ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 68–72
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-68-72

УДК 512.6

ПРОСТРАНСТВА С ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ

© 2022 г. **Н. И. ГУСЕВА, Е. В. ЛУКЬЯНОВА**

Аннотация. Рассматриваются пространства с полилинейными формами, степень которых больше двух. Группами движений таких пространств являются подгруппы полной линейной группы, преобразования которых сохраняют данную полилинейную форму. Отыскание таких групп упрощается, если полилинейная форма задаётся на линейном пространстве некоторой алгебры и обладает мультипликативным свойством относительно умножения в этой алгебре. Доказано, что такая форма существует в любой ассоциативной алгебре.

***Ключевые слова*:** линейная алгебра, ассоциативная алгебра, мультипликативная функция, пространство с полилинейной формой, циклическая алгебра.

SPACES WITH POLYLINEAR FORMS

© 2022 **N. I. GUSEVA, E. V. LUKYANOVA**

Abstract. We consider spaces with multilinear forms whose degree is greater than two. The motion groups of such spaces are subgroups of the general linear group whose transformations preserve the given multilinear form. The search for such groups becomes simpler if the multilinear form is defined on the linear space of some algebra and possesses the multiplicative property with respect to multiplication in this algebra. We prove that such a form exists in any associative algebra.

***Keywords and phrases*:** linear algebra, associative algebra, multiplicative function, space with multilinear form, cyclic algebra.

***AMS Subject Classification*:** 15A66, 15A69, 16S38

О том, что геометрическая структура может быть основана на фундаментальной форме, у которой степень больше двух, впервые предположил Бернгард Риман в своей знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». «Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, — замечает Риман, — соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвёртой степени из дифференциального выражения четвёртой степени». Впрочем, дальше этот великий геометр XIX века отказывается от своего же замечания о геометрии не квадратичных фундаментальных форм: «Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому, — заключает Риман, — я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задаётся как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени...» (см. [5]).

Однако и не квадратичные формы могут задавать на многообразиях и, в частности, на линейных пространствах свои специфические геометрические структуры. Некоторые из таких геометрических структур во многом похожи на геометрию евклидовых и псевдоевклидовых пространств, другие же могут удивить своей причудливостью, хотя и не лишены внутренней гармонии и специфической красоты.

Долгое время математики не обращали внимания на геометрические структуры, имеющие в качестве фундаментальной формы однородную функцию координат, степень которой больше двух. Этому были две причины. Во-первых, во времена Римана и позже, пока образцом для геометрических структур была евклидова геометрия, пространства с не квадратичной фундаментальной формой не имели какой-либо рациональной интерпретации, на что и указывает Риман, замечая, что результаты исследования пространств с не квадратичной формой «не смогли бы быть сформулированы геометрически».

Впрочем, после того как Феликс Клейн дал толкование геометрии как множества, на котором действует некоторая группа преобразований, вопрос об интерпретации той или иной геометрической структуры уже не имел принципиального значения. Но отыскание преобразований, сохраняющих ту или иную не квадратичную форму — задача нетривиальная. И потому без какого-либо «внешнего» стимула она не привлекала пристального внимания геометров.

Ситуация изменилась, когда ряд математиков и физиков-теоретиков в поисках тех или иных обобщений теории относительности обратились к финслеровой геометрии. В рамках таких исследований и понадобились пространства с не квадратичной фундаментальной формой (см. [4]).

Однако отыскание непрерывных групп преобразований, которые сохраняют ту или иную не квадратичную форму, представляет существенную трудность, и потому исследования пространств с не квадратичной фундаментальной формой, как правило, ограничивались несколькими частными случаями таких пространств.

Эту трудность можно преодолеть, если в качестве линейного пространства взять векторное пространство той или иной линейной алгебры и в качестве фундаментальной формы принять некоторую мультипликативную функцию, определённую на этой алгебре. Тогда группой преобразований, сохраняющих фундаментальную форму, будет такая подгруппа линейной группы данной алгебры, для которой коэффициенты элементарных линейных функций принимают единичное значение на фундаментальной форме (см. [1]).

Таким образом, задача отыскания непрерывных групп преобразований, сохраняющих форму какой-либо степени, в ряде случаев сводится к отысканию алгебр, обладающих той или иной мультипликативной функцией. Например, для квадратичных форм такими алгебрами являются алгебры комплексных чисел, кватернионов и октав, и более общо — алгебр гиперкомплексных чисел или альтернионов.

Можно ли отыскать какие-либо широкие классы линейных алгебр, в которых бы геометрическая структура порождалась мультипликативной функцией, подобно тому, как евклидова и псевдоевклидова геометрия порождается алгебрами альтернионов?

Покажем, что в любой ассоциативной алгебре существует однородная мультипликативная функция, степень которой совпадает с размерностью линейного пространства алгебры. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ — какой-либо базис линейного пространства ассоциативной алгебры $\mathbf{A}$ над полем $\mathbb{R}$ и пусть c^r_{kh} — структурные константы, вычисленные в этом базисе:

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_h = c^r_{kh}\boldsymbol{e}_r.$$

Рассмотрим линейное алгебраическое уравнение $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, которое в выбранном базисе будет иметь вид

$$(a^k \boldsymbol{e}_k) \cdot (x^h \boldsymbol{e}_h) = b^r \boldsymbol{e}_r$$

или

$$a^k c^r_{kh} x^h \boldsymbol{e}_r = b^r \boldsymbol{e}_r.$$

Определитель системы линейных уравнений $a^k c^r_{kh} x^h = b^r$, эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, будем называть *левым детерминантом* элемента $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ и обозначать $\Delta_L(\boldsymbol{a})$. Аналогично вводится в рассмотрение *правый детерминант* $\Delta_R(\boldsymbol{a})$ элемента $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ как определитель системы линейных уравнений $a^h c^r_{kh} x^k = b^r$, эквивалентной линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Теорема 1. *Детерминанты* $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = \det(a^k c^r_{kh})$ *и* $\Delta_R(\boldsymbol{a}) = \det(a^h c^r_{kh})$ *произвольного элемента ассоциативной алгебры* $\mathbf{A}$ *являются мультипликативными функциями, т.е. для любых*

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{A}$ *имеем*

$$\Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\Delta_L(\boldsymbol{b}), \quad \Delta_R(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \Delta_R(\boldsymbol{a})\Delta_R(\boldsymbol{b}).$$

Доказательство. Для доказательства мультипликативного свойства левого детерминанта заметим, что в силу ассоциативности умножения в алгебре $\mathbf{A}$ справедливо тождество

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}).$$

Тогда, с одной стороны,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{x} = (a^k b^h c^r_{kh}\boldsymbol{e}_r)\cdot(x^l\boldsymbol{e}_l) = a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl} x^l \boldsymbol{e}_m,$$

с другой стороны,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}) = (a^k\boldsymbol{e}_k)\cdot(b^h c^r_{hl} x^l \boldsymbol{e}_r) = a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr} x^l \boldsymbol{e}_m,$$

т.е.

$$\Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \det(a^k b^h c^r_{kh} c^m_{rl}) = \det(a^k b^h c^r_{hl} c^m_{kr}) = \det(b^h c^r_{hl})\det(a^k c^m_{kr}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\Delta_L(\boldsymbol{b}).$$

Аналогично доказывается мультипликативное свойство правых детерминантов элементов ассоциативной алгебры. Заметим ещё, что если ассоциативная алгебра к тому же коммутативна, то правый и левый детерминанты, очевидно, совпадают, и можно говорить просто о детерминанте элементов такой алгебры. □

Возьмём детерминант $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ в качестве фундаментальной формы геометрической структуры на линейном пространстве ассоциативной алгебры. Тогда преобразования, сохраняющие форму $\Delta(\boldsymbol{x})$, будут порождаться линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ при условии, что $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = 1$. Это сразу следует из мультипликативности:

$$\Delta_L(\boldsymbol{x}') = \Delta_L(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) = \Delta_L(\boldsymbol{a})\cdot\Delta_L(\boldsymbol{x}) = \Delta_L(\boldsymbol{x}).$$

При этом заметим, что множество элементов $\boldsymbol{a}\in\mathbf{A}$ образуют подгруппу $\mathbf{G}_L(\mathbf{A})$ группы всех обратимых элементов алгебры $\mathbf{A}$ и, следовательно, преобразования линейного пространства алгебры, порождаемые линейными функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ при условии $\Delta_L(\boldsymbol{a}) = 1$, образуют группу движений геометрической структуры с фундаментальной формой $\Delta_L(\boldsymbol{x})$.

Аналогично, на линейном пространстве ассоциативной алгебры $\mathbf{A}$ можно определить и геометрическую структуру, фундаментальной формой для которой будет правый детерминант $\Delta_R(\boldsymbol{x})$, а движения в этой геометрии будут определяться линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}$ при условии $\Delta_R(\boldsymbol{a}) = 1$.

Заметим ещё, что линейные алгебры можно рассматривать и над полем комплексных чисел. При этом теорема о мультипликативности детерминантов остаётся справедливой (так как при её доказательстве нигде не использовалось предположение, что $a^k, b^h, c^r_{kh} \in \mathbb{R}$). Для линейных пространств, получаемых овеществлением линейных комплексных пространств ассоциативных алгебр над полем комплексных чисел, в качестве фундаментальной формы можно принять модуль левого или правого детерминанта, поскольку модуль комплексного числа обладает свойством мультипликативности.

Примером геометрических структур, определяемых на линейном пространстве ассоциативной алгебры детерминантом текущего элемента, могут служить *циклические пространства* (см. [3]). Линейными алгебрами для циклических пространств будут алгебры циклических чисел или групповые алгебры $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ над полем $\mathbb{R}$ с циклической группой $\mathbb{Z}_m$. Такие алгебры порождаются одним элементом, и их произвольный элемент $\boldsymbol{x}$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{x} = x_0 + x_1\boldsymbol{e} + x_2\boldsymbol{e}^2 + \ldots + x_{m-1}\boldsymbol{e}^{m-1},$$

где $\boldsymbol{e}$ — порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_m$ (т.е. $\boldsymbol{e}^m = 1$). Алгебра $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ коммутативна, поэтому правый и левый детерминанты текущего элемента этой алгебры совпадают и имеют следующий вид:

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{m-1} & \ldots & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \ldots & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1} & x_{m-2} & x_{m-3} & \ldots & x_0 \end{vmatrix}.$$

Такие определители называются *циркулянтами*; их мультипликативность можно проверить непосредственным перемножением.

Можно показать, что для экспоненты векторных элементов

$$\phi = \phi_1 \boldsymbol{e} + \phi_2 \boldsymbol{e}^2 + \ldots + \phi_{m-1} \boldsymbol{e}^{m-1}$$

справедливо тождество

$$\Delta(\exp(\phi_1 \boldsymbol{e} + \phi_2 \boldsymbol{e}^2 + \ldots + \phi_{m-1} \boldsymbol{e}^{m-1})) = 1,$$

так что движениями в циклических пространствах будут линейные преобразования, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \cdot \exp \phi$.

Циклические алгебры можно рассматривать как над вещественным, так и над комплексным полем. При этом любую вещественную циклическую алгебру $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m)$ можно рассматривать как подалгебру комплексной циклической алгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ с одной и той же базовой группой $\mathbb{Z}_m$, т.е. $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_m) \subset \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$. Но кроме вещественных циклических алгебр комплексные циклические алгебры содержат и другие подалгебры. В частности, алгебра $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$ содержит вещественную подалгебру антициклических чисел $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$, образующий элемент $\boldsymbol{i}$ которой удовлетворяет структурному тождеству $\boldsymbol{i}^m = -1$. На линейном пространстве алгебры $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_m)$ можно ввести геометрическую структуру с детерминантом в качестве фундаментальной формы.

Геометрические структуры на циклических и антициклических алгебрах естественным образом обобщают евклидову и псевдоевклидову двумерную структуру, так как геометрия на алгебрах $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_2)$ и $\overline{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) \equiv \mathbb{C}$ — это псевдоевклидова и евклидова планиметрии (о чём имеется обширная литература). В силу того, что циклические и антициклические пространства обобщают евклидову и псевдоевклидову плоскость, на циклических и антициклических пространствах можно определить не только циклическую длину векторов (или, как говорит Риман, — линейный элемент), но и циклический угол между векторами, который будет зависеть от $(m-1)$ параметров.

Конечно, пространства с не квадратичными фундаментальными формами не ограничиваются лишь ассоциативными алгебрами, в которых фундаментальная форма $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ или $\Delta_R(\boldsymbol{x})$ имеет степень, равную размерности пространства. Зачастую бывает интереснее найти мультипликативную форму, степень которой меньше размерности пространства, на котором задаётся не квадратичная фундаментальная форма.

В ряде случаев такую форму можно определить на линейной алгебре, которая получается из другой алгебры при помощи обобщённой процедуры удвоения, аналогичной той, которую использовал Грейвс при построении алгебры кватернионов Гамильтона, удвоив алгебру комплексных чисел, и алгебры октав — удвоив алгебру кватернионов (см. [2]).

Такая процедура, применённая к циклическим алгебрам $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, даёт алгебры $\mathbf{B}_2^m$, в которых определитель $D(\boldsymbol{x})$ системы линейных уравнений над алгеброй $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_m)$, эквивалентных линейному алгебраическому уравнению $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{B}_2^m$, будет комплекснозначной мультипликативной функцией (см. [2]). При этом степень фундаментальной формы $D(\boldsymbol{x})$ будет существенно меньше степени форм $\Delta_L(\boldsymbol{x})$ и $\Delta_R(\boldsymbol{x})$. Действительно, $\dim \mathbb{C}(\mathbb{Z}_m) = m$, а $\dim \mathbf{B}_2^m = m^2$, поэтому $\deg \Delta_L(\boldsymbol{x}) = \deg \Delta_R(\boldsymbol{x}) = m^2$, в то время как $\deg D(\boldsymbol{x}) = m$.

Например, для алгебры кватернионов

$$\Delta_L(x_0 + x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_3 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{vmatrix} = (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2,$$

в то время как

$$D((x_0 + x_1 \boldsymbol{i} + (x_2 + x_3 \boldsymbol{i})\boldsymbol{j}) = \begin{vmatrix} (x_0 + x_1 \boldsymbol{i}) & -(x_2 - x_3 \boldsymbol{i}) \\ (x_2 + x_3 \boldsymbol{i}) & (x_0 - x_1 \boldsymbol{i}) \end{vmatrix} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлаков И. М., Бурлаков М. П.* Геометрические структуры линейных алгебр. — LAMBERT, 2017.
2. *Бурлаков М. П.* Гамильтоновы алгебры. — М.: Граф Пресс, 2006.
3. *Бурлаков М. П., Бурлаков И. М., Гусева Н. И.* Очерки об алгебрах циклических чисел. — М.: Ким, 2020.
4. *Гарасько Г. И.* Начала финслеровой геометрии для физиков. — М.: Тетра, 2009.
5. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии// в кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979. — С. 20–33.

Гусева Надежда Ивановна
Московский педагогический государственный университет;
Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва
E-mail: ngus12@mail.ru

Лукьянова Елена Викторовна
Московский педагогический государственный университет
E-mail: lukyanovalv@list.ru