ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 53–65
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-53-65

УДК 517.98

ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА В $\mathbb{R}_2$

© 2022 г. **Л. Н. ЛЯХОВ, А. И. ИНОЗЕМЦЕВ**

Аннотация. Работа содержит формулу представления решения частно-интегрального уравнения Фредгольма второго рода в виде соответствующего ряда Неймана. Приведены условия существования и единственности этого решения в классах функций Лебега $L_{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, определенных в конечном прямоугольнике $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ евклидова пространства точек $\mathbb{R}_2$.

Ключевые слова: частный интеграл, уравнение Фредгольма, анизотропное пространство, резольвента, ряд Неймана, теорема о резонансе.

PARTIAL INTEGRAL FREDHOLM EQUATION IN ANISOTROPIC CLASSES OF LEBESGUE FUNCTIONS ON $\mathbb{R}_2$

© 2022 **L. N. LYAHOV, A. I. INOZEMTSEV**

Abstract. In this paper, we propose a formula for representing the solution of a partial integral Fredholm equation of the second kind in the form of the corresponding Neumann series. We obtain conditions for the existence and uniqueness of this solution in the classes of Lebesgue functions $L_{\boldsymbol{p}}$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, defined in a finite rectangle $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ of the Euclidean space $\mathbb{R}_2$.

Keywords and phrases: partial integral, Fredholm equation, anisotropic space, resolvent, Neumann series, resonance theorem.

AMS Subject Classification: 45B99, 47G99

1. Введение. В работе рассматривается уравнение Фредгольма 2-го рода с частными интегралами K_1, K_2 вида

$$\varphi(x) = \lambda(K_1\varphi)(x) + f(x), \tag{1}$$

$$\varphi(x) = \lambda(K_2\varphi)(x) + f(x), \tag{2}$$

где роль оператора Фредгольма играют частные интегралы в $\mathbb{R}_2$

$$(K_1u)(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x; t_1)u(t_1, x_2)dt_1, \quad D_1 = (a_1, b_1), \tag{3}$$

$$(K_2u)(x) = \int\limits_{D_2} k_2(x; t_2)u(x_1, t_2)dt_2, \quad D_2 = (a_2, b_2), \tag{4}$$

и $x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}_2$, $D = D_1 \times D_2$.

Анизотропное пространство Лебега $L_{\boldsymbol{p}}(D) = L_{(p_1,p_2)}(D) = L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))$, $p_i \geqslant 1$, представляет собой класс функций с конечной нормой (см. [1, с. 9])

$$\|f\|_{L_{p_1}(D_1;L_{p_2}(D_2))} = \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{p_2/p_1} dt_2 \right)^{1/p_2},$$

т.е. $f \in L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2)) \Longleftrightarrow \|f\|_{L_{p_1}(D_1;L_{p_2}(D_2))} < \infty$. Отметим, что пространства $L_{p_1}(D_1; L_{p_2}(D_2))$ и $L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$ не совпадают. Однако справедливо неравенство (см. [1, с. 23, неравенство (11)])

$$\|f\|_{L_{p_1}(D_1;L_{p_2}(D_2))} \leqslant \|f\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ — сопряженный мультииндекс:

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1.$$

В [5] (см. также [6]) доказаны неравенства

$$\|K_1 u\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)} \leqslant \|k_1\|_{L_{(q_1;p_1,p_2q_2)}(D_1\times D)} \|u\|_{L_{(p_1,p_2^2)}(D_1\times D_2)}, \tag{6}$$

$$\|K_2 u\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)} \leqslant \|k_2\|_{L_{(q_2;p_1q_1,p_2)}(D_2\times D)} \|u\|_{L_{(p_2,p_1^2)}(D_2\times D_1)}. \tag{7}$$

В этих рассуждениях полезно записать неравенства (6) и (7) в терминах функций со значениями в соответствующих банаховых пространствах (здесь мы следуем монографии [4, с. 19]), в частности, $L_{\boldsymbol{p}}(D) = L_{p_2}(D_2; L_{p_1}(D_1))$, а неравенства (6) и (7) примут вид

$$\|K_1 u\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leqslant \|k_1\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \|u\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}, \tag{8}$$

$$\|(K_2 u)\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leqslant \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))} \|u\|_{L_{p_1^2}(D_1;L_{p_2}(D_2))}. \tag{9}$$

Для оператора K_2 нам понадобится другое неравенство, в котором изменен порядок интегрирования по сравнению с (9), именно

$$\|K_2 f\|_{L_{p_1^2}(D_1;L_{p_2}(D_2))} \leqslant \|k_2\|_{L_{p_1^2q_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))} \|f\|_{L_{p_1^3}(D_1;L_{p_2}(D_2))}. \tag{10}$$

Доказательство (10) принципиально не отличается от доказательства (9), приведенного в [5, 6], но в данном случае оно получается из (9) применением неравенства (5).

2. Итерации частных интегралов K_1 и K_2. Пусть r — натуральное число. Итерацией порядка r частного интеграла K_i $(i = 1, 2)$ называется оператор K_i^r.

В следующей теореме установлена связь параметров $(p_1, p_2) = \boldsymbol{p}$ анизотропного пространства Лебега с порядком итерации.

Теорема 1. *Пусть*

$$\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1, \quad j = 1, 2$$

и r — произвольное натуральное число. Если

$$k_1(x; t_1) \in L_{p_2^r q_2}(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})), \quad f(x) \in L_{p_2^{r+1}}(D_2; L_{p_1}(D_1)),$$

то

$$(K_1^r f)(x) \in L_p(D),$$

при этом

$$\|K_1^r f\|_{L_p(D)} \leqslant \prod_{i=1}^{r} \|k_1\|_{L_{p_2^i q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \cdot \|f\|_{L_{p_2^{r+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))}. \tag{11}$$

Если

$$k_2(x_1, x_2; t_2) \in L_{p_2}(D_2; L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})), \quad k_2(x_1, x_2; t_2) \in L_{p_1^{r-1}q_1}(D_1; L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2})),$$

$$f(x_1, x_2) \in L_{p_1^{r+1}}(D_1; L_{p_2}(D_2)),$$

то

$$(K_2^r f)(x_1,x_2)\in L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1)),$$

при этом

$$\|K_2^r f\|_{L_{\boldsymbol p}(D)}\leqslant \|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))}\prod_{i=2}^{r}\|k_2\|_{L_{p_1^i q_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))}\cdot\|f\|_{L_{p_1^{r+1}}(D_1;L_{p_2}(D_2))}. \tag{12}$$

Доказательство. Вначале докажем (11). Поочередно применяя неравенство (8), получим

$$\|K_1^r f\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\leqslant \|k_1\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\|K_1^{r-1}f\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\leqslant$$
$$\leqslant \|k_1\|_{L_{p_2^1q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\|k_1\|_{L_{p_2^2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\|K_1^{r-2}f\|_{L_{p_2^3}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\leqslant\dots$$
$$\dots\leqslant\prod_{i=1}^{r}\|k_1\|_{L_{p_2^iq_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\|f\|_{L_{p_2^{r+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

Тем самым подтверждена справедливость неравенства (11).

В случае оператора K_2^r из неравенства (9) следует, что порядок интегрирования в (9) слева для функции K_2u и справа для функции u противоположный. Поэтому для оценки нормы оператора K_2^r в $L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))$ один раз применим формулу (9), затем воспользуемся неравенством (10), последовательно применяя которое, получим

$$\|K_2^r f\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}=\|K_2(K_2^{r-1}f)\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\leqslant$$
$$\leqslant\|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))}\cdot\|K_2^{r-1}f\|_{L_{p_1^2}(D_1;L_{p_2}(D_2))}\leqslant$$
$$\leqslant\|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))}\|k_2\|_{L_{p_1^2q_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))}\cdot\|K_2^{r-2}f\|_{L_{p_1^3}(D_1;L_{p_2}(D_2))}\leqslant$$
$$\leqslant\|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))}\|k_2\|_{L_{p_1^2q_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))}\|k_2\|_{L_{p_1^3q_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))}\times$$
$$\times\|K_2^{r-3}f\|_{L_{p_1^4}(D_1;L_{p_2}(D_2))}\leqslant\dots\leqslant$$
$$\leqslant\|k_2\|_{L_{p_2}(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1}))}\prod_{i=2}^{r}\|k_2\|_{L_{p_1^iq_1}(D_1;L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2}))}\cdot\|f\|_{L_{p_1^{r+1}}(D_1;L_{p_2}(D_2))}.$$

Таким образом, справедливо (12). $\square$

3. Итерированное ядро оператора K_1^m. Введем итерированное ядро $k_1^{(m)}(x;t_1)$, соответствующее натуральным степеням оператора K_1^m. Это ядро определено последовательностью частно-интегральных операций

$$k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)=\int\limits_{D_1}k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau)k_1(\tau,x_2;t_1)d\tau, \tag{13}$$

в которых первой итерацией является

$$k_1^{(1)}(x_1,x_2;t_1)=k_1(x_1,x_2;t_1).$$

Справедливо равенство

$$(K_1^m u)(x)=\int\limits_{D_1}k_1^{(m)}(x;t_1)u(t_1,x_2)dt_1, \tag{14}$$

где итерированное ядро $k_1^{(m)}$ представлено набором следующих повторных частно-интегральных операций

$$k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)=\int\limits_{D_1}\int\limits_{D_1}\dots\int\limits_{D_1}k_1(x_1,x_2;\tau_{m-1})k_1(\tau_{m-1},x_2;\tau_{m-2})\dots k_1(\tau_1,x_2;t_1)d\tau_1\dots d\tau_{m-1}.$$

Таким образом, m-кратная итерация частного интеграла снова представляет собой частный интеграл с ядром $k_1^{(m)}$, которое называется m-кратно итерированным ядром (m-итерированным ядром). Для итерации $K_1^{(m)}$, как и для любого частного интеграла вида K_1, справедливо неравенство (8), т.е.

$$\|(K_1^m u)\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D_{1,2}^{(2)})} \leqslant \|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\|u\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}. \tag{15}$$

Отсюда возникает интерес к норме m-итерированного ядра $k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)$ в пространстве $L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$.

Теорема 2 (о норме m-итерированного ядра k_1)**.** *В пространстве*

$$L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$$

норма итерированного ядра $k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)$ *оператора* K_1^m *удовлетворяет неравенству*

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leqslant \|k_1(x_1,x_2;\tau_1)\|_{L_{p_2q_2^m}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\prod_{i=1}^{m-1}\|k_1\|_{L_{p_2^2q_2^i}(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}. \tag{16}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (13)

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} = \left\|\int_{D_1} k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})d\tau_{m-1}\right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}.$$

По переменной τ_{m-1} воспользуемся неравенством Гельдера с показателями p_1 и q_1. Имеем

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leqslant \left\|\left(\int_{D_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}d\tau_{m-1}\right)^{1/q_1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_{D_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{1/p_1}\right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} =$$
$$=\left\{\int_{D_2}\left[\int_{D_1}\left(\int_{D_1}\left(\int_{D_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/q_1}\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\left(\int_{D_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/p_1}dt_1\right)^{p_1/q_1}dx_1\right]^{p_2q_2/p_1}dx_2\right\}^{1/p_2q_2}.$$

Выражение

$$\int_{D_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}d\tau_{m-1}$$

не зависит от переменной t_1, поэтому

$$\|k_1^{(m)}\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leqslant \left\{\int_{D_2}\left[\int_{D_1}\left(\int_{D_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}d\tau_{m-1}\right)^{p_1/q_1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int_{D_1}\left(\int_{D_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/p_1}dt_1\right)^{p_1/q_1}dx_1\right]^{p_2q_2/p_1}dx_2\right\}^{1/(p_2q_2)}.$$

Выражение

$$\left(\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}\left|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)\right|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/p_1}dt_1\right)^{p_1/q_1}$$

не зависит от x_1, поэтому

$$\left\|k_1^{(m)}\right\|_{L_{p_2q_2}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\leqslant\left\{\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}\left|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})\right|^{q_1}d\tau_{m-1}\right)^{p_1/q_1}dx_1\right]^{p_2q_2/p_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}\left|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)\right|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/p_1}dt_1\right]^{p_2q_2/q_1}dx_2\right\}^{1/(p_2q_2)}.$$

Еще раз воспользуемся неравенством Гельдера по переменной x_2 с показателями p_2 и q_2, получим неравенство

$$\left\|k_1^{(m)}\right\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})|^{q_1}d\tau_{m-1}\right)^{p_1/q_1}dx_1\right]^{p_2q_2^2/p_1}dx_2\right\}^{1/(p_2q_2^2)}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{D_2}\left[\int\limits_{D_1}\left(\int\limits_{D_1}|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)|^{p_1}d\tau_{m-1}\right)^{q_1/p_1}dx_1\right]^{p_2^2q_2/q_1}dx_2\right\}^{1/(p_2^2q_2)}=$$

$$=\left\|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})\right\|_{L_{p_2q_2^2}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\times\left\|k_1(\tau_{m-1},x_2;t_1)\right\|_{L_{p_2^2q_2}\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)}.$$

Таким образом, норма m-итерированного ядра оценена через посредство $(m-1)$-итерированного ядра. Рассуждая аналогично, получим оценку нормы $(m-1)$-итерированного ядра $k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})$ в пространстве $L_{p_2q_2^2}\big(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\big)$:

$$\left\|k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau_{m-1})\right\|_{L_{p_2q_2^2}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|k_1^{(m-2)}(x_1,x_2;\tau_{m-2})\right\|_{L_{p_2q_2^3}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\times\left\|k_1(\tau_{m-2},x_2;\tau_{m-1})\right\|_{L_{p_2^2q_2^2}\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)}.$$

Последним действием в процессе доказательства теоремы является оценка нормы дважды итерированного ядра $k_1^{(2)}(x_1,x_2;\tau_2)$ в пространстве $L_{p_2q_2^{m-1}}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))$. Здесь, применяя описанный выше подход, получим необходимое неравенство:

$$\left\|k_1^{(2)}(x_1,x_2;\tau_2)\right\|_{L_{p_2q_2^{m-1}}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|k_1(x_1,x_2;\tau_1)\right\|_{L_{p_2q_2^m}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)}\left\|k_1(\tau_1,x_2;\tau_2)\right\|_{L_{p_2^2q_2^{m-1}}\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)}.\quad\square$$

В результате можем сформулировать теорему о норме m-кратно итерированного ядра оператора K_1^m.

Теорема 3. *Если* $k_1 \in \Big\{L_\infty\Big(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D^{(2)}_{1,2})\Big) \cap L_\infty\big(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\big)\Big\}$, *то*

$$\Big\|(K_1^m u)\Big\|_{L_{\boldsymbol{p}}\left(D^{(2)}_{1,2}\right)} \leqslant \Big\|k_1(x_1,x_2;\tau_1)\Big\|_{L_{p_2q_2^m}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2q_2^i}\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)} \|u\|_{L_{p_2^2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)}. \quad (17)$$

Доказательство. Нам уже известно, что оператор $K_1^{(m)}$ представляет собой частный интеграл, отвечающий m-итерированному ядру $k_1^{(m)}$. Поэтому воспользовавшись неравенством (8), запишем

$$\Big\|(K_1^m u)\Big\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D^{(2)}_{1,2})} \leqslant \Big\|k_1^{(m)}\Big\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \|u\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства (16). □

Правая часть неравенство (16) содержит m множителей: один вида

$$\|k_1(x_1,x_2;t_1)\|_{L_{p_2q_2^m}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))},$$

оставшиеся $m-1$ множителей вида

$$\|k_1(x_1,x_2;t_1)\|_{L_{p_2^2q_2^i}(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}.$$

При применении метода последовательных приближений решения интегральных уравнений возникает необходимость в бесконечных итерациях частных интегралов. Как видим, некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций в неравенстве (16) стремятся к ∞ при $m \to \infty$ ($p_2q_2^m \to \infty$, $p_2^2q_2^{m-1} \to \infty$). Хорошо известно, что $L_p(D)$ вложено в $L_q(D)$ при $p > q$, если область D конечна (см. [3, с. 72]). Это приводит к неравенствам

$$\Big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_{p_2q_2^m}\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)} \leqslant A_1\Big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_\infty\left(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\right)},$$
$$\Big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_{p_2^2q_2^i}\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)} \leqslant A_1\Big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_\infty\left(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\right)},$$

где константа A_1 зависит от области интегрирования и вычисляется по формуле

$$A_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big\{(\mu(D_2))^{1/(p_2^2q_2^i)}, (\mu(D_2))^{1/(p_2q_2^m)}\Big\}$$

Заметим, что пространства $L_\infty\big(D_2; L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1})\big)$ и $L_\infty\big(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})\big)$, вообще говоря, различны. Пусть

$$Q_1 = \max\Big\{\|k_1\|_{L_\infty(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))},\ \|k_1\|_{L_\infty(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}\Big\};$$

тогда

$$\Big\|k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_{p_2q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \leqslant$$
$$\leqslant \Big\|k_1(x_1,x_2;\tau_1)\Big\|_{L_{p_2q_2^m}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))} \prod_{i=1}^{m-1} \|k_1\|_{L_{p_2^2q_2^i}(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))} \leqslant A_1^m Q_1^m.$$

Введем функцию

$$V_m(x_2) = \Big\|k_1^{(m)}(x_2)\Big\|_{L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})}$$

и рассмотрим ряд

$$V(x_2;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m V_{m+1}(x_2). \quad (18)$$

Поскольку функция $V_{m+1}(x_2)$ существенно ограничена, то почти всюду

$$|\lambda||V_m(x_2)| < \lambda A_1 Q_1 < 1$$

и ряд (18) сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию из $L_\infty(D_2)$. Ряд (18) будем называть регулярным, если функция

$$r_1(x;t_1;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_1^{(m+1)}(x_1,x_2;t) \in L_\infty(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})). \tag{19}$$

Примером регулярного ряда (19) является ряд, построенный на основе ядра $k_1(x;t_1)$, непрерывного по всем переменным своего аргумента.

Если ряд (19) является регулярным, то определяемая им функция $r_1 = r_1(x;t_1;\lambda)$ называется резольвентой ядра $k_1(x;t_1)$ частного интеграла K_1. Эта же функция называется резольвентой частно-интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{D_1} k_1(x;t_1)\varphi(t_1,x_2)dt_1 + f(x).$$

4. Итерированное ядро оператора K_2^m. Операторы K_1 и K_2 принципиально различны, что приводит к различным структурам применяемых к ним норм анизотропных пространств Лебега. Поэтому доказательство теоремы об оценке m-итерированного ядра k_2 частного интеграла K_2 не вытекает из рассуждений предыдущего пункта. Однако эти результаты легко прогнозируемы, поэтому приведем их без подробных доказательств, но с необходимыми комментариями.

Итерированным ядром $k_2^{(m)}(x;t_2))$ частного интеграла K_2^m называется последовательность частно-интегральных операций

$$k_2^{(m)}(x_1,x_2;t_2) = \int\limits_{D_2} k_2^{(m-1)}(x_1,x_2;\sigma)k_2(x_1,\sigma,t_2)d\sigma, \tag{20}$$

в которых первой итерацией является

$$k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2) = k_2(x_1,x_2;t_2).$$

Справедливо равенство

$$(K_2^m u)(x) = \int\limits_{D_2} k_2^{(m)}(x;t_2)u(x_1;t_2)dt_2, \tag{21}$$

где итерированное ядро $k_2^{(m)}$ имеет вид

$$k_2^{(m)}(x_1,x_2;t_2) = \int\limits_{D_2}\int\limits_{D_2}\dots\int\limits_{D_2} k_2(x_1,x_2;\sigma_{m-1})k_2(x_1,\sigma_{m-1};\sigma_{m-2})\dots k_2(x_1,\sigma_1;t_2)d\sigma_1\dots d\sigma_{m-1}.$$

Таким образом, m-кратная итерация частного интеграла снова представляет собой частный интеграл с ядром $k_2^{(m)}$, которое называется m-кратно итерированным ядром (m-итерированным ядром). Для итерации K_2^m, как и для любого частного интеграла вида K_2, справедливо неравенство (9), т.е.

$$\left\|(K_2^m u)\right\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)} \leqslant \left\|k_2^{(m)}\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})\right)} \|u\|_{L_{p_1^2}(D_1;L_{p_2}(D_2))}. \tag{22}$$

Теорема 4 (о норме m-итерированного ядра k_2). *В пространстве $L_{p_2}\big(D_2; L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})\big)$ норма итерированного ядра $k_2^{(m)}(x_1,x_2;t_2)$ оператора K_2^m удовлетворяет неравенству*

$$\left\|k_2^{(m)}(x_1,x_2;t_2)\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})\right)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2)\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{(q_2,p_1q_1^m)}(D_{2,1})\right)} \prod_{i=1}^{m-1} \left\|k_2(x_1,x_2;t_2)\right\|_{L_{p_1^2q_1^i}\left(D_1;L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)}. \tag{23}$$

Теорема 5. *Если* $k_2 \in \Big\{L_{p_2}\Big(D_2; L_{(q_2,\infty)}(D^{(2)}_{2,1})\Big);\ L_{p_1^2 q_1^i}\big(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\big)\Big\}$, *то*

$$\Big\|(K_2^m u)\Big\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D^{(2)}_{1,2})} \leqslant \Big\|k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\big(D_2; L_{(q_2,p_1q_1^m)}(D_{2,1})\big)} \times \\ \times \prod_{i=1}^{m-1}\Big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_1^2 q_1^i}\big(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\big)} \|u\|_{L_{p_1^2}(D_1; L_{p_2}(D_2))}. \quad (24)$$

Неравенство (23) содержит m множителей: один вида $\Big\|k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\big(D_2; L_{(q_2,p_1q_1^m)}(D_{2,1})\big)}$, оставшиеся $m-1$ множителей вида $\big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\big\|_{L_{p_1^2 q_1^i}\left(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)}$.

При применении метода последовательных приближений решения интегральных уравнений возникает необходимость в бесконечных итерациях частных интегралов. Как видим, некоторые параметры анизотропных лебеговых классов функций в неравенстве (23) стремятся к ∞ при $m \to \infty$ ($p_1 q_1^m \to \infty$, $p_1^2 q_1^{m-1} \to \infty$). Хорошо известно, что $L_p(D)$ вложено в $L_q(D)$ при $p > q$, если область D конечна (см. [3, с. 72]). Это приводит к неравенствам

$$\Big\|k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\big(D_2; L_{(q_2,p_1q_1^m)}(D_{2,1})\big)} \leqslant A_2 \Big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\left(D_2; L_{(q_2,\infty)}(D_{2,1})\right)},$$
$$\Big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_1^2 q_1^i}\left(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)} \leqslant A_2 \Big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\Big\|_{L_\infty\left(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)},$$

где константа A_2 зависит от области интегрирования:

$$A_2 = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\Big\{(\mu(D_1))^{1/(p_1^2 q_1^i)},\ (\mu(D_1))^{1/(p_1 q_1^m)}\Big\}.$$

Пусть

$$Q_2 = \max\Big\{\big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\big\|_{L_{p_2}\left(D_2; L_{(q_2,\infty)}(D_{2,1})\right)},\ \big\|k_1(x_1,x_2;t_1)\big\|_{L_\infty\left(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)}\Big\};$$

тогда

$$\Big\|k_2^{(m)}(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\left(D_2; L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})\right)} \leqslant \\ \leqslant \Big\|k_2^{(1)}(x_1,x_2;t_2)\Big\|_{L_{p_2}\big(D_2; L_{(q_2,p_1q_1^m)}(D_{2,1})\big)} \prod_{i=1}^{m-1}\big\|k_2(x_1,x_2;t_2)\big\|_{L_{p_1^2 q_1^i}\left(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\right)} \leqslant A_2^m Q_2^m.$$

Введем функцию

$$W_m(x_1) = \Big\|k_2^{(m)}(x_1)\Big\|_{L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})}$$

и рассмотрим ряд

$$W(x_1;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m W_{m+1}(x_1). \quad (25)$$

Поскольку функция $W_m(x_1)$ существенно ограничена, то $|\lambda||W_m(x_1)| < |\lambda| A_2 Q_2 < 1$ почти всюду, и ряд (25) сходится абсолютно и равномерно и определяет функцию из $L_\infty(D_1)$. Ряд (25) будем называть регулярным, если функция

$$r_2(x;t_2;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_2^{(m+1)}(x_1,x_2;t_2) \in L_\infty\big(D_1; L_{(p_2,q_2)}(D_{2,2})\big). \quad (26)$$

Примером регулярного ряда (26) является ряд, построенный на основе ядра $k_2(x;t_2)$ непрерывного по всем переменным своего аргумента.

Если ряд (26) является регулярным, то определяемая им функция $r_2 = r_2(x;t;\lambda)$ называется резольвентой ядра $k_2(x;t_2)$ частного интеграла K_2 или резольвентой частно-интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{D_2} k_2(x;t_2)\varphi(x_1,t_2)dt_2 + f(x).$$

5. Частно-интегральное уравнение Фредгольма второго рода с частным интегралом K_i. Рассмотрим частно-интегральное уравнение Фредгольма (1) с частным интегралом (2). Применяется классический метод последовательных приближений в том виде, в каком он используется для определения решений интегрального уравнения Фредгольма. То есть его решение будем искать в виде степенного ряда

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^{(m)}(x)\lambda^m. \tag{27}$$

Подставив (27) в (1), получим равенство степенных рядов по λ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(0)}(x) = f(x),\\
&\varphi^{(1)}(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x_1,x_2;t_1)\varphi^{(0)}(t_1,x_2)dt_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi^{(m)}(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x_1,x_2;t_1)\varphi^{(m-1)}(t_1,x_2)dt_1.
\end{aligned}$$

Выражая $\varphi^{(m)}(x)$ через $f(x)$, имеем

$$\varphi^{(1)}(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x_1,x_2;t_1)f(t_1,x_2)dt_1 = \int\limits_{D_1} k_1^{(1)}(x_1,x_2;t_1)f(t_1,x_2)dt_1,$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x_1,x_2;\tau_1)\left[\int\limits_{D_1} k_1^{(1)}(\tau_1,x_2;t_1)f(t_1,x_2)dt_1\right]d\tau_1 =$$

$$= \int\limits_{D_1}\left[\int\limits_{D_1} k_1(x_1,x_2;\tau_1)k_1^{(1)}(\tau_1,x_2;t_1)d\tau_1\right]f(t_1,x_2)dt_1 = \int\limits_{D_1} k_1^{(2)}(x_1,x_2;t_1)f(t_1,x_2)dt_1.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi^{(m)}(x) = \int\limits_{D_1} k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)f(t_1,x_2)dt_1. \quad m = 0,1,2,\dots.$$

Согласно формуле (14)

$$\int\limits_{D_1} k_1^{(m)}(x;t)f(t_1,x_2)dt_1 = (K_1^m f)(x),$$

имеем

$$\varphi^{(m)}(x) = (K_1^m f)(x) \quad m = 0,1,2,\dots.$$

Таким образом, предполагаемое решение (27) примет вид следующего ряда Неймана:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x). \tag{28}$$

Теорема 6. *Пусть ядро k_1 частного интеграла* (3) *и правая часть неравенства* (17) *удовлетворяют условиям*

$$Q_1 = \max\Big\{\|k_1\|_{L_{p_2^m q_2}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\Big\}_{m=1}^{\infty} < \infty, \quad \|f\|_{\Lambda_1} = \max\Big\{\|f\|_{L_{p_2^{m+1}}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\Big\}_{m=1}^{\infty} < \infty$$

и пусть $|\lambda|A_1Q_1 < 1$. Тогда в $L_{\boldsymbol p}$ существует предел

$$\Phi = \lim_{r\to\infty}\Phi_r$$

функциональной последовательности

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r}\lambda^i K_1^i f(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_{\boldsymbol p}(D_{1,2})$ в $L_{(p_1,\infty)}(D_{1,2})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})} \leqslant \varliminf_{r\to\infty}\|\Phi_r\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})}. \tag{29}$$

Решение уравнения Фредгольма с частным интегралом (3) *существует в виде операторного ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_1^m f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\boldsymbol p}} \leqslant \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1-|\lambda|A_1Q_1}.$$

Это решение единственно.

Доказательство. Нужно показать, что ряд (27) определяет некоторую функцию из пространства $L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))$. Достаточно убедиться, что последовательность

$$\varphi^{(r)}(x) = \sum_{m=0}^{r}\lambda^m (K_1^m f)(x)$$

фундаментальна в $L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))$. Действительно. Пусть ℓ — произвольное натуральное число. Тогда

$$\Big\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\Big\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} = \Big\|\sum_{m=r+1}^{r+\ell}\lambda^m (K_1^m f)(x)\Big\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=r+1}^{r+\ell}|\lambda|^m\Big\|(K_1^m f)(x)\Big\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

Воспользовавшись неравенством (17), получим

$$\Big\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\Big\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leqslant \sum_{m=r+1}^{r+\ell}|\lambda|^m\big\|k_1(x_1,x_2;\tau_1)\big\|_{L_{p_2 q_2^m}(D_2;L_{(q_1,p_1)}(D_{1,1}))}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{m-1}\|k_1\|_{L_{p_2^2 q_2^i}(D_2;L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1}))}\|f\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}.$$

Здесь m сомножителей из норм ядра k_1, каждое из которых не превосходит числа Q_1. Поэтому получим следующую оценку разности:

$$\Big\|\varphi^{(r+\ell)} - \varphi^{(r)}\Big\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} \leqslant \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}\sum_{m=r+1}^{r+m}|\lambda|^m A_1 Q_1^m =$$
$$= \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}(|\lambda|A_1Q_1)^r\sum_{m=1}^{\ell}|\lambda|^m A_1^m Q_1^m \leqslant \|f\|_{L_{p_2^2}(D_2;L_{p_1}(D_1))}(|\lambda|A_1Q_1)^r\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda|^m A_1^m Q_1^m.$$

Следовательно,

$$\left\|\varphi^{(r+\ell)}-\varphi^{(r)}\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} \leqslant \|f\|_{L_{p_2^2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)}(|\lambda|A_1Q_1)^r\frac{1}{1-|\lambda|A_1Q_1}. \tag{30}$$

Так как $|\lambda|A_1Q_1 < 1$, то величина $(|\lambda|A_1Q_1)^r$ стремится к нулю с ростом r. Таким образом, последовательность $\varphi^{(r)}$ фундаментальна в анизотропном пространстве Лебега $L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))$. Итак, мы убедились в существовании функции $\varphi \in L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))$, определенной рядом (28) и, следовательно, (27). Покажем, что эта функция есть решение уравнения (1).

Введем оператор

$$\Phi_r f = \varphi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r}\lambda^i K_1^i f(x). \tag{31}$$

Положим $\Phi_\infty = \Phi$:

$$\Phi f(x) = \varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_1^m f. \tag{32}$$

Из (31), (32) и (17) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\Phi_r f-\Phi f\right\|_{L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1))} = \lim_{r\to\infty}\left\|\sum_{i=r+1}^{\infty}\lambda^i K_1^i f\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left\|\lambda^{r+1}K_1^{r+1}\sum_{i=0}^{\infty}K_1^i f\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} = \lim_{r\to\infty}\left\|\lambda^{r+1}K_1^{r+1}\phi\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{r\to\infty}\left(A_1Q_1|\lambda|\right)^{r+1}\|\varphi\|_{L_{p_2^{r+2}}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} = 0.$$

Здесь первый сомножитель стремится к нулю за счет выбора λ, а второй ограничен значением $\|\Phi\|_{L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1))}$. Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\Phi_r f-\Phi f\right\|_{L_{p_2}\left(D_2;L_{p_1}(D_1)\right)} = 0,$$

т.е. существует сильный предел функциональной последовательности $\Phi_r f$, который обозначим $\operatorname*{s-lim}_{r\to\infty}\Phi_r f = \Phi f$.

Теперь воспользуемся следующими утверждениями.

Лемма 1 (теорема о резонансе; см. [2, следствия 1 и 2, с. 104]). *Пусть $\{\Phi_r\}$ — семейство ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y. Если множество $\{\|\Phi_r f(x)\|\}$ ограничено при каждом фиксированном f, то и множество $\{\|\Phi_r\|\}$ ограничено.*

Лемма 2. *Предположим, что сильный предел $\operatorname*{s-lim}_{r\to\infty}\Phi_r f = \Phi f$ существует при каждом фиксированном f. Тогда Φ — тоже ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y, причем*

$$\|\Phi\| \leqslant \varliminf_{r\to\infty}\|\Phi_r\|.$$

В нашем случае

$$X = \left\{f \in L_\infty(D_2;L_{p_1}(D_1)) : \|f\|_{\Lambda_1} = \max\left\{\|f\|_{L_{(p_1,p_2^{m+1})}(D_{1,2})}\right\}_{m=1}^{\infty} < \infty\right\}, \quad Y = L_{p_2}(D_2;L_{p_1}(D_1)).$$

Ясно, что

$$\|\Phi_r f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)} = \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \leqslant \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1-|\lambda|A_1Q_1},$$

Отсюда вытекает, что множество $\|\Phi_r\|_X$ ограничено. Доказано существование сильного предела $\operatorname*{s-lim}_{r\to\infty}\Phi_r f = \Phi f$. Поэтому из теоремы о резонансе вытекает неравенство (23).

Нетрудно проверить, что введенная выше функция

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x)$$

является решением уравнения (1). Действительно, подставляя $\varphi(x)$ в правую часть уравнения (1), получим левую часть этого уравнения:

$$\lambda K_1 * (\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x)) + f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x) + f = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m (K_1^m f)(x) = \varphi(x).$$

Как мы уже показали,

$$\lim_{r\to\infty} \|\Phi_r f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)} = \lim_{r\to\infty} \|\varphi^{(r)}\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \leqslant \frac{\|f\|_{\Lambda_1}}{1-|\lambda|A_1Q_1},$$

т.е. множество $\|\Phi_r f\|_{L_{\boldsymbol{p}}(D)}$ ограничено, и существует предел

$$\varphi(x) = \lim_{r\to\infty} \Phi_r f(x) = \lim_{r\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda^r K_1^r \right) f(x) = \Phi f(x),$$

то из теоремы о резонансе получим ограниченность $\|\Phi\|$, причем из существования сильного предела $\Phi f(x)$ последовательности $\Phi_r f(x)$ имеем (см. [2, с. 104, следствие 2])

$$\|\Phi\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})} \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})}$$

и существует обращающий оператор $\Phi = \lim\limits_{r\to\infty} \Phi_r$, отображающий $L_{\boldsymbol{p}}(D)$ в $L_{\boldsymbol{p}}(D)$.

Функция

$$\varphi = \lim_{r\to\infty} \varphi^{(r)} = \lim_{r\to\infty} \sum_{m=0}^{r} \lambda^m K_1^m f = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_1^m f$$

является решением уравнения (1). Полученное решение φ в пространстве $L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})$ единственно, поскольку решение однородного уравнения равно нулю. □

Вернемся к решению, представленному рядом (29). Воспользовавшись формулой (20), выразим это решение через итерированные ядра частного интеграла K_1^m:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{D_1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1) l^m \right] f(t_1, x_2) dt_1.$$

выражение в квадратных скобках представляет собой резольвенту ядра k_1 (см. формулу (19)):

$$r_1(x; t_1; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m k_1^{(m+1)}(x_1, x_2; t_1) \in L_\infty(D_2; L_{(p_1,q_1)}(D_{1,1})).$$

Следовательно, решение уравнения (1) можно записать в операторной форме

$$(I + \lambda R_1) f(x) = \varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{D_1} r_1(x; t_1; \lambda) f(t_1, x_2) dt_1, \tag{33}$$

в которой $I+\lambda R_1$ представляет собой оператор типа частного интеграла, ядром которого является резольвента ядра частного интеграла K_1.

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$(I - \lambda K_1)\varphi(x) = f(x), \tag{34}$$

Тогда операторная форма (33) решения (34) определена применением оператора $I+\lambda R_1$ к правой части операторного уравнения (34):

$$\varphi(x) = (I + \lambda R_1)(I - K_1)\varphi(x) = (I + \lambda R_1) f(x).$$

В связи с этим положим

$$I + \lambda R_1 = (I - \lambda K_1)^{-1}.$$

Оператор $I + \lambda R_1$ совпадает с оператором Φ и является обратным к оператору $I - \lambda K_1$.

Приведем без доказательства теорему о существовании и единственности решения уравнения (2).

Теорема 7. *Пусть ядро k_2 частного интеграла* (4) *и правая часть неравенства* (24) *удовлетворяют условиям*

$$Q_2 = \max\left\{ \|k_2\|_{L_{p_2}\left(D_2; L_{(q_2,p_1q_1)}(D_{2,1})\right)};\ \left\{ \|k_2\|_{L_{p_1^m q_1}\left(D_1; L_{(q_2,p_2)}(D_{2,2})\right)} \right\}_{m=2}^{\infty} \right\} < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\Lambda_2}} = \max\left\{ \|f\|_{L_{p_1^{m+1}}(D_1; Lp_2(D_2))} \right\}_{m=1}^{\infty} < \infty$$

и пусть $|\lambda| A_2 Q_2 < 1$. Тогда в $L_{\boldsymbol{p}}$ существует предел $\Phi = \lim\limits_{r\to\infty} \Phi_r$ функциональной последовательности

$$\Phi_r f = \phi^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i K_2^i f(x).$$

Оператор Φ действует ограниченно из $L_{\boldsymbol{p}}(D_{1,2})$ в $L_{(p_2,\infty)}(D_{2,1})$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi\|_{L_{(p_2,\infty)}(D_{2,1})} \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \|\Phi_r\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_{1,2})}.$$

Тогда существует решение уравнения Фредгольма с частным интегралом (4) *в виде операторного ряда Неймана*

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_2^m f, \quad \text{причем} \quad \|\varphi\|_{L_{\boldsymbol{p}}} \leqslant \frac{\|f\|_{\Lambda_2}}{1 - |\lambda| A_2 Q_2}.$$

Это решение единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральное представление функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
3. *Корпусов М. О., Панин А. А.* Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Т. II. Специальные пространства. — М.: Физический факультет МГУ, 2016.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. *Ляхов Л. Н., Иноземцев А. И.* Частные интегралы в анизотропных классах Лебега. I. Двумерный случай// в кн.: Проблемы математического анализа. — СПб., 2020. — Т. 102. — С. 119–123.
6. *Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I.* Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. I: Two-dimensional case// J. Math. Sci. — 2020. — *247*, № 6. — P. 888–892.

Ляхов Лев Николаевич
Воронежский государственный университет
E-mail: `levnlya@mail.ru`

Иноземцев Алексей Иванович
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского
E-mail: `inozemcev.a.i@gmail.com`