}(D)} + \\ + \|\Delta_{x_1} k_1\|_{C(D_1;L_{q,pq}(D))} \|u\|_{L_{p,p^2}(D_{1,2})} + \|k_1\|_{C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D_{1,2}^{(2)}))} \|\Delta_{x_2} u\|_{L_{p,p^2}(D)}.$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю при $|\Delta x| = |h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$, так как непрерывно в целом, второе слагаемое стремится к нулю, поскольку его значения в L_{pq} непрерывны по x_1, и, наконец, третье слагаемое стремится к нулю по причине непрерывности в целом функции u. $\square$

2.2. Непрерывность частного интеграла K_2 в $C(D_1; L_p(D_2))$.

Утверждение 2. *Пусть $\psi(x) = (K_2 u)(x)$ и $\Delta\psi = (K_2 u)(x + \Delta x) - (K_2 u)(x)$. Если*

$$k_2 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)})), \quad u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)})),$$

то

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \to 0 \quad \text{при} \quad h_2 \to 0.$$

Следовательно, $\psi = K_2 u$ является непрерывной функцией со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_2 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$.

Доказательство. Рассмотрим частный интеграл вида (2) в функциональном пространстве $C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$. Пусть $1/p + 1/q = 1$ и $\Delta x = (h_1, h_2)$ — приращение аргумента. Имеем

$$\Delta\psi(x) = \int\limits_{D_2^{(1)}} \Big[k_2(x_1{+}h_1, x_2{+}h_2; t_2) u(x_1{+}h_1, t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2) u(x_1, t_2)\Big] dt_2 =$$

$$= \int\limits_{D_2^{(1)}} \Big[k_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2)\Big] u(x_1 + h_1, t_2) +$$

$$+ \int\limits_{D_2^{(1)}} \Big[k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2)\Big] u(x_1 + h_1, t_2) dt_2 +$$

$$+ \int\limits_{D_2^{(1)}} k_2(x_1, x_2; t_2) \Big[u(x_1 + h_1, t_2) - u(x_1, t_2)\Big] dt_2.$$

Установим условие на ядро k_2 оператора K_2, при котором функция ψ окажется непрерывной. Предыдущее равенство запишем в виде

$$\Delta\psi = \int\limits_{D_2^{(1)}} \Big[\Delta_{x_1} k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) u(x_1 + h_1, t_2) + \\ + \Delta_{x_2} k_2(x_1, x_2; t_2) u(x_1 + h_1, t_2) + k_2(x_1, x_2; t_2) \Delta_{x_1} u(x_1, t_2)\Big] dt_2.$$

Как видим, непрерывность функции ψ будет следовать из непрерывности ядра $k_2(x; t_2)$ по совокупности переменных $x = (x_1, x_2)$ и непрерывности функции u по первой переменной. Но такой комплекс условий, вообще говоря, не выполняется, если рассматривать функцию ψ как функцию из пространства со смешанной нормой, поскольку по одной из переменных должна присутствовать лишь L_p-норма. Упростим предыдущее равенство, положив $h_1 = 0$. Тогда

$$|\Delta\psi| = \int\limits_{D_2^{(1)}} \Big[k_2(x_1, x_2 + h_2; t_2) - k_2(x_1, x_2; t_2)\Big] u(x_1, t_2) dt_2.$$

Применив неравенство Гельдера, получим

$$|\Delta\psi| \leqslant \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1,x_2;t_2)|^q dt_2\right]^{1/q} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |u(x_1,t_2)|^p dt_2\right]^{1/p}.$$

Покажем, что при условии принадлежности ядра k_2 пространству функций со смешанной CL_p-нормой функция ψ оказывается непрерывной в целом. Имеем

$$\|\Delta\psi\|_{CL_p} = \|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |\Delta_{x_2} k_2(x_1,x_2;t_2)|^q dt_2\right]^{p/q} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} |u(x_1,t_2)|^p dt_2\right]^{p/p} dx_2\right)^{1/p}.$$

К внешнему интегралу (по x_2) снова применим неравенство Гельдера с теми же показателями p и q. Получим

$$\|\Delta\psi\|_{CL_p} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\left[\int\limits_{D_2^{(1)}} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left|\Delta_{x_2} k_2(x_1,x_2;t_2)\right|^q dt_2\right)^{pq/q} dx_2\right]^{1/q} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} \left|u(x_1,t_2)\right|^p dt_2\right]^{p^2/p} dx_2\right]^{1/p}\right)^{1/p} =$$
$$= \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \left(\left[\int\limits_{D_2^{(1)}} \left(\int\limits_{D_2^{(1)}} \left|\Delta_{x_2} k_2(x_1,x_2;t_2)\right|^q dt_2\right)^{pq/q} dx_2\right]^{1/pq} (b_2-a_2)^{1/p^2} \left[\int\limits_{D_2^{(1)}} \left|u(x_1,t_2)\right|^p dt_2\right]^{1/p}\right).$$

В правой части этого неравенства перейдем к соответствующим нормам для ядра k_2 и функции u:

$$\|\Delta\psi\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \leqslant (b_2-a_2)^{1/p^2} \sup_{x_1\in\overline{D_1^{(1)}}} \big(\|\Delta_{x_2} k_2\|_{L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)})} \|u(x_1)\|_{L_p(D_2^{(1)})}\big). \tag{7}$$

Тем самым показано, что функция ψ непрерывна в целом в пространстве со смешанной нормой. Заметим, что так же, как и в предыдущем случае, в неравенстве (7) оказались задействованы нормы анизотропных пространств Лебега. □

3. Теоремы об итерациях частных интегралов в $\mathbb{R}_2$.

3.1. Итерации частного интеграла K_1.

Теорема 1. *Пусть*

$$k_1 \in C(D_1^{(1)}; L_{q,\infty}(D_{1,2}^{(2)})), \quad u \in C(D_1^{(1)}; L_{p^{r+1}}(D_2^{(1)})), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда

$$(K_1^r u)(x_1,x_2) \in C(D_1^{(1)}; L_{p^r}(D_2^{(1)})), \quad r=1,2,3,\ldots \tag{8}$$

При условии

$$u \in L_{p,p^{r+1}}(D_{1,2}^{(2)}) \tag{9}$$

утверждение (8) *выполняется при всех натуральных значениях* $r \geqslant 1$.

Доказательство. Поскольку $p>1$, то $p^{r+1}>p$ при любом $r\geqslant 1$; тогда пространство $L_{p^{r+1}}(D)$ вложено в $L_p(D)$ для любой конечной области D и утверждение (8) при $r=1$ вытекает из (3):

$$\|K_1u\|_{CL_p}\leqslant C_1\|u\|_{L_{p,p^2}(D^{(2)}_{1,2})}=$$
$$=C_1\left(\int\limits_{D_2^{(1)}}\left[\int\limits_{D_1^{(1)}}|u(t_1,x_2)|^p dt_1\right]^{p^2/p}dx_2\right)^{1/p^2}\leqslant C\sup_{t_1\in\overline{D_1^{(1)}}}\left(\int\limits_{D_2^{(1)}}|u(t_1,x_2)|^{p^2}dx_2\right)^{1/p^2}=$$
$$=C\|u\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^2}(D_2^{(1)}))}. \tag{10}$$

Здесь
$$C_1=\|k_1\|_{C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D^{(2)}_{1,2}))},\quad C=(b_1-a_1)^{1/p}C_1.$$
В дальнейшем, вообще говоря, через C будут обозначены различные константы, не зависящие от функции u, а зависящие от ядра k_1.

При $r=2$ согласно неравенству (3) имеем
$$\|K_1^2u\|_{CL_p}\leqslant C_1\|K_1u\|_{L_{p,p^2}(D^{(2)}_{1,2})}=C_1\left(\int\limits_{D_2^{(1)}}\left[\int\limits_{D_1^{(1)}}|K_1u(x_1,x_2)|^p dx_1\right]^{p^2/p}dx_2\right)^{1/p^2},$$
а также $K_1u\in C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)})$ согласно утверждению 1. Поэтому, взяв sup по первой переменной, получим
$$\|K_1^2u\|_{CL_p}\leqslant C\|K_1u\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^2}(D_2^{(1)}))}.$$
Воспользовавшись неравенством (10) с показателем p^2 вместо p, получим
$$\|K_1^2u\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^2}(D_2^{(1)}))}\leqslant C\|u\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^3}(D_2^{(1)}))}$$
и мы получим утверждение (8) для $r=2$:
$$(K_1^2u)(x_1,x_2)\in C(D_1^{(1)};L_{p^2}(D_2^{(1)})).$$

Последующие рассуждения проводятся методом математической индукции, т.е. предположив, что (8) верно для $r=r_1$, выведем его справедливость для $r=r_1+1$.

Если же выполнено условие (9), то учтем, что $K_1u\in C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))$ согласно утверждению 1 и по аналогии с предыдущими рассуждениями имеем цепочку неравенств
$$\big\|K_1^ru\big\|_{CL_p}\leqslant C\big\|K_1^{r-1}u\big\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^2}(D_2^{(1)})}\leqslant C\big\|K_1^{r-2}u\big\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^3}(D_2^{(1)})}\leqslant\ldots\leqslant C\big\|K_1^1u\big\|_{C(D_1^{(1)};L_{p^r}(D_2^{(1)})},$$
что доказывает (8) в этом случае. □

3.2. Итерации частного интеграла K_2. Для частного интеграла K_2 подход, применённый для частного интеграла K_1, применим только если рассматривать смешанную норму пространства $C(D_2^{(1)};L_p(D_1^{(1)}))$.

Теорема 2. *Пусть*
$$k_2\in C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D^{(2)}_{2,2})),\quad u\in C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)})),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$
Тогда
$$(K_2^ru)(x_1,x_2)\in C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)})),\quad r=1,2,3,\ldots \tag{11}$$
Следовательно, $\psi=K_2^ru$ является непрерывной функцией со значением в пространстве Лебега, т.е. $K_2u\in C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))$.

Доказательство. Для $r = 1$ принадлежность (11) вытекает из оценки (4):

$$\|K_2 u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \leqslant C_2 \|u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))},$$

где $C_2 = (b_2 - a_2)^{1/p^2} \|k_2\|_{C(D_1^{(1)};L_{q,pq}(D_{2,2}^{(2)}))}$.

При $r = 2$ имеем

$$\|K_2^2 u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \leqslant C_2 \|K_1 u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))} \leqslant C_2^2 \|u\|_{C(D_1^{(1)};L_p(D_2^{(1)}))}.$$

Согласно условию леммы функция $K_2 u \in C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$, поэтому принадлежность (11) при $r = 2$ выполнена.

Продолжая эти рассуждения, получим (11) для произвольного натурального числа r.

Таким образом, в отличие от K_1, оператор K_2 действует из $C(D_1^{(1)}; L_p(D_2^{(1)}))$ в себя. Доказательство закончено. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И.* Частные интегралы в анизотропных классах Лебега, I. Двумерный случай// Пробл. мат. анал. — 2020. — *102*. — С. 119–123.
2. *Ляхов Л. Н., Трусова Н. И.* Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой, I// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *5*, № 1. — С. 22–31.
3. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. — New York: Marcel Dekker, 2000.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет;

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: `levnlya@mail.ru`

Трусова Наталья Ивановна

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: `trusova.nat@gmail.com`