ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 18–31
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-18-31

УДК 514.763

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. IV. СТРУКТУРА ПРОЕКТИВНЫХ И АФФИННЫХ АЛГЕБР ЛИ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ

© 2022 г. **А. В. АМИНОВА, Д. Р. ХАКИМОВ**

Аннотация. Работа посвящена имеющей многочисленные геометрические и физические приложения проблеме исследования многомерных псевдоримановых многообразий, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Настоящая статья является четвертой частью работы. Первая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *212.* — С. 10–29. Вторая часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *213.* — С. 10–37. Третья часть: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2022. — *214.* — С. 3–20. Окончание будет опубликовано в следующем выпуске.

***Ключевые слова*:** дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h-пространство, система дифференциальных уравнений с частными производными, негомотетическое проективное движение, уравнение Киллинга, проективная алгебра Ли.

LIE ALGEBRAS OF PROJECTIVE MOTIONS OF FIVE-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES. IV. STRUCTURE OF PROJECTIVE AND AFFINE LIE ALGEBRAS OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID h-SPACES

© 2022 **A. V. AMINOVA, D. R. KHAKIMOV**

Abstract. This work is devoted to the problem of studying multidimensional pseudo-Riemannian manifolds that admit Lie algebras of infinitesimal projective (in particular, affine) transformations, wider than Lie algebras of infinitesimal homotheties. Such manifolds have numerous geometric and physical applications. This paper is the fourth part of the work. The first part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *212.* — P. 10–29. The second part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *213.* — P. 10–37. The third part: Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory. — 2022. — *214.* — P. 3–20. The last part will be published in the next issue.

***Keywords and phrases*:** differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space, system of partial differential equations, nonhomothetical projective motion, Killing equation, projective Lie algebra.

***AMS Subject Classification*:** 53Z05

4. Структура проективных и аффинных алгебр Ли пятимерных жестких h-пространств

В данном разделе исследуются пятимерные псевдоримановы пространства, допускающие *инфинитезимальные проективные преобразования.* Находится общее решение уравнения Эйзенхарта для каждого из жестких h-пространств типов $\{221\}$, $\{32\}$, $\{41\}$ и $\{5\}$ непостоянной кривизны. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в каждом из перечисленных h-пространств непостоянной кривизны и описывается структура негомотетической проективной алгебры Ли этих пространств.

4.1. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$.

4.1.1. Найдем общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\psi + g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{4.1}$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{4.2}$$

в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию

$$\psi = c_1 \left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 \right) + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}, \tag{4.3}$$

*где функция φ определена равенством (**??**), c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Ввиду инвариантности величин f_i и тензорного характера равенства (4.3) достаточно доказать его в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{hq} \omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph} \omega_{q\tilde{h}} \right) = (Y_q \psi)\theta_p + (Y_p \psi)\theta_q; \tag{4.4}$$

здесь формы $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в репере (**??**).

Применив внешний дифференциал d к уравнению (4.4), получим условия интегрируемости этого уравнения:

$$\bar{b}_{ph} \Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq} \Omega^h{}_p = \psi_{ph} \theta^h \wedge \theta_q + \psi_{hq} \theta^h \wedge \theta_p, \tag{4.5}$$

где

$$\Omega^h{}_p = e_h \Omega_{\tilde{h}p}, \quad \psi_{ph} \equiv -Y_h Y_p \psi - \gamma^l{}_{ph} Y_l \psi = \psi_{hp}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных 2-формах $\theta_h \wedge \theta_q$ слева и справа в (4.5), при $(pq) = (11)$, (13), (15), (14) найдем

$$\psi_{11} = -\bar{b}_{11} \left(C_1 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} \right) = -\bar{b}_{11} \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} = \bar{b}_{11} \left(\frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} - \frac{C_3}{f_3 - f_1} \right),$$

$$\bar{b}_{11} \left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2} \right) = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (**??**), и по теореме **??** пространство H_{221} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$.

Аналогично выводятся равенства

$$\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0, \quad \psi_{i_1 5} = \psi_{i_2 5} = \psi_{i_1 i_2} = 0, \quad i_1 = 1, 2; \; i_2 = 3, 4. \tag{4.6}$$

С учетом этих равенств уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (**??**), при $(pq) = (11)$, (12) дают

$$Y_1 \psi = 0, \quad d\bar{b}_{12} \equiv \theta^l Y_l \bar{b}_{12} = (Y_2 \psi)\theta_1.$$

Пользуясь формулами (**??**), выводим отсюда

$$\bar{b}_{12} = e_1\alpha(x^2), \quad \partial_2\psi = \alpha'(x^2).$$

Так же получаются равенства

$$\bar{b}_{34} = e_2\beta(x^4), \quad \bar{b}_{55} = e_3\gamma(x^5), \quad \partial_4\psi = \beta'(x^4), \quad \partial_5\psi = \frac{1}{2}\gamma'(x^5);$$

в результате

$$\psi = \alpha(x^2) + \beta(x^4) + \frac{1}{2}\gamma(x^5) + \mathrm{const}\,.$$

Из (4.4) при $(pq) = (23)$, (14) найдем

$$\alpha' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_1', \quad \beta' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_2'.$$

В случае $f_2{}' f_1' \neq 0$ отсюда следует

$$(\alpha'/f_1')(x^2) = (\beta'/f_2')(x^4) \equiv c_1 = \mathrm{const},$$

т.е.

$$\alpha = c_1 f_1 + \mathrm{const}, \quad \beta = c_1 f_2 + \mathrm{const};$$

к такому же выводу придем при $f_2{}' f_1' = 0$.

Интегрируя уравнение (4.4) с $(pq) = (15)$:

$$\gamma' = \frac{\gamma - c_1 f_1}{f_3 - f_1} f_3',$$

получим $\gamma = c_1 f_3 + \mathrm{const}$; в итоге имеем (4.3):

$$\psi = c_1\left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3\right) + \mathrm{const}\,.$$ □

Теорема 4.2. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Последнее равенство является тензорным, т.е. справедливым в любой системе координат, поэтому достаточно проверить его в косонормальном репере (**??**), где уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h\left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Так как это уравнение получается из уравнения (4.4) при $\psi = \mathrm{const}$, то справедливы равенства (4.6):

$$\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0, \quad i_1 = 1, 2, \quad i_2 = 3, 4,$$

благодаря которым система (4.7) сводится к уравнениям

$$d\bar{b}_{12} = d\bar{b}_{34} = d\bar{b}_{55} = 0, \quad e_2\bar{b}_{34} - e_1\bar{b}_{12} = e_3\bar{b}_{55} - e_2\bar{b}_{34} = 0,$$

из которых следует $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (**??**) и множитель c_2 постоянен ввиду условия $b_{ij,k} = 0$ и ковариантного постоянства метрического тензора g_{ij}. Это доказывает теорему 4.2. □

Так как векторное поле X является аффинным движением в H_{221}, если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, то из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия*: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.

Поскольку любые два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (**??**) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b, то из теоремы 4.1 и линейности уравнения (**??**) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.2, в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.4. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g, \tag{4.8}$$

где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (**??**) *каноническими формами* (**??**), *c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.5. *Если h-пространство (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Доказательство. Если $(X_1, \dots, X_r)$ — базис алгебры Ли P_r, то

$$L_{X_s} g = \underset{s}{c_1} h + \underset{s}{c_2} g, \quad s = 1, \dots, r,$$

где одна из постоянных $\underset{s}{c_1}$, например, $\underset{1}{c_1}$, отлична от нуля (в противном случае P_r состоит из гомотетий). В новом базисе $Z_1 = X_1$, $Z_\tau = \underset{1}{c_1} X_\tau - \underset{\tau}{c_1} X_1$ имеем

$$L_{Z_\tau} g = \Bigl(\underset{1}{c_1}\underset{\tau}{c_2} - \underset{1}{c_2}\underset{\tau}{c_1}\Bigr) g, \quad \tau = 2, \dots, r. \qquad \square$$

4.2. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{32\}$.

4.2.1. В этом разделе будет найдено общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{32}, g) непостоянной кривизны.

Теорема 4.6. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта* (4.1), *равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению* (4.2), *в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1 \left(\frac{3}{2} f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}, \tag{4.9}$$

где функция φ определена равенством (**??**), *c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Учитывая тензорный характер равенства (4.9), достаточно доказать его в каноническом косонормальном репере (**??**), где (4.2) принимает вид уравнения (4.4), в котором $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косонормальном репере (**??**).

Из условий интегрируемости (4.5) уравнения (4.4), собирая члены, содержащие базисные 2-формы $\theta_k \wedge \theta_l$, при $(pq) = (14)$ и $(kl) = (34)$ получим $\psi_{11} = 0$, затем при $(pq) = (11)$, $(kl) = (13)$ и $(pq) = (15)$, $(kl) = (34)$ найдем

$$B_1 \bar{b}_{11} = S_2 \bar{b}_{11} = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (**??**), и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$. Так же получим

$$\bar{b}_{12} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1 i_2} = \psi_{12} = \psi_{44} = \psi_{i_1 i_2} = 0,$$

где $i_1 = 1, 2, 3$, $i_2 = 4, 5$.

Из (4.5) при $(pq) = (33)$, (24), (55) следуют равенства

$$S_1 \bar{b}_{33} = 0, \tag{4.10}$$

$$(e_2 \bar{b}_{45} - e_1 \bar{b}_{22}) \frac{B_1}{3(f_2 - f_1)} = e_1 \psi_{23}, \tag{4.11}$$

$$S_2\bar{b}_{55} = \psi_{55}. \tag{4.12}$$

С учетом полученных выше равенств из уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (**??**), при $(pq) = (35)$ получим $(Y_5\varphi)\bar{b}_{33} = 0$, а из (4.10) имеем $S_1\bar{b}_{33} = 0$.

Если $\bar{b}_{33} \neq 0$, то $S_1 = (Y_5\varphi) = 0$; отсюда

$$S_1 \equiv e_1 Y_3(B_1) = S_2 \equiv e_2 Y_5(Y_5\varphi) = 0.$$

Дифференцируя равенство $S_1 = 0$ по x^1, найдем $\varepsilon_1 = 0$; ввиду этого $B_1 = 0$. Следовательно, H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{33} = 0$.

Из уравнения (4.4) с учетом равенства $\bar{b}_{33} = 0$ при $(pq) = (23)$ найдем $e_1 Y_3 \bar{b}_{23} = 0$. Так же при $(pq) = (33)$ получим

$$e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = Y_3\psi, \tag{4.13}$$

после этого из (4.4) при $(pq) = (12)$, (23) и уравнения (4.13) выводим $Y_1\bar{b}_{23} = Y_2\bar{b}_{23} = 0$.

Аналогично из (4.4) имеем

$$Y_4\bar{b}_{23} = Y_5\bar{b}_{23} = 0.$$

В итоге $Y_i\bar{b}_{23} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, 5$; отсюда следует $\bar{b}_{23} = \mathrm{const}$. Обозначим $\bar{b}_{23} = e_1 c_1$, $c_1 \equiv \mathrm{const}$.

Из уравнения (4.4) при $(pq) = (11)$, (14), (24) имеем

$$Y_1\psi = Y_2\psi = Y_4\psi = 0.$$

Отсюда, используя формулы (**??**), найдем $\psi = \psi(x^3, x^5)$.

Интегрируя уравнение (4.13), где $\bar{b}_{23} = e_1 c_1$, получим

$$\psi = \frac{3}{2} c_1 f_1 + \gamma(x^5).$$

Из уравнения (4.4) при $(pq) = (25)$ следует $c_1(Y_5\varphi) = Y_5\psi$, отсюда после интегрирования имеем $\gamma = c_1 f_2 + \mathrm{const}$. В итоге

$$\psi = c_1\left(\frac{3}{2} f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}. \qquad \square$$

Теорема 4.7. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}.$$

Доказательство. Уравнение $b_{ij,k} = 0$ в косонормальном репере (**??**) имеет вид (4.7). Учитывая, что это уравнение получается из (4.4) при $\psi = \mathrm{const}$, с учетом полученных выше равенств

$$\bar{b}_{11} = \bar{b}_{12} = \bar{b}_{33} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0, \quad i_1 = 1, 2, 3;\ i_2 = 4, 5,$$

из (4.7) имеем

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\frac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1} = 0, \tag{4.14}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22})\frac{(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)} = 0, \tag{4.15}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\frac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1} = 0. \tag{4.16}$$

Из уравнения (4.7) при $(pq) = (33)$, (35) найдем

$$e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = 0, \quad e_1\bar{b}_{23}(Y_5\varphi) = 0.$$

Если $\bar{b}_{23} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$; отсюда $B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{23} = 0$.

Затем из (4.7) при $(pq) = (13)$, (22) получим

$$Y_i b_{13} = Y_i b_{22} = 0, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

отсюда следует, что $\bar{b}_{13}$ и $\bar{b}_{22}$ постоянны. Так же доказывается постоянство компоненты $\bar{b}_{45}$.

Из уравнений (4.12) при $\psi = \mathrm{const}$ и (4.7) при $(pq) = (35)$ найдем

$$S_2\bar{b}_{55} = (Y_3\varphi)\bar{b}_{55} = 0.$$

Если $\bar{b}_{55} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) \equiv B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну, поэтому $\bar{b}_{55} = 0$.

Обозначим $\bar{b}_{13} = e_1c_2 = \mathrm{const}$. Из уравнений (4.14) и (4.16) имеем

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})Y_5\varphi = 0, \quad (e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})Y_3\varphi = 0.$$

Если $(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13}) \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$, отсюда $B_1 = S_2 = 0$, и по теореме **??** пространство H_{32} имеет постоянную кривизну; следовательно,

$$e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13} = 0, \quad \bar{b}_{45} = e_1e_2\bar{b}_{13} = e_2c_2.$$

Так же из уравнений (4.11) и (4.15) найдем $e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22} = 0$, отсюда $\bar{b}_{22} = e_1c_2$. В итоге имеем $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (**??**) и множитель c_2 постоянен. $\square$

Принимая во внимание, что векторное поле X является аффинным движением в (H_{32}, g), если и только если производная Ли L_Xg ковариантно постоянна, делаем следующий вывод (см. теорему 4.7).

Теорема 4.8. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией: $L_Xg = c_2g$, $c_2 = \mathrm{const}$.*

Из теоремы 4.6 и линейности уравнения (4.2) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ может быть записано в виде $c_1h + b$, где b — ковариантно постоянный тензор, или, в силу теоремы 4.7, в виде $c_1h + c_2g$, где $h = a + 2\varphi g$, φ дается формулой (**??**), g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда вытекает следующий факт.

Теорема 4.9. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{32}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется равенство* (4.8), *где φ — определяющая функция* (**??**) *проективного движения X; g и a определены в косонормальном репере* (**??**) *каноническими формами* (**??**), *c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

В итоге получаем следующую теорему (см. доказательство теоремы 4.5).

Теорема 4.10. *Если h-пространство (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

4.3. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{41\}$.

Теорема 4.11. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта* (4.1), *равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению* (4.2), *в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1\left(2f_1 + \frac{1}{2}f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}, \tag{4.17}$$

где функция φ определена равенством (**??**), *c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Докажем равенство (4.17) в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) принимает вид (4.4), $\omega_{p\tilde{h}}$ определены уравнениями (**??**) и $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косонормальном репере (**??**).

Из условий интегрируемости (4.5) уравнений Эйзенхарта (4.4), выписывая коэффициенты при базисных 2-формах $\theta_\alpha \wedge \theta_\beta$, при $(pq) = (13)$ и $(\alpha\beta) = (24)$ найдем

$$\left(\frac{e_1E_1^2}{2} - \frac{e_2E_2^2}{(f_2 - f_1)^3}\right)\bar{b}_{11} = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (??), и по теореме ?? пространство H_{41} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = 0$. Так же получим

$$\bar{b}_{12} = \bar{b}_{13} = \bar{b}_{15} = \bar{b}_{22} = \bar{b}_{25} = \bar{b}_{34} = \bar{b}_{35} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{45} = 0. \tag{4.18}$$

Используя равенства (4.18), из уравнения (4.4), где ω_{hs} определены формулами (??), (??) и (??), при $(pq) = (11)$, (12), (33), (34) и (35) найдем с учетом неравенств $\underset{4}{\xi}^4 \neq 0$, $\underset{5}{\xi}^5 \neq 0$:

$$\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \psi = 0, \quad \underset{2}{\xi}^1 \partial_1 \psi + \underset{2}{\xi}^2 \partial_2 \psi = 0, \quad \underset{3}{\xi}^1 \partial_1 \psi + \underset{3}{\xi}^2 \partial_2 \psi + \underset{3}{\xi}^3 \partial_3 \psi = 0, \tag{4.19}$$

$$Y_i \bar{b}_{33} = 0, \quad i = 1, \ldots, 5, \tag{4.20}$$

$$\partial_4 \psi = 2 e_1 \bar{b}_{33} f_1', \quad \partial_5 \psi = \frac{1}{2} e_1 \bar{b}_{33} f_2'. \tag{4.21}$$

Из уравнений (4.19), используя формулы (??), выводим $\psi = \psi(x^4, x^5)$. Из (4.20) следует $\bar{b}_{33} = e_1 c_1 = \mathrm{const}$. Интегрируя уравнения (4.21), получим

$$\psi = c_1 \left(2 f_1 + \frac{f_2}{2} \right) + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.12. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. В косонормальном репере (??) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид (4.7). Условия его интегрируемости получаются из равенства (4.5) при $\psi = \mathrm{const}$ и имеют вид

$$\bar{b}_{ph} \Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq} \Omega^h{}_p = 0. \tag{4.22}$$

Отсюда так же, как в предыдущих случаях, получим равенства (4.18) в h-пространстве H_{41} непостоянной кривизны. Далее, из (4.22) при $(pq) = (14)$, (33) следует

$$D \bar{b}_{24} = 0, \quad D \bar{b}_{33} = 0;$$

так как по теореме ?? в пространстве H_{41} непостоянной кривизны $D \neq 0$, то

$$\bar{b}_{24} = \bar{b}_{33} = 0.$$

Тогда из (4.7) при $(pq) = (14)$, (23), (55) найдем

$$d \bar{b}_{14} = 0, \quad d \bar{b}_{23} = 0, \quad d \bar{b}_{55} = 0,$$

т.е. $\bar{b}_{14}$, $\bar{b}_{23}$ и $\bar{b}_{55}$ — постоянные. Из (4.22) при $(pq) = (13)$ получаем

$$D(\bar{b}_{14} - \bar{b}_{23}) = 0;$$

отсюда при $D \neq 0$ имеем $\bar{b}_{14} = \bar{b}_{23}$, после этого из (4.7) при $(pq) = (45)$ имеем

$$(e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) E_2 = 0, \quad (e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) E_1 = 0.$$

Если $(e_2 \bar{b}_{55} - e_1 \bar{b}_{14}) \neq 0$, то $E_1 = E_2 = 0$; отсюда следует (??) и по теореме ?? пространство H_{41} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому

$$e_1 \bar{b}_{14} = e_1 \bar{b}_{23} = e_2 \bar{b}_{55}.$$

Положив $\bar{b}_{14} = e_1 c_2$, найдем в итоге $\bar{b}_{pq} = c_2 \bar{g}_{pq}$, где $(\bar{g}_{pq})$ определено формулой (??). $\square$

Из теоремы 4.12 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.13. *Всякое аффинное движение X, $(L_X g)_{,k} = 0$, в h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия*: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.

Из теоремы 4.11 и линейности уравнения (??) вытекает, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{41}, g) типа $\{41\}$ имеет вид $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.12, $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере‘(??) каноническими формами (??), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.14. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{41}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется (4.8), где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (**??**) каноническими формами (**??**), c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.15. *Если h-пространство (H_{41}, g) типа $\{41\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Теорема 4.15 вытекает из теоремы 4.14 (ср. доказательство аналогичной теоремы 4.5).

4.4. Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{5\}$.

Теорема 4.16. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта (4.1), равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению (4.2), в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1 \frac{5}{2} f + \mathrm{const} = c_1 \varphi + \mathrm{const}, \tag{4.23}$$

*где функция φ определена равенством (**??**), c_1 — произвольная постоянная.*

Доказательство. Докажем равенство (4.23) в каноническом косонормальном репере (**??**), где уравнение (4.2) примет вид (4.4), $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (**??**), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косорепере (**??**).

Дифференцируя уравнение (4.4) и учитывая равенство нулю квадрата внешнего дифференциала d, получим условия интегрируемости этого уравнения (4.5). Приравняв коэффициенты при базисной 2-форме $\theta_2 \wedge \theta_5$ в левой и правой частях равенства (4.5), при $(pq) = (14)$ найдем $e\Re^2 \bar{b}_{11} = 0$. Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то $\Re = 0$, и H_5 по теореме **??** имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = 0$.

Аналогично, полагая в уравнении (4.5) последовательно $(pq, mn) = (11, 15)$, $(22, 14)$, $(15, 24)$, $(15, 23)$, $(22, 13)$, $(33, 14)$, $(34, 12)$, $(44, 13)$, $(44, 12)$ и $(45, 12)$, найдем при $\Re \neq 0$:

$$\psi_{11} = \bar{b}_{12} = \psi_{12} = \bar{b}_{13} = \psi_{13} = \bar{b}_{14} = \psi_{14} = \bar{b}_{22} = \psi_{22} = 0,$$
$$\bar{b}_{23} = \psi_{23} = \bar{b}_{35} = \psi_{35} = \bar{b}_{44} = \psi_{44} = \bar{b}_{45} = \bar{b}_{55} = 0;$$

затем при $(pq, mn) = (14, 12)$, $(34, 14)$, $(35, 24)$ выводим

$$\Re(\bar{b}_{15} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad \Re(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad \Re(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{15}) = 0,$$

и так как $\Re \neq 0$ для пространства непостоянной кривизны, то

$$\bar{b}_{15} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{33} \equiv \mu.$$

Так же из (4.5) при $(pq, mn) = (15, 12), (34, 13)$ получим

$$\frac{3e\Re}{5} \bar{b}_{25} = \frac{3e\Re}{5} \bar{b}_{34} = \psi_{45},$$

отсюда ввиду $\Re \neq 0$ следует $\bar{b}_{25} = \bar{b}_{34} \equiv \nu$.

С учетом найденных равенств из уравнения Эйзенхарта (4.4) с ω_{hs}, определенными формулами (**??**), при $(pq) = (11)$, (12), (13), (44) найдем

$$Y_1 \psi = Y_2 \psi = Y_3 \psi = Y_4 \psi = 0 \tag{4.24}$$

и при $(pq) = (15)$, (33), (34) получим

$$d\mu + \frac{3e}{5} \nu (Y_5 \varphi) \theta_1 = (Y_5 \psi) \theta_1, \quad d\mu - \frac{2e}{5} \nu (Y_5 \varphi) \theta_1 = 0, \quad d\nu = 0. \tag{4.25}$$

Отсюда следует $\nu = \mathrm{const}$, $Y_5(\psi - e\nu\varphi) = 0$, что вместе с (4.24) и равенствами

$$Y_1 \varphi = Y_2 \varphi = Y_3 \varphi = Y_4 \varphi = 0,$$

вытекающими из (??) и (??), дает

$$Y_i(\psi - e\nu\varphi) = \underset{i}{\xi}^j \partial_j(\psi - e\nu\varphi) = 0$$

для всех $i = 1, \dots, 5$, и так как $\det(\underset{i}{\xi}^j) \neq 0$, вследствие независимости базисных векторных полей $Y_i = \underset{i}{\xi}^j \partial_j$, то

$$\psi = e\nu\varphi + \mathrm{const} \equiv c_1\varphi + \mathrm{const}\,. \qquad \square$$

Теорема 4.17. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*:

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. В косонормальном репере (??) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид (4.7). Из условий интегрируемости этого уравнения (4.5) при $\psi = \mathrm{const}$ так же, как в предыдущем случае, получим, что все компоненты $\bar b_{ij}$ равны нулю, кроме

$$\bar b_{15} = \bar b_{24} = \bar b_{33}.$$

Так как уравнение (4.7) при $(pq) = (33)$ имеет вид $d\bar b_{33} = 0$, то $\bar b_{33} = ec_2 = \mathrm{const}$. В итоге имеем $\bar b_{pq} = c_2 \bar g_{pq}$, где матрица $(\bar g_{pq})$ определена каноническими формами (??), а множитель c_2 постоянен, что доказывает теорему 4.17. $\square$

Так как векторное поле X является аффинным движением в (H_5, g), если и только если производная Ли $(L_X g)$ ковариантно постоянна, то из теоремы 4.17 получаем следующее утверждение.

Теорема 4.18. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией: $L_X g = cg$, $c = \mathrm{const}$.*

Из линейности уравнения Эйзенхарта (??) и теоремы 4.16 вытекает, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ представляется в виде $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 4.17, в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$; здесь g и a определены в косонормальном репере (??) каноническими формами (??), c_1, c_2 — постоянные. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 4.19. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_5, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда выполняется равенство* (4.8)*, где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере* (??) *каноническими формами* (??)*, c_1, c_2 — произвольные постоянные.*

Теорема 4.20. *Если h-пространство (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме (4.19) (ср. доказательство теоремы 4.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аминова А. В.* Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения// Гравит. теория относит. — 1970. — № 7. — С. 127–131.
2. *Аминова А. В.* О полях тяготения, допускающих группы проективных движений// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 807–809.
3. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. I// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 3—13.
4. *Аминова А. В.* Проективные группы в полях тяготения. II// Гравит. теория относит. — 1971. — № 8. — С. 14–20.
5. *Аминова А. В.* О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел/ Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. — Киев, 1971.
6. *Аминова А. В.* Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6*. — С. 295–316.

7. *Аминова А. В.* Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности// Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР. — 1974. — *6.* — С. 317–346.
8. *Аминова А. В.* Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля// Гравит. теория относит. — 1976. — № 10. — С. 9–22.
9. *Аминова А. В.* Об интегрировании ковариантного дифференциального уравнения первого порядка и геодезическом отображении римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности// Изв. вузов. Мат. — 1988. — № 1. — С. 3–13.
10. *Аминова А. В.* Группы преобразований римановых многообразий// Итоги науки техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. — 1990. — *22.* — С. 97–165.
11. *Аминова А. В.* Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими// Усп. мат. наук. — 1993. — *48*, № 2 (290). — С. 107–164.
12. *Аминова А. В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, № 1. — С. 69–142.
13. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
14. *Аминова А. В.* Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения// Изв. вузов. Физика. — 2008. — *51*, № 4. — С. 30–37.
15. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 5. — С. 3–13.
16. *Аминова А. В.* Проективные симметрии гравитационных полей. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018.
17. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 7. — С. 3–28.
18. *Аминова А. В., Аминов Н. А.-М.* Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2009. — *123.* — С. 58–80.
19. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств специального вида// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 5. — С. 97–102.
20. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2018. — № 4. — С. 21–31.
21. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. II. H-пространства типа $\{41\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 45–55.
22. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О проективных движениях пятимерных пространств. III. H-пространства типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 1. — С. 56—66.
23. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* H-пространства (H_{41}, g) типа $\{41\}$: проективно-групповые свойства// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2019. — № 4. — С. 4–12.
24. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2019. — № 10. — С. 87–93.
25. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Проективно-групповые свойства h-пространств H_5 типа $\{5\}$// Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2020. — № 1. — С. 4–11.
26. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2020. — *162*, № 2. — С. 111–119.
27. *Аминова А. В., Хакимов Д. Р.* Алгебры Ли проективных движений пятимерных h-пространств H_{221} типа $\{221\}$// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 12. — С. 9–22.
28. *Буданов К. М., Султанов А. Я.* Инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения Вейля второго порядка со связностью полного лифта// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 12. — С. 3—13.
29. *Гладуш В. Д.* Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы—-Клейна// Теор. мат. физ. — 2003. — *136*, № 3. — С. 480—495.
30. *Голиков В. И.* О геодезическом отображении полей тяготения общего вида// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1963. — № 12. — С. 97–129.
31. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.
32. *Жукова Л. И.* Римановы пространства с проективной группой// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124.* — С. 13—18.

33. *Жукова Л. И.* Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 19–25.
34. *Жукова Л. И.* О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств// Уч. зап. Пензенск. пед. ин-та. — 1971. — *124*. — С. 26–30.
35. *Жукова Л. И.* Римановы пространства, допускающие проективные преобразования// Изв. вузов. Мат. — 1973. — № 6. — С. 37–41.
36. *Киселев А. С.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве-времени// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2010. — № 1. — С. 64–67.
37. *Киселев А. С., Кречет В. Г.* Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана—Вейля с идеальной жидкостью// Ярослав. пед. вестн. Сер. Физ.-мат. естеств. науки. — 2011. — *3*, № 1. — С. 37–41.
38. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1-2. — М.: Наука, 1981.
39. *Кречет В. Г., Левкоева М. В., Садовников Д. В.* Геометрическая теория электромагнитного поля в пятимерном аффинно-метрическом пространстве// Вестн. РУДН. Сер. Физ. — 2001. — *1*, № 9. — С. 33—37.
40. *Кручкович Г. И.* Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1963. — № 24. — С. 74–87.
41. *Кручкович Г. И.* О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях// Тр. Всесоюз. заоч. энергетич. ин-та. — 1967. — № 33. — С. 3—18.
42. *Петров А. З.* О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики// Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — *109*, № 3. — С. 7–36.
43. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — Факториал, 1998.
44. *Рчеулишвили Г. Л.* Сферически-симметричный линейный элемент и векторы Киллинга в пятимерном пространстве// Теор. мат. физ. — 1995. — *102*, № 3. — С. 345—351.
45. *Рчеулишвили Г. Л.* Обобщенные векторы Киллинга в пятимерном лоренцевом пространстве// Теор. мат. физ. — 1997. — *112*, № 2. — С. 249—253.
46. *Синюков Н. С.* О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — *98*, № 1. — С. 21—23.
47. *Синюков Н. С.* Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 4. — С. 266—267.
48. *Синюков Н. С.* Эквидистантные римановы пространства// Научн. ежегод. Одесса. — 1957. — С. 133—135.
49. *Синюков Н. С.* Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 6. — С. 1312–1314.
50. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 4. — С. 781–782.
51. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — *169*, № 4. — С. 770—772.
52. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
53. *Солодовников А. С.* Проективные преобразования римановых пространств// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*. — С. 45–116.
54. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1956. — *108*, № 2. — С. 201–203.
55. *Солодовников А. С.* Геодезические классы пространств $V(K)$// Докл. АН СССР. — 1956. — *111*, № 1. — С. 33–36.
56. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анал. — 1961. — № 2. — С. 43–102.
57. *Трунев А. П.* Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы—Клейна// Науч. ж. Кубан. гос. агр. ун-та. — 2011. — *71*, № 7. — С. 1–26.
58. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. — Новосибирск:: ИПЦ НГУ, 2018.
59. *Широков П. А.* Тензорное исчисление. — Казань: Изд-во КГУ, 1961.
60. *Широков П. А.* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1966.
61. *Эйзенхарт Л. П.* Непрерывные группы преобразований. — М.: ИЛ, 1947.

62. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
63. *Abe O.* Gravitational-wave propagation in the five-dimensional Kaluza–Klein space-time// Nuovo Cim. B. — 1994. — *109*, № 6. — P. 659—673.
64. *Aminova A. V.* On geodesic mappings of Riemannian spaces// Tensor. — 1987. — *46.* — P. 179–186.
65. *Aminova A. V.* Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds// Tensor, N.S. — 1993. — *54.* — P. 91–100.
66. *Aminova A. V.* Groups of transformations of pseudo-Riemannian manifolds in theoretical and mathematical physics// в кн.: In Memoriam N. I. Lobatschevskii. Vol. 3, part 2. — Изд-во Казан. ун-та: Казань, 1995. — С. 79–103.
67. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — *113*, № 3. — P. 367–470.
68. *Aminova A. V., Aminov N. A.-M.* Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type VI.1// J. Math. Sci. — 2009. — *158*, № 2. — P. 163–183.
69. *Anchordoqui L. A., Birman G. S.* Metric tensors for homogeneous, isotropic, five-dimensional pseudo-Riemannian models// Rev. Colomb. Mat. — 1998. — *32.* — P. 73–79.
70. *Becerril R., Matos T.* Bonnor solution in five-dimensional gravity// Phys. Rev. D. — 1990. — *41*, № 6. — P. 1895–1896.
71. *Beltrami E.* Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante// Ann. Mat. — 1868. — № 2. — P. 232–255.
72. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbation in Kaluza–Klein cosmologies// Astron. Nachr. — 1990. — *311*, № 3. — P. 151–154.
73. *Bleyer U., Leibscher D. E., Polnarev A. G.* Mixed metric perturbations in Kaluza–Klein cosmologies// Nuovo Cim. B. — 1991. — *106*, № 2. — P. 107–122.
74. *Bokhari A. H., Qadir A.* Symmetries of static, spherically symmetric space-times// J. Math. Phys. — 1987. — *28.* — P. 1019–1022.
75. *Calvaruso G., Marinosci R. A.* Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces// Balkan J. Geom. Appl. — 2003. — *8*, № 1. — P. 1–19.
76. *Coley A. A., Tupper B. O. J.* Special conformal Killing vector space-times and symmetry inheritance// J. Math. Phys. — 1989. — *30.* — P. 2616–2625.
77. *Dacko P.* Five dimensional almost para-cosymplectic manifolds with contact Ricci potential/ `arXiv: 1308.6429 [math.DG]`.
78. *Dini U.* Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. Mat. — 1869. — *3*, № 7. — P. 269–293.
79. *Dumitrescu T. T., Festuccia G., Seiberg N.* Exploring curved superspace/ `arXiv:1205.1115v2 [hep.th]`.
80. *Fialowski A., Penkava M.* The moduli space of complex five-dimensional Lie algebras// J. Algebra. — 2016. — *458.* — P. 422—444.
81. *Fubini G.* Sui gruppi trasformazioni geodetiche// Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. — 1903. — *53*, № 2. — P. 261–313.
82. *Fukui T.* The motion of a test particle in the Kaluza–Klein-type of gravitational theory with variable mass// Astrophys. Space Sci. — 1988. — *141*, № 2. — P. 407–413.
83. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.* Conformal invariance in physics// Rev. Mod. Phys. — 1962. — *34*, № 3. — P. 442–557.
84. *Gall L., Mohaupt T.* J. High Energy Phys. — 2018. — *2018.* — 53.
85. *Geroch R.* Limits of space-times// Commun. Math. Phys. — 1969. — *13.* — P. 180–193.
86. *Gezer A.* On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the synectic lift of a Riemannian metric// Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — 2009. — *119*, № 3. — P. 345—350.
87. *Gross D. J., Perry M. J.* Magnetic monopoles in Kaluza–Klein theories// Nucl. Phys. — 1983. — *B226.* — P. 29–48.
88. *Guendelman E. I.* Kaluza–Klein–Casimir cosmology with decoupled heavy modes// Phys. Lett. B. — 1988. — *201*, № 1. — P. 39–41.
89. *Hall G. S., Rebouas M. J., Santos J., Teixeixa A. F. F.* On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensionai space-times// Gen. Rel. Gravit. — 1996. — *8*, № 9. — P. 1107–1113.

90. *Hicks J. W.* Algebraic properties of Killing vectors for Lorentz metrics in four dimensions// All Graduate Plan B and other Reports. — 2011. — *102.* — P. 1–90.
91. *Ho Choon-Lin, Ng Kin-Wang* Wilson line breaking and vacuum stability in Kaluza–Klein cosmology// Phys. Rev. D. — 1991. — *43*, № 10. — P. 3107–3111.
92. *Jadczyk A.* START in a five–dimensional conformal domain/ `arXiv: 1111.5540v2 [math-ph]`.
93. *Kiselev A. S., Krechet V. G.* Static distributions of matter in the five-dimensional Riemann—Weyl space// Russ. Phys. J. — 2012. — *55*, № 4. — P. 417—425.
94. *Knebelman M. S.* Homothetic mappings of Riemann spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 1958. — *9*, № 6. — P. 927–928.
95. *Kokarev S. S.* Phantom scalar fields in five–dimensional Kaluza–Klein theory// Russ. Phys. J. — 1996. — *39*, № 2. — P. 146–152.
96. *Kollár J.* Einstein metrics on five-dimensional Seifert bundles// J. Geom. Anal. — 2005. — *15*, № 3. — P. 445–476.
97. *Königs M. G.* Sur les géodésiques a intégrales quadratiques// in: *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. IV. — Chelsea Publ., 1972. — P. 368—404.
98. *Kovacs D.* The geodesic equation in five-dimensional relativity theory of Kaluza–Klein// Gen. Rel. Gravit. — 1984. — *16*, № 7. — P. 645–655.
99. *Kowalski O.* Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 5$// Rozpravy CSAV, Rada MPV. — 1975. — № 85. — P. 1–61.
100. *Kramer D. Stephani H., MacCallum M., Herlt E.* Exact Solutions of Einstein's Field Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
101. *Ladke L. S., Jaiswal V. K., Hiwarkar R. A.* Five-dimensional exact solutions of Bianchi type-I space-time in $f(R,T)$ theory of gravity// Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Techn. — 2014. — *3*, № 8. — P. 15332–15342.
102. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// Ann. Mat. — 1896. — *24*, № 2. — P. 255–300.
103. *Macedo P. G.* New proposal for a five-dimensional unified theory of classical fields of Kaluza–Klein type/ `arXiv: gr-qc/0101121`.
104. *Magazev A. A.* Casimir functions for five-dimensional Lie groups with a non–semi-Hausdorff space of orbits// Russ. Phys. J. — 2003. — *46*, № 9. — P. 912—920.
105. *Mankoc-Borstnik N., Pavsi M.* A systematic examination of five-dimensional Kaluza–Klein theory with sources consisting of point particles or strings// Nuovo Cim. — 1988. — *99A*, № 4. — P. 489–507.
106. *Marinosci R. A.* Classification of five-dimensional generalized pointwise symmetric Riemannian spaces// Geom. Dedic. — 1995. — *57.* — P. 11–53.
107. *Mikesh J.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky University, 2019.
108. *Mikesh J., Stepanova E.* A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible $SO(3)$-structure as a model of abstract statistical manifold// Ann. Glob. Anal. Geom. — 2014. — *45.* — P. 111—128.
109. *Mohanty G., Mahanta K. L., Bishi B. K.* Five dimensional cosmological models in Lyra geometry with time dependent displacement field// Astrophys. Space Sci. — 2007. — *310.* — P. 273—276.
110. *Paiva F. M., Rebouca M. J., Teixeira A. F. F.* Limits of space–times in five dimensions and their relation to the Segre types// J. Math. Phys. — 1997. — *38.* — P. 4228–4236.
111. *Pan Yiwen* Rigid supersymmetry on five-dimensional Riemannian manifolds and contact geometry/ `arXiv: 1308.1567v4 [hep.th]`.
112. *Pini A., Rodriguez-Gomez D., Schmudea J.* Rigid supersymmetry from conformal supergravity in five dimensions/ `arXiv: 1504.04340v3 [het-th]`.
113. *Rcheulishvili G.* Spherically symmetric line element and Killing vectors in five-dimensional space. — Miramare-Trieste: Preprint ICTP, IC/92/108, 1992.
114. *Rcheulishvili G. L.* The curvature and the algebra of Killing vectors in five-dimensional space// J. Math. Phys. — 1992. — *33.* — P. 1103–1108.
115. *Rcheulishvili G. L.* Conformal Killing vectors in five-dimensional space/ `arXiv: gr-qc/9312004v1`.
116. *Rebouças M. J., Santos J., Teixeira A. F. F.* Classification of energy momentum tensors in $n > 5$ dimensional space-times: A review// Brazil. J. Phys. — 2004. — *34*, № 2A. — P. 535–543.
117. *Rodroguez-Vallarte M. C., Salgado G.* Five-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions// J. Geom. Phys. — 2016. — *100.* — P. 20—32.

118. *Santos J., Rebouças M. J., Teixeira A. F. F.* Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza—Klein-type theories// J. Math. Phys. — 1995. — *36.* — P. 3074–3084.
119. *Schur F.* Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen// Math. Ann. — 1886. — *27.* — P. 537–567.
120. *Starks S. A., Kosheleva O., Kreinovich V.* Kaluza–Klein 5D ideas made fully geometric/ `arXiv: 0506218v1 [physics.class-ph].`
121. *Varaksin O. L., Klishevich V. V.* Integration of Dirac equation in Riemannian spaces with five-dimensional group of motions// Russ. Phys. J. — 1997. — *40*, № 8. — P. 727—731.
122. *Wesson P. S.* A physical interpretation of Kaluza–Klein cosmology// Astrophys. J. — 1992. — *394*, № 1. — P. 19—24.
123. *Wesson P. S.* The properties of matter in Kaluza–Klein cosmology// Mod. Phys. Lett. A. — 1992. — *7*, № 11. — P. 921–926.
124. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza–Klein theory// Nucl. Phys. B. — 1981. — *186.* — P. 412–428.
125. *Yano K.* On harmonic and Killing vectors// Ann. Math. — 1952. — *55.* — P. 38—45.
126. *Zeghib A.* On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds// Adv. Math. — 2016. — *297.* — P. 26—53.

Аминова Ася Васильевна
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `asya.aminova@kpfu.ru`

Хакимов Джамолиддин Рахмонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `dzhamoliddink@mail.ru`