ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 117–126
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-117-126

УДК 517, 531.01

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОНТРОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе объясняются такие понятия, как сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля. Предложено решение задачи контроля методом статистических испытаний. Сформулирована постановка расширенной задачи контроля, подготовлен материал к рассмотрению задачи диагностирования. Данная работа является третьей работой цикла, посвященного задачам контроля.

Ключевые слова: сфера контроля, эллипсоид контроля, трубка контроля, расширенная задача контроля.

GENERALIZED CONTROL PROBLEM IN DIAGNOSTIC PROBLEMS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we explain such concepts as control sphere, control ellipsoid, and control tube. The solution of the control problem by the method of statistical tests is proposed. The statement of the extended problem of control is formulated and necessary preparations for considering the diagnosis problem are made. This work is the third work of the cycle devoted to control problems.

Keywords and phrases: control sphere, control ellipsoid, control tube, extended control problem.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Задача контроля. Рассмотрим неавтономную динамическую систему с полностью наблюдаемым фазовым вектором x, описываемую уравнениями

$$\dot{x} = f_0(x, t), \tag{1}$$

на временном отрезке $[0, T]$. Будем полагать, что множество X^0 начальных значений x^0 пространственной составляющей фазового вектора известно и ограничено. Будем считать также, что в момент времени t_0, $0 \leqslant t_0 \leqslant T$, правая часть уравнения (1) заменяется на $f_j(x, t)$ следующим образом:

$$\dot{x} = f_j(x, t), \tag{2}$$

т.е. происходит j-я неисправность из списка l неисправностей, возникновение которых возможно в системе управления движением рассматриваемого динамического объекта.

Введем в рассмотрение вектор $y(t)$, координаты которого представляют собой подмножество координат фазового вектора $x(t)$, т.е.

$$y(t) = (x_{k_1}, \dots, x_{k_m}), \quad m \leqslant n. \tag{3}$$

Допустим, что существует такой вектор $y(t)$, называемый *вектором контроля*, что наблюдение за его компонентами позволит судить об исправности или неисправности системы управления объекта, т.е. о наличии в правой части уравнений (1) либо функции f_0, либо одной из функций f_j, $j = 1, \dots, l$, из (2).

Вообще говоря, задача контроля может быть решена с помощью различных по множеству координат (размерности) векторов контроля $y(t)$. Поэтому нам естественно стремиться к тому, чтобы вектор контроля был меньшей размерности. Для систем со сложными нелинейными функциями f_j в (2) правильный выбор компонент вектора $y(t)$ подтверждается моделированием возникновения различных неисправностей и определением факта наличия в системе управления неисправности по наблюдению за вектором $y(t)$. При удовлетворительных результатах определения факта неисправности конкретный набор компонент (пространственной составляющей) фазового вектора x принимается за вектор контроля.

Пусть даны уравнения (1), множество X^0 начальных условий x^0, время T и набор функций f_j, $j = 1, \ldots, l$, в (2). Пусть существует поверхность π_k в пространстве координат вектора $y(t)$ такая, что вектор контроля, составленный из компонент решения уравнения (1), на отрезке времени $[0, T]$ не выйдет на поверхность π_k, а вектор контроля $y(t)$, составленный из соответствующих компонент решений x любой из систем (2) с начальными условиями $x^0 = x(t_0) \in X^0$, выйдет на π_k в момент времени t_k, $t_0 \leqslant t_k \leqslant T$.

Таким образом, критерием наличия неисправности в системе управления объекта, описанного уравнениями (1), будет выход вектора контроля (3) на поверхность π_k в некоторый момент времени $t_k < T$. Назовем поверхность π_k *поверхностью контроля.*

Такая поверхность контроля π_k является, вообще говоря, функцией начальных условий $x^0 \in X^0$ и набора функций f_j, $j = 0, \ldots, l$. Построение такой поверхности контроля π_k в случае нелинейных уравнений движения (1) и (2) аналитически является достаточно трудной задачей. Однако при знании функций f_j, $j = 0, \ldots, l$, и относительной малости области начальных условий X^0 возможно построение поверхности π_k *методом статистических испытаний* (см. также [10,11]).

1.1. Сфера контроля. Рассмотрим управляемую динамическую систему, движение которой может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f_0(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T_0, \tag{4}$$

где x — n-мерный фазовый вектор функционального состояния рассматриваемой системы, $f_0(x, t)$ — определенная и непрерывная вектор-функция, S^0 — известная ограниченная с центром в начале координат радиуса R^0 сфера начальных значений, T_0 — конечное время.

Предположим, что система (4) удовлетворяет условиям существования и единственности решений (для этого достаточно сделать функцию не просто непрерывной, но непрерывно дифференцируемой). Пусть, кроме того, при условии $f(0, t) \equiv 0$, $\forall t$ *тривиальное решение* системы (4) асимптотически устойчиво, а сама система описывает желаемое движение, которое обеспечивается во времени в рассматриваемой области пространства при помощи координат $u(t)$ системы управления. Структура координат $u(t)$ и их параметры выбираются, исходя из цели управления

$$x(t) \equiv 0 \tag{5}$$

и условий устойчивости системы (4), полученных, например, с помощью функции Ляпунова $V(x, t) > 0$ почти всюду, т.е. осуществляя синтез управления с помощью пары

$$\{V(x, t); u(x, t)\}, \tag{6}$$

где $u(x, t) \in U$, U — замкнутое и ограниченное множество, для определенности, евклидова пространства. Систему (4), удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть *исправной.*

Пусть, далее, в той части динамических уравнений, которая отвечает за систему управления, может произойти l (обобщенных) неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l}. \tag{7}$$

Таким образом, в некоторый (случайный) момент времени t правая часть системы (4) изменяется каким-либо из l способов. При этом система (4) заменяется на одну из систем следующего вида:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f_j(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \in S^0, \\ t_0 \leqslant t < T_0, \quad j = 1, \ldots, l. \end{gathered} \tag{8}$$

Траектория системы (4) после возникновения неисправности *непрерывно продолжается* траекторией одной из систем (8) (см. также [2, 6, 15]).

Введем в рассмотрение вектор контроля (3). Как уже указывалось, задача контроля может решаться с помощью различных векторов контроля (в смысле размерности).

Предположим, что наблюдение за компонентами выбранного вектора контроля (3) дает возможность судить о том, что система (8) исправна или в этой системе произошла неисправность.

Задачу контроля переформулируем следующим образом.

В фазовом пространстве вектора контроля $y(t)$ требуется построить сферу S_R радиуса R такую, чтобы фазовые траектории вектора контроля при интегрировании системы (4) с начальными условиями из выбранной сферы S^0 в течение времени $t < T_0$ лежали внутри сферы S_R, а траектории систем (8) пересекались (лучше трансверсально) со сферой S_R.

Пусть система (4) находится в малой окрестности начала координат, а неисправности (7) таковы, что они доставляют неустойчивость системе (4) [1,4,7] (в данном случае под неустойчивостью системы понимается неустойчивость ее тривиального решения). В случайный момент времени происходит неисправность, т.е. непрерывный переход на траекторию одной из систем (8), которая выходит из окрестности начала координат.

В этом случае, проводя «розыгрыш» начальных условий x^0 из ограниченного множества S^0 и с этими начальными условиями интегрируя систему (4) на интервале времени $[t_0, T_0]$, можно построить m ансамблей фазовых портретов координат вектора контроля $y(t)$. За сферу контроля S_R можно выбрать сферу, охватывающую объем ансамблей. Если через a обозначить длину отрезка от начала координат до максимально удаленной точки этого объема, то радиус R сферы S_R выбирается так, чтобы $R > a$.

Пусть, далее, система (4) находится в малой окрестности начала координат под воздействием малого шума, который зададим функцией плотности распределения $F_1(x)$ отклонений системы. Радиус R сферы S_R в этом случае выбирается так, чтобы

$$\int\limits_{\|y\|>R} F_1(x)dx \ll 1,$$

т.е. чтобы выход $y(t)$ за сферу означал, что в системе (4) произошла неисправность.

Изложенный подход позволяет решать задачу контроля и в случае, когда среди систем (8) имеются устойчивые системы (в данном случае под устойчивостью системы понимается устойчивость ее тривиального решения). Траектории $y(t)$ таких систем, выходящие из сферы S^0, также должны пересекать сферу S_R (лучше трансверсально).

В любом случае необходимо найти наиболее простое решение задачи контроля, такое, однако, чтобы оно обеспечивало правильное решение основной задачи диагностики — задачи диагностирования (в данной работе мы не выделяем задачу диагностирования).

Таким образом, выход изображающей точки вектора контроля $y(t)$ системы (4) на поверхность сферы S_R будет означать, что в системе произошла некоторая неисправность.

Сферу контроля S_R можно, кроме того, использовать для того, чтобы отфильтровать уже при решении задачи контроля часть систем вида (8), т.е. уменьшить список l априорных неисправных систем, с помощью которого в последующем проще будет диагностировать действительно происшедшую (т.е. настоящую) в системе (4) неисправность.

Это можно осуществить, если указать области на сфере контроля S_R, в которые траектория j-й системы (8) не может попадать. Если такие области ненулевой меры существуют и траектории вектора контроля попадают в эти области, то j-я гипотеза отбрасывается сразу.

Рассмотрим далее сферу контроля S_R и квадратичную форму

$$(y, \dot{y}) = 0.$$

Этим уравнением для каждой из систем (8) определяется некоторый объем траекторий вектора контроля. Границу этого объема изнутри аппроксимируем конической поверхностью, пересечение которой со сферой S_R обозначим через S_R^j, $j = 1, \ldots, l$. Фазовые траектории вектора контроля $y(t)$, полученные интегрированием j-й системы (8) с начальными условиями из сферы S^0

радиуса $R^0 < R$, будут выходить из сферы S_R через область S_R^j. Те из областей S_R^j, которые не пересекаются с другими при попадании в них фазовой траектории вектора контроля, сразу определяют номер неисправности. В противном случае, т.е. если фазовая траектория вектора контроля попадает в области, в которые траектория j-й системы (8) не может попадать, j-я гипотеза отбрасывается сразу.

В случае $m = n$ области S_R^j можно рассматривать в качестве начальных областей при счете параметров алгоритма диагностирования.

Таким образом, уже при решении задачи контроля можно уменьшить список (8) и даже диагностировать некоторые неисправности.

1.2. Эллипсоид контроля. Только что было продемонстрировано, что одной из основных задач контроля движения управляемой системы является сокращение избыточной информации и получение такой информации, которая позволяет не пропускать недопустимое состояние системы. В этой связи изучим другой возможный подход при решении задачи внешнетраекторного контроля.

Предположим, что на координаты вектора контроля (3) наложено следующее ограничение на интервале $t \in [t_0, T_0]$ движения системы:

$$(|x_{k_1}|, \ldots, |x_{k_m}|) \leqslant (\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)), \tag{9}$$

где $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_m(t)$ — непрерывные положительные функции, определенные на отрезке $[t_0, T_0]$.

Требуется в фазовом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы найти область, в которой может находиться вектор состояния системы, такую, что движение системы, начавшееся в любой точке этой области, гарантирует выполнение условия (9), при этом для каждой координаты, не входящей в вектор контроля (3), в каждый момент времени $t \in [t_0, T_0]$ можно найти интервал изменения, также гарантирующий выполнение нужного условия.

Поставленная задача часто решается методом построения для рассматриваемой системы функции Ляпунова в следующей форме:

$$V = x^T B x + V_0(x) \tag{10}$$

с положительно определенной матрицей B, при этом функция $V_0(x)$ является бесконечно малой функцией возле начала координат порядка, большего 2.

Уравнение

$$x^T B x = D, \tag{11}$$

где D — некоторая положительная постоянная, определяет в фазовом пространстве эллипсоид. Матрица B задает форму *эллипсоида*, а величина D — его размер. Значения полуосей d_k этого эллипсоида определяются величинами собственных чисел λ_k матрицы B:

$$d_k = \sqrt{\frac{D}{\lambda_k}},$$

а направления главных осей совпадают с направлениями собственных векторов матрицы B. Величину D размера эллипсоида (11) выберем таким образом, чтобы изменяющаяся поверхность функции Ляпунова (10) лежала внутри эллипсоида (11).

Таким образом, выбранный эллипсоид (11) будет областью функционирования рассматриваемой управляемой динамической системы, и он может быть выбран в качестве эллипсоида контроля.

Вариант построения областей допустимых отклонений для задачи контроля для линейных систем дифференциальных уравнений обсуждался также в [12, 16, 22].

1.3. Трубка контроля. Рассмотрим управляемую динамическую систему (4). Множество начальных условий системы (4) представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 в пространстве фазовых переменных с центром в точке x_0, через которую проходит *программная траектория*, т.е. траектория цели.

Производя «розыгрыш» начальных условий и интегрируя с этими начальными условиями систему (4) и системы (8) в пространстве вектора контроля (3) вокруг программной траектории, можно построить трубку такую, что траектории вектора контроля $y(t)$ на интервале времени $[t_0, T_0]$ системы (4) будут лежать внутри этой трубки, а для систем (8) — пересекаться (лучше трансверсально) с поверхностью трубки.

Такую трубку назовем *трубкой контроля*. Выход траектории вектора контроля рассматриваемой системы на поверхность трубки контроля будет означать, что в диагностическом пространстве рассматриваемой управляемой динамической системы произошла неисправность. Построение трубки для задачи контроля при движении по глиссаде обсуждалось в [18].

Выделим в отдельный пункт методику построения поверхности контроля методом статистических испытаний [3, 8, 20].

2. Построение поверхности контроля методом статистических испытаний. Для произвольного момента времени $\bar{t}$ и номера i компоненты x_i вектора контроля $y(t)$, $i = k_1, \ldots, k_m$, $m \leqslant n$, статистически оценим значения $x_{i\,\max}$, $x_{i\,\min}$, в пределах которых заключено значение $x_i(\bar{t})$. Для этого зададим на множестве начальных условий X^0 распределение случайной величины $x(t_0)$ — начальных условий системы уравнений (1). Взяв область начальных условий в виде n-мерного куба, можно задать, например, равномерное распределение n-мерной случайной величины

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$$

с независимыми распределениями по каждой из координат.

Статистический эксперимент будет состоять в следующем.

1. Розыгрыш случайной величины $x(t_0)$.

2. Вычисление значения новой случайной величины $x(\bar{t})$ — значения фазового вектора $x(t)$ в момент времени $\bar{t}$. Эта случайная величина получается как результат применения оператора $L^{\bar{t}}_{f_0}$ (соответствующего правой части системы с f_0) численного интегрирования системы (1) на отрезке времени $[t_0, \bar{t}]$ к случайной величине $x(t_0)$, т.е.

$$x(\bar{t}) = L^{\bar{t}}_{f_0}(x(t_0)).$$

Тогда для выборки независимых значений случайной величины $x^j(t_0)$, $j = 1, \ldots, N_1$, где N_1 — объем выборки, получим выборку независимых значений другой случайной величины $x^j(\bar{t})$. Каждый элемент такой выборки — n-мерный вектор. Выделим значения i-й компоненты фазового вектора x и получим выборку случайной величины $x^j_i(\bar{t})$, $j = 1, \ldots, N_1$. Из этой выборки можно найти два следующих значения:

$$x_{i\,\min}(\bar{t}) = \min_{j=1,\ldots,N_1} x^j_i(\bar{t}), \quad x_{i\,\max}(\bar{t}) = \max_{j=1,\ldots,N_1} x^j_i(\bar{t});$$

3. Проводя N_2 серий по N_1 экспериментов каждая, получим две выборки новых случайных величин объемом N_2:

$$x^1_{i\,\min}(\bar{t}), \ldots,\ x^{N_2}_{i\,\min}(\bar{t}) \quad \text{и} \quad x^1_{i\,\max}(\bar{t}),\ \ldots,\ x^{N_2}_{i\,\max}(\bar{t}).$$

Каждая из них представляет собой выборку независимых одинаково распределенных величин $x_{i\,\min}$ и $x_{i\,\max}$, соответственно. При этих условиях распределение случайной величины

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{N_2}},$$

где $a = Mx^k_{i\,\max}$ — математическое ожидание случайной величины $x^k_{i\,\max}$, $\sigma^2 = Dx^k_{i\,\max}$ — его дисперсия, а среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} x^k_{i\,\max}, \text{ —}$$

близко к нормальному с параметрами $(0, 1)$ (см. [5,9,13]). Заменив дисперсию σ^2 ее состоятельной оценкой, полученной из выборки $\sigma^2_{N_2}$, получим также распределение, близкое к нормальному, т.е. к $N(0, 1)$.

Теперь из соотношения

$$\lim_{N_2\to\infty} P\left\{\left|\frac{\bar{x}-a}{\sigma_{N_2}/\sqrt{N_2}}\right| < u_\alpha\right\} = 1-2\alpha$$

получается доверительный интервал для математического ожидания a величины $x_{i\max}$:

$$P\left\{\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}} < a < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma_{N_2}}{\sqrt{N_2}}\right\} \approx 1-2\alpha, \tag{12}$$

где $1-2\alpha$ — доверительная вероятность. Ширина интервала зависит от α, по значению которого определяется u_α: из таблицы значений функции

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

и объема выборки N_2.

Оценка $\sigma^2_{N_2}$ является состоятельной, если $\sigma_{N_2} = \sigma_{\max}/N_2$, где $\sigma_{\max}$ — стандартная ошибка в выборке $x^k_{i\max}$, вычисляемая следующим образом (см. также [14, 23]):

$$\sigma_{\max} = \sum_{k=1}^{N_2}\left(\frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{N_2}\frac{x^k_{i\max}}{N_2}\right)^2.$$

Таким образом, по выборке $x^k_{i\max}$, $k=1,\ldots,N_2$, при заданной доверительной вероятности $1-2\alpha$ построен доверительный интервал для математического ожидания (12) величины $x_{i\max}$. Аналогично можно построить интервал для математического ожидания $Mx_{i\min}$.

Теперь, взяв в качестве нужных величин

$$\bar{x}_{i\max}(\bar{t}) = \bar{x}' + u_\alpha\frac{\sigma'_{N_2}}{\sqrt{N_2}} \quad \text{и} \quad \underline{x}_{i\min}(\bar{t}) = \bar{x}'' + u_\alpha\frac{\sigma''_{N_2}}{\sqrt{N_2}},$$

получим интервал для значений фазовой координаты $x_i(\bar{t})$:

$$\underline{x}_{i\min}(\bar{t}) \leqslant x_i(\bar{t}) \leqslant \bar{x}_{i\max}(\bar{t}),$$

внутри которого будут находиться величины $x_i(\bar{t})$ с доверительной вероятностью $1-2\alpha$. Величины $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ и σ'_{N_2}, σ''_{N_2}, вообще говоря, различны, так как представляют собой статистические средние разных выборок: $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$, соответственно.

Процедура построения поверхности контроля системы (1) на отрезке времени $[t_0, T]$ с вектором контроля $y(t)$ сводится теперь к следующему.

Методом статистических испытаний строятся оценки $\underline{x}_{i\min}(t_l)$, $\bar{x}_{i\max}(t_l)$ для каждой из координат x_i вектора контроля $y(t)$. Моменты времени t_l представляют собой величины

$$t_l = t_0 + lh, \quad l = 1,\ldots,\left[\frac{T-t_0}{h}\right]$$

(здесь $[\ldots]$ — целая часть), где h — шаг метода численного интегрирования системы (1).

Получаем набор оценок $\underline{x}_{i\min}(t_l)$, $\bar{x}_{i\max}(t_l)$. Теперь в качестве поверхности контроля π_k возьмем границу объема, определяемого через следующее теоретико-множественное произведение:

$$V = \prod_{i=1}^{m}\left[\min_l \underline{x}_{k_i}(t_l), \max_l \bar{x}_{k_i}(t_l)\right], \quad l = 1,\ldots,\left[\frac{T-t_0}{h}\right],$$

где k_i — номера компонент, составляющих вектор контроля $y(t)$. Эта поверхность контроля построена с доверительной вероятностью, не меньшей чем $1-2\alpha$. Для построения такой поверхности требуется N_1N_2 численных экспериментов, т.е. численных интегрирований системы (1) с начальными условиями $x(t_0)$, где $x(t_0)$ — n-мерная случайная величина с заданным распределением на области X^0 начальных условий.

4. Для построенной поверхности контроля π_k и заданного набора функций f_i (см. (2)) методом статистических испытаний можно установить вероятность p_i выхода траектории решения системы (2) с функцией f_i в правой части на границу π_k. Для этого на множестве X^0 начальных условий задается некоторое распределение случайной величины $x(t_0)$ — начальных условий системы (2). Затем численно интегрируется система (2) с функцией f_i в правой части на отрезке времени $[t_0, T]$. Таким образом, получается следующая последовательность:

$$x(t_l) = L_{f_i}^{t_l}(x(t_0)), \quad t_l = t_0 + lh, \quad l = 1, \ldots, \left[\frac{T - t_0}{h}\right].$$

Здесь $L_{f_i}^{t_l}$ — оператор метода численного интегрирования системы (2) с функцией f_i в правой части с шагом интегрирования h.

Далее формируем следующую случайную величину ξ:

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists\, l, i : x_i(t_l) < \underline{x}_{i\min} \text{ или } x_i(t_l) > \bar{x}_{i\max}; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{13}$$

т.е. $\xi = 1$ при выходе траектории решения системы (2) с начальными условиями $x(t_0)$ на границу поверхности контроля π_k на отрезке времени $[t_0, T]$ и $\xi = 0$ в противном случае.

Математическое ожидание величины ξ равно $M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = p_i$. Оценив по выборке значений величины ξ ее математическое ожидание, получим оценку вероятности выхода траектории на поверхность контроля π_k за время $[t_0, T]$. Таким образом, в схеме опытов Бернулли с вероятностью успеха в одном опыте p_i надо определить математическое ожидание $M\xi$ по выборке случайной величины ξ. Одним опытом в данном случае является розыгрыш значения $x(t_0)$ как случайной величины с заданным на области начальных условий X^0 распределением с дальнейшим формированием последовательности $x(t_l)$, $l = 1, \ldots, N_3$, и вычислением значения величины ξ по правилу (13). Статистической оценкой математического ожидания $M\xi$ является величина

$$\bar{\xi} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N_3} \xi_k}{N_3},$$

где N_3 — объем выборки случайной величины ξ. Будучи суммой большого количества независимых одинаково распределенных случайных величин ξ, величина $\bar{\xi}$ является нормально распределенной величиной с математическим ожиданием $M\xi_k = a$ и дисперсией $\sigma^2 = D\xi_k$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}}\right| < u_\alpha\right\} = 1 - 2\alpha,$$

где $1 - 2\alpha$ — доверительная вероятность выполнения оценки

$$\left|\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma/\sqrt{N_3}}\right| < u_\alpha.$$

Заменив величину σ ее статистической оценкой σ_{N_3}, которая является состоятельной (см. также [24, 26, 27]), получим аналогичную оценку математического ожидания случайной величины $\bar{\xi}$:

$$\lim_{N_3 \to \infty} P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a}{\sigma_{N_3}/\sqrt{N_3}}\right| < u_\alpha\right\} = 1 - 2\alpha.$$

Так как математическое ожидание $M\xi = a = p_i$, то, взяв статистические средние в виде $\bar{\xi} = \mu_{N_3}/N_3$, где μ_{N_3} — число успехов в N_3 опытах и

$$\sigma_{N_3} = \sqrt{\frac{\mu_{N_3}}{N_3}\left(1 - \frac{\mu_{N_3}}{N_3}\right)}$$

— состоятельная оценка для величины $\sigma = \sqrt{D\xi_k}$ в схеме Бернулли (см. также [31, 33]), получим доверительный интервал для вероятности p_i:

$$\frac{\mu_{N_3}}{N_3} - \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} < p_i < \frac{\mu_{N_3}}{N_3} + \frac{u_\alpha}{\sqrt{N_3}}\sigma_{N_3} \tag{14}$$

с доверительной вероятностью $1-2\alpha$. Задавшись доверительной вероятностью $1-2\alpha$, величину u_α получим из таблиц (ср. с [17, 25, 29]).

Величины σ_{N_3} и μ_{N_3} вычисляются из выборки случайной величины ξ. Таким образом, с заданной доверительной вероятностью $1-2\alpha$ найден доверительный интервал для вероятности p_i (см. (14)) выхода траектории системы (2) с функцией f_i в правой части на поверхность контроля π_k. Величина p_i характеризует надежность контроля в случае возникновения i-й списочной неисправности. Ввиду статистического характера построения поверхности контроля π_k может быть принята следующая процедура контроля и обнаружения неисправностей: при выходе траектории вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k включается алгоритм диагностирования неисправностей (ср. [19, 21, 28]).

5. При попадании траектории в слой фазового пространства, прилегающий к поверхности контроля π_k с ее внутренней стороны, также может быть включен алгоритм диагностирования. Слой фазового пространства, прилежащий к поверхности π_k, при попадании траектории в который включается алгоритм диагностирования, можно представить как трубку между поверхностью π_k и поверхностью μ_k, где μ_k — граница объема $\overline{V}$ (здесь опять имеется в виду теоретико-множественное произведение):

$$\overline{V}=\prod_{i=1}^{m}\left[\max_{l}\underline{x}_{k_i}(t_l),\min_{l}\bar{x}_{k_i}(t_l)\right],\quad l=1,\dots,\left[\frac{T-t_0}{h}\right].$$

Таким образом, методом статистических испытаний получено решение задачи контроля, т.е. способ построения в определенных доверительных пределах поверхности контроля π_k, а также найдены вероятности выхода траектории систем с той или иной возможной неисправностью из априорного списка на границу поверхности контроля π_k. Это дает возможность выбрать такую вероятность контроля, с помощью которой в последующем решается основная задача дифференциальной диагностики — задача диагностирования, т.е. задача обнаружения происшедшей в системе данной конкретной неисправности, вообще говоря, конкретной неисправности из априорного списка неисправностей.

В связи с этим возникает необходимость дать *расширенную (обобщенную) постановку задачи контроля*, позволяющую контролировать не только неисправности из априорного списка, но и «близкие» к ним, возникшие в их окрестностях.

3. Расширенная (обобщенная) постановка задачи контроля. Рассмотрим диагностическое пространство (см. [32])

$$(M;O_1,\dots,O_l;A_1,\dots,A_3).\tag{15}$$

В пространстве (15) будут протекать процессы, описываемые уравнениями (1) и (2), а также уравнениями

$$\dot{x}=f(x,t),\tag{16}$$

обусловленными неисправностями не из априорного списка, но близкими к ним, происшедшими в их окрестностях $O_1,\dots,O_l$ пространства (15), например, неисправностью, закон развития которой, возможно приводящий к неисправности с математическим ожиданием $a=0$ из априорного списка, можно моделировать путем уменьшения a до нуля, изменяющейся по линейному закону

$$a(t)=a_{\text{nom}}b(t-t_0),\quad t>t_0,\tag{17}$$

где a_{nom} — номинальное значение коэффициента a, а b — отрицательная постоянная. Достигнув нуля, значение a больше не меняется. Значение $a=0$ в силу (17) может достигаться за время, отличное от времени выхода на поверхность контроля системой (1) со списочной неисправностью при $a=0$. Неисправность (17) близка к списочной (когда $a=0$), но не совпадает с ней.

Таким образом, управляемая динамическая система, описываемая уравнениями (16), содержит элементы с неполной информацией, и для описания такой системы используют дифференциальные включения

$$\dot{x}\in F(x,t),\quad F(x,t)\in\{f(x,t)\},\tag{18}$$

где через $F(x,t)$ обозначено обусловленное возникновением неисправностей не из априорного списка множество скоростей, которые могут возникнуть в сферах влияния опорных систем (2), т.е. в окрестностях $O_1,\dots,O_l$ опорных неисправностей пространства (15).

Расширенная (обобщенная) постановка задачи контроля (ее также можно назвать постановкой расширенной задачи контроля) может быть сформулирована следующим образом.

Пусть дана управляемая динамическая система (1), ограниченное множество начальных условий X^0 (замкнутость данного множества не требуем), время T, набор функций $f_j(x,t)$, $j=1,\dots,l$, в (2) и диагностическое пространство (15) (см. [28,30]).

Требуется найти такой вектор контроля (3), чтобы он содержал минимальное подмножество (в смысле размерности) координат фазового вектора $x(t)$ состояния системы и позволял построить выпуклую поверхность контроля π_k минимального объема в пространстве координат найденного вектора $y(t)$ такую, что вектор $y(t)$, составленный из компонент решения уравнения (1) на отрезке времени $[t_0,T]$, не выходил бы на поверхность контроля π_k, а векторы контроля $y(t)$, составленные из соответствующих компонент решений любой из систем (2) и любой из систем (16), (18), обусловленных неисправностью не из априорного списка (2), но принадлежащих окрестностям $O_1,\dots,O_l$ диагностического пространства (15) и приводящих к недопустимым отклонениям системы (1) с начальными условиями $x^0=x(t_0)\in X^0$, выходили бы на поверхность π_k в момент времени $t_k\in[t_0,T]$ (ср. [25,29]).

Таким образом, критерием наличия неисправности в диагностическом пространстве объекта, движение которого описано уравнениями (1), будет выход вектора контроля $y(t)$ на поверхность контроля π_k в некоторый момент времени $t_k<T$ (ср. [29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. В.* Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении// Докл. АН СССР. — 1988. — *299*, № 2. — С. 296–301.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
3. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
4. *Жуков В. П.* О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова// Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
5. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости// Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
6. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование линейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1979. — № 8. — С. 120–128.
7. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
8. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью// Мат. сб. — 1960. — *51 (93)*, № 1. — С. 99–128.
9. *Филиппов А. Ф.* Классификация компактных инвариантных множеств динамических систем// Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — *57*, № 6. — С. 130–140.
10. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
11. *Чикин М. Г.* К существованию правой производной у решений уравнений одного класса разрывных систем// Автомат. телемех. — 1988. — № 1. — С. 170–171.
12. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
13. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
14. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
15. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.

16. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.
17. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
18. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
19. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
20. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150*. — С. 88–109.
21. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160*. — С. 137–141.
22. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
23. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46*. — P. 323–342.
24. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
25. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.
26. *Ceci C., Gerardi A., Tardelli P.* Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — *74*, № 2. — P. 155–175.
27. *Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K.* Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — *50*, № 3. — P. 2119–2326.
28. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — *6*, № 2. — P. 194–214.
29. *Ho D.-T., Grotli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B.* Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — *78*, № 1. — P. 159–179.
30. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
31. *Rieder U., Winter J.* Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — *70*. — P. 567–596.
32. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
33. *Tang X., Wang S.* A low hardware overhead self-diagnosis technique using Reed–Solomon codes for self-repairing chips// IEEE Trans. Comput. — 2010. — *59*, № 10. — P. 1309–1319.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`