ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 209 (2022). С. 53–76
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-53-76

УДК 517.95

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ. ОСОБЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

© 2022 г. **В. И. СУМИН**

Аннотация. Работа представляет собой краткий обзор некоторых результатов теории оптимизации, полученных с использованием вольтерровых функциональных уравнений (ВФУ). Изложена общая схема предложенного автором способа использования ВФУ-описания управляемых начально-краевых задач для изучения особых управлений, на которых вырождаются необходимые условия оптимальности. Приведены конкретные иллюстративные примеры.

Ключевые слова: функциональное уравнение Вольтерры, распределенная управляемая система, задача оптимального управления, необходимые условия оптимальности, принцип максимума, особое управление.

VOLTERRA FUNCTIONAL EQUATIONS AND OPTIMIZATION OF DISTRIBUTED SYSTEMS. SPECIAL OPTIMAL CONTROLS

© 2022 **V. I. SUMIN**

Abstract. The work is a brief review of some results of optimization theory obtained by using Volterra functional equations (VFE). We present the method proposed by the author for using the VFE-description of controlled initial-boundary-value problems for studying special controls on which necessary optimality conditions degenerate. Illustrative examples are given.

Keywords and phrases: Volterra functional equation, distributed control system, optimal control problem, necessary optimality conditions, maximum principle, special control.

AMS Subject Classification: 93C20, 93C23, 35B30, 47B38

1. Введение. Переход к описанию управляемых систем на языке функциональных (иначе, функционально-операторных) уравнений применялся в теории оптимального управления разными авторами. Например, в [7] описание управляемых систем с помощью функциональных уравнений в пространствах типа C и L_p использовалось для изучения вопросов существования решений оптимизационных задач и расширения этих задач, при построении теории обобщенных управлений и выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО) для таких задач и др. В [2, гл. 6] на широкий класс управляемых функциональных уравнений в пространствах типа C распространена схема Дубовицкого—Милютина получения принципа максимума. К формам функциональных уравнений [7] и [2] приводят, в частности, различные управляемые системы с отклоняющимся

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199_а).

 © ВИНИТИ РАН, 2022

аргументом и некоторые *управляемые начально-краевые задачи* (УНКЗ) для гиперболических (см. [7, с. 169—170]) и параболических (см. [2, с.265—266]) уравнений с частными производными.

В [41,42] была предложена достаточно общая форма описания УНКЗ с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, t^2, \ldots, t^n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m, \tag{1}$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ и $f(\cdot,\cdot,\cdot)\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ заданы; $v(\cdot) \in \mathbf{D} \subset L_k^s$ — управление; $A\colon L_p^m \to L_q^l$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе $\mathbf{T}$ подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in \mathbf{T}$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \subset H}$ (это прямое многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [69]; множества системы $\mathbf{T}$ естественно назвать вольтерровыми множествами оператора A и ВФУ (1)); $p, q, k \in [1, +\infty]$. Заметим, что начиная с работ Л. Тонелли [81] и А. Н. Тихонова [69] название «вольтерровы операторы» (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным семействам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы (см., например, [7, с. 233]) и др.). Подобные семейства выделялись как в классах интегральных (см., например, [21, 22, 77]) и функциональных (см., например, [19, 42–44, 75]) операторов, так и в классах разного рода абстрактных операторов (см., например, [6, 15, 16, 20, 31, 66, 67, 72, 78, 79, 82]); некоторую библиографию можно найти в [31]; краткий обзор некоторых определений вольтеррововсти, предложенных до 1992 г., см. в [43, Дополнение. Различные определения вольтерровых операторов].

К ВФУ (1) обращением главной части приводятся самые разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.), в том числе при понимании решения УНКЗ в обобщенном смысле; многочисленные самые разные примеры такого приведения см., например, в [28, 39, 43, 46, 51–58]; достаточно подробные схематические описания способа обращения главной части УНКЗ приведены в [49, 73]. Обычно управление $v(\cdot)$ в (1) так или иначе соответствует распределенному или начальному управлению эквивалентной УНКЗ; если же, к примеру, управляемы старшие коэффициенты основного уравнения УНКЗ или в этом уравнении имеются управляемые запаздывания, то в эквивалентном ВФУ (1) будет управляем оператор A (см., например, [58], [43, гл. 2, § 2 и § 7]). Подчеркнем, что мы рассматриваем уравнение (1) прежде всего как удобную для теории оптимального управления эквивалентную форму записи УНКЗ.

Переход в описании управляемой системы от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1) адекватен многим проблемам теории оптимизации распределенных систем; он, возможно, позволяет достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме — с другой. Краткий обзор некоторых результатов теории оптимизации, полученных автором (лично и в соавторстве) с использованием ВФУ вида (1), представлен в разделе 2.

Для более детальной иллюстрации метода ВФУ выбрана тема так называемых особых управлений. Особыми управлениями для тех или иных НУО принято называть те управления, на которых эти НУО (например, принцип максимума) вырождаются (см., например, [13]). Разделы 3 и 4 статьи посвящены предложенному автором способу изучения особых управлений с помощью ВФУ-описания управляемых систем. В разделе 3 подробно излагается общая схема этого способа, а в разделе 4 приводятся иллюстрирующие способ конкретные примеры.

Заметим, что иногда в теории оптимизации бывает удобно в качестве эквивалента УНКЗ вместо (1) или наряду с (1) использовать ВФУ и другого вида (см., например, [45]). Так, ряд интересных результатов (свойства множеств глобальной разрешимости, обоснование численных методов распределенной оптимизации, функционально-операторные игры и др.) получил А. В. Чернов (см., в частности, [72, 73, 76]), обзоры [68, 80]).

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbb{R}^n$ — пространство n-векторов $a \equiv \{a^1, \dots, a^n\}$;

$$\langle a, b\rangle_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a^i b^i$$

— скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$; если $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, то $\{a_1, \dots, a_k\} \equiv \{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1^1, \dots, a_1^n, \dots, a_k^1, \dots, a_k^n\} \in \mathbb{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X, Y)$ — класс линейных ограниченных операторов из X в Y, а норма в прямом произведении $X \times Y$ определяется формулой $\|\{x, y\}\|_{X\times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^l — пространство l-вектор-функций, а $X^{l\times m}$ — $(l \times m)$-матриц-функций, составленных из функций пространства X; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком * обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования; $\otimes$ — знак тензорного произведения; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт с непустой внутренностью, основное множество изменения независимых переменных $t \equiv \{t^1, t^2, \dots, t^n\}$; в обозначениях пространств значок Π, как правило, опускаем, в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность (например, вместо $L_p^m(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем соответственно L_p^m, L_p); χ_Q — характеристическая функция множества Q, равная единице на множестве Q и равная нулю на дополнении Q до некоторого содержащего Q множества, вид которого понятен из контекста; P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$; систему $\mathcal{T} \equiv \{H_0, H_1, \dots, H_k\}$ вольтерровых множеств оператора $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ такую, что $\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Pi$, называем вольтерровой цепочкой оператора $\mathcal{F}$, а если для некоторого $\delta > 0$ выполняются неравенства $\|P_{H_i\setminus H_{i-1}}\mathcal{F}P_{H_i\setminus H_{i-1}}\|_{L_p\to L_p} \leqslant \delta$ при $i = 1, \dots, k$, то — вольтерровой δ-цепочкой этого оператора [43, с.24].

2. Вольтерровы функциональные уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. При выводе НУО в задачах оптимального управления, при обосновании численных методов решения таких задач и во многих других случаях возникает следующая ситуация. Некоторая УНКЗ рассматривается на фиксированном множестве Π изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, т.е. определенные на всем Π, решения УНКЗ из выбранного класса W функций на Π. Пусть Ω — множество тех управлений из класса допустимых, каждому из которых отвечает единственное в W решение рассматриваемой УНКЗ; назовем Ω множеством глобальной разрешимости этой УНКЗ. Важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из Ω, т.е. вопрос о достаточных условиях *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) данной УНКЗ. Так, при выводе НУО недостаток информации об УСГР рассматриваемой УНКЗ по возмущению управления часто вынуждает считать УНКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [27] и переходить от классического случая «состояние определяется управлением» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны; при этом построения в сингулярном случае часто оказываются намного более сложными, чем аналогичные построения в случае несингулярном (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в [27, главы 1, 2]).

Для сосредоточенных управляемых систем теоремы о достаточных условиях УСГР хорошо известны: простейшие варианты дают теоремы о непрерывной зависимости от числового параметра решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, более общие случаи параметра из метрического и топологического пространств детально рассмотрены, например, в [1, 70], в [70] можно найти и подробную библиографию по этому вопросу, имеющему богатую историю. Гораздо меньше внимания уделялось вопросам УСГР распределенных управляемых систем: условия УСГР УНКЗ изучались, как правило, лишь при специальных возмущениях (вариациях) управлений, требующихся, например, для получения тех или иных НУО; история вопроса кратко описана в [46].

В [47–50] представлена общая схема получения достаточных условий УСГР для распределенных управляемых систем, основанная на приведении УНКЗ к эквивалентному ВФУ вида (1) (первоначальный вариант схемы был описан для случая $p = q = k = \infty$ в [41], а затем в модернизированном виде — в [42, 43, 51–53]). На многочисленных примерах показано, что в терминах эквивалентных ВФУ (1) условия УСГР УНКЗ формулируются достаточно естественно и в то же время удобно для приложений; эти условия сопровождаются некоторыми утверждениями о непрерывной зависимости решений от управлений и оценками приращений решений. Схема позволяет получать конструктивные условия УСГР самых разнообразных УНКЗ для различных нелинейных уравнений с частными производными при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений и в запаздывания (см., например, [28, 41, 43, 46, 48, 51–58], обзоры [46, 59, 60, 68, 80]). При этом используется продолжение локальных решений (управляемой УНКЗ или эквивалентного ВФУ) вдоль цепочки вольтерровых множеств, которое в общем виде можно описать следующим образом: если фиксировано некоторое допустимое управление u_0 из множества глобальной разрешимости Ω, то всякому допустимому управлению u, для которого величина $r(u, u_0)$ отклонения u от u_0 в некоторой полуметрике r, определяемой правой частью эквивалентного ВФУ, достаточно мала, можно сопоставить конечную упорядоченную по вложению последовательность $H_1, H_2, \ldots, H_k$, $H_k = \Pi$, вольтерровых множеств ВФУ так, что на H_1 управлению u отвечает локальное решение (УНКЗ и эквивалентного ВФУ) и это решение последовательными продолжениями с H_1 на H_2, …, с H_{k-1} на H_k допускает продолжение до глобального решения, причем уклонение этого глобального решения от глобального решения, отвечающего управлению u_0, оценивается через $r(u, u_0)$.

Простая конструкция «цепочки вольтерровых множеств» оказалась весьма полезной в различных вопросах не только теории ВФУ, но и теории вольтерровых операторов, а также собственно теории оптимального управления распределенными системами и теории «функционально-операторных игр» [76] (см. обзоры [68, 80]). Так, распространение теории УСГР УНКЗ, использующей вольтеррову функционально-операторную переформулировку УНКЗ в виде ВФУ (1), с первоначально рассматривавшегося случая $p = q = k = \infty$ на общий случай $1 \leqslant p, q, k \leqslant \infty$ (что существенно расширило семейство охватываемых этой теорией УНКЗ) [47, 48, 50] потребовало введения [47] и подробного изучения [47–49, 60] понятия «равностепенная квазинильпотентность семейства операторов». При этом получила развитие идея работы [61], посвященной признаку квазинильпотентности вольтерровых функциональных операторов, опирающемуся на понятие вольтерровой δ-цепочки оператора.

В [43, 44] доказательства упомянутых теорем УСГР ВФУ (1), $p = q = k = \infty$, были распространены на нелинейные ВФУ второго рода общего вида над L_∞^m с варьируемой правой частью. В [66, 67, 72] схема [47, 48] вывода условий УСГР ВФУ (1) в лебеговых пространствах была распространена на случай рассматриваемых над банаховым пространством вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида с варьируемой правой частью; при этом понятие «вольтерровость функционального оператора на системе множеств» в смысле [41, 42] заменяется более общим понятием «вольтерровость оператора на системе проекторов».

Теоремы УСГР нашли применение прежде всего при изучении вопросов дифференцирования и варьирования функционалов и операторов распределенных оптимизационных задач. Так, в [51] с помощью теорем УСГР [42] для широкого класса оптимизационных задач с ограниченным множеством допустимых значений управления, связанных с УНКЗ, допускающими описание ВФУ (1) при $p = q = k = \infty$, было дано обоснование применению градиентных методов при произвольных порядках роста каратеодориевских «правых частей» УНКЗ по «фазовым» и управляющим переменным. Заметим, что часто применяемое в градиентных процедурах решения задач оптимального управления дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа L_2 требует, вообще говоря, линейных порядков роста правых частей УНКЗ (см., например, [12, гл. 8]).

В [39, 48] для управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, было дано обоснование предложенного В. И. Плотниковым в [38] общего подхода к вычислению вариаций функционалов и операторов оптимизационной задачи, использующего линеаризацию задачи и соответствующие линейные интегральные представления приращений функционалов и операторов. Это позволило в [48] доказать, следуя общей схеме [38] вывода НУО в задачах с ограничениями, принцип максимума для связанной с управляемым ВФУ (1) оптимизационной задачи достаточно общего вида со смешанными функциональными ограничениями и операторным ограничением типа включения (в качестве конкретного примера в [48] был получен принцип максимума для оптимизационной задачи с функциональными и фазовыми ограничениями, связанной с УНКЗ для нелинейного параболического уравнения, при понимании решения УНКЗ в обобщенном смысле).

Заметим, что переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (1), как правило, удобен при выводе НУО (например, принципа максимума) уже потому, что при этом дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы УНКЗ, действующие в пространствах C_k гладких функций или в соболевских пространствах W_p^l, заменяются на операторы (как правило, интегральные), действующие в более удобных для построения «сопряженной задачи» данного НУО лебеговых пространствах. При этом сопряженная задача также имеет вид ВФУ и не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме, подобной форме первоначальной УНКЗ (см. примеры в [29, 30, 39]).

Теоремы УСГР [47, 48] позволили решить в [48, 55–57] некоторые вопросы, связанные с проблемой сингулярности УНКЗ в смысле Ж.-Л. Лионса [27]. В [27] предложено УНКЗ называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли, единственное глобальное решение данной УНКЗ. В этом случае для вывода НУО в [27] было предложено переходить к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар «управление, состояние» и ограничение в виде управляемого уравнения «снимать» методом адаптированного штрафа. Как отмечено выше, вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений (одна из существенных трудностей, возникающих при использовании метода адаптированного штрафа, предложенного в [27] для вывода НУО в сингулярной ситуации, — это, как отмечено самим автором [27], получение априорных оценок так называемого приближенного сопряженного состояния (см. [27, с. 66])). В [48, 55–57] показано, что ряд конкретных УНКЗ, рассматриваемых в [27] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО, считая, что «состояние определяется управлением», придерживаться классической схемы варьирования управлений. Как оказалось, бывает удобно «преодолевать сингулярность», переходя в описании управляемой системы от УНКЗ к эквивалентному ВФУ и используя соответствующие теоремы УСГР или теоремы о неявных функциях. Так в [48, 55–57, 72] (см. также [62]) удалось решить ряд поставленных в [27] «представляющих интерес» задач получения «сингулярных НУО» («сингулярных систем оптимальности» по терминологии [27]).

В [63, 64] был предложен аксиоматический подход в теории вариаций функционалов задач оптимизации, использующий представление управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, и аксиоматическое описание способов варьирования управлений; описание охватывает большинство традиционных для теории НУО способов варьирования (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, пакетами, сдвигом и др.). Это позволило единообразно рассмотреть широкий класс НУО первого и более высоких порядков (в случае управлений, на которых НУО первого порядка вырождаются, т.е. особых управлений для этих НУО).

Заметим, что *особые управления* (ОУ) ППМ, на которых ППМ вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях (см., например, [10, 13], [37, § 21], [23]). Однако до сих пор для распределенных управляемых систем ОУ ППМ изучены относительно слабо: начиная с первых работ [8, 9] на эту тему, в основном рассматривались управляемые системы Гурса—Дарбу, являющиеся своего рода «пробным камнем» теории оптимизации распределенных систем, и близкие им (см., например, [3–5, 10, 32, 35, 40], [11, с. 5], [34], обзоры [14, 33]). При изучении ОУ

ППМ главные усилия были направлены на конструирование с учетом специфики таких управляемых систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов.

В [63, 64] получил развитие предложенный в [41] способ изучения ОУ ППМ для управляемых систем (1), использующий при вычислении старших вариаций функционалов тензорные произведения лебеговых пространств. В [48, 63, 64] представлена обобщающая этот способ схема изучения особых управлений, использующая упомянутый аксиоматический подход в теории вариаций функционалов. В [48, 63, 64] показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно «сильное вырождение особых управлений», когда вместе с НУО первого порядка (например, ППМ, который можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управлений) вырождаются и НУО второго порядка. Описан способ компактной унификации построения НУО сильно вырожденных ОУ, позволивший с единых позиций взглянуть на известные НУО ОУ сосредоточенных и распределенных систем и получить ряд новых НУО ОУ для распределенных задач оптимизации (в частности, для задач, не рассматривавшихся в этом плане ранее). Подробное изложение схемы [48, 63, 64] применительно к ОУ ППМ для достаточно общей задачи оптимизации ВФУ (1) дано в [65]. В [29, 30] возможности варианта [65] схемы [48, 63, 64] демонстрируются на примере управляемой системы Гурса—Дарбу общего вида в случае, когда решения системы необходимо искать в классе функций с суммируемой в некоторой конечной степени смешанной производной.

В разделе 3 данной статьи представлен модернизированный вариант схемы [48, 63, 64] изучения особых управлений. Проводимые общие построения иллюстрируются на примере особых управлений поточечного принципа максимума. В разделе 4 рассматриваются соответствующие конкретные примеры, связанные с задачами оптимизации для гиперболических уравнений.

3. Особые оптимальные управления.

3.1. Оптимизационная задача. Рассмотрим управляемое функциональное уравнение (1), считая, что: $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт с непустой внутренностью; $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ — функция, дважды дифференцируемая по $\mathbf{p}$ для всех $\mathbf{v}$ при почти всех t и вместе с производными $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ измеримая по t для всех $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для почти всех t; $A \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^l)$; $v(\cdot) \in \mathcal{D} \subset L_\infty^s$ — управление, $\mathcal{D}$ — ограниченное в L_∞^s множество. Будем предполагать выполненными сформулированные ниже условия (**N**), (**a**)—(**c**).

(**N**) Функции f, $f'_{\mathbf{p}}$, $f''_{\mathbf{pp}}$ ограничены на любом ограниченном множестве. Это означает, что существует функция $\mathcal{N}(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что при любом $v \in \mathcal{D}$

$$|f(t, \mathbf{p}, v(t))| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad |f'_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{p}, v(t))| \leqslant \mathcal{N}(M), \quad |f''_{\mathbf{pp}}(t, \mathbf{p}, v(t))| \leqslant \mathcal{N}(M),$$

если $t \in \Pi$, $|\mathbf{p}| \leqslant M$.

(**a**) Оператор A имеет квазинильпотентную положительную мажоранту $B \in \mathfrak{L}(L_1, L_1)$.

(**b**) $B[L_\infty] \subset L_\infty$.

Из условия (**b**) следует (см. [26, с. 30]), что формула $B_\infty[z] \equiv B[z]$, $z \in L_\infty$, определяет оператор $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$.

(**c**) Для любого $\delta > 0$ у оператора B_∞ существует вольтеррова δ-цепочка.

Для действующих в банаховом идеальном пространстве измеримых на Π функций (см., например, [25, с. 139]) линейных ограниченных операторов справедливо следующее достаточное условие квазинильпотентности [61, Теорема 2]: если для любого $\delta > 0$ у оператора существует вольтеррова δ-цепочка, то оператор квазинильпотентен. Поэтому из условия (**c**) следует квазинильпотентность оператора B_∞.

Условия (**N**), (**a**), (**b**) позволяют говорить о решениях уравнения (1) класса L_∞^m. При условиях (**N**), (**a**), (**b**), (**c**) управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного в классе L_∞^m решения уравнения (1) [43, с. 37]. Будем считать, что класс Ω тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное в L_∞^m решение z_v уравнения (1), непуст. Пусть v_0 — фиксированный элемент Ω и $z_0 \equiv z_{v_0}$ — соответствующее решение (1). Положим

$$\rho(v) \equiv \|B[|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)|]\|_{L_\infty}, \quad v \in \mathcal{D},$$

используя обозначение $\Delta_{\mathbf{w}} f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t))$, $t \in \Pi$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^s$. При сформулированных условиях для уравнения (1) справедлива следующая теорема УСГР (см., например, [43, гл. 1, § 2, п. 4], [47, § 3, теорема 4]).

Теорема 1 (Достаточное условие устойчивости существования глобальных решений)**.** *Для всякого управления $v_0 \in \Omega$ существуют числа $\varkappa > 0$, $C > 0$ такие, что любое управление $v \in \mathcal{D}$, удовлетворяющее неравенству $\rho(v) < \varkappa$, принадлежит Ω и при этом*

$$\|z_v - z_0\|_{L_\infty^m} \leqslant C\|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L_\infty^m}, \quad \|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty^l} \leqslant C\rho(v). \tag{2}$$

Пусть $F\colon L_1^m \to \mathbb{R}$ — некоторый функционал, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \to \max, \quad v \in \Omega, \tag{3}$$

для определенности понимая ее как задачу нахождения L_1^s-локального максимума. Везде ниже: v_0 — фиксированное решение задачи (3), $z_0 \equiv z_{v_0}$.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_{\mathbf{w}} f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}\big(t, A[z_0](t), \mathbf{w}\big) - f'_{\mathbf{p}}\big(t, A[z_0](t), v_0(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^s;$$
$$f'_{\mathbf{p}}(t) \equiv f'_{\mathbf{p}}\big(t, A[z_0](t), v_0(t)\big), \quad f''_{\mathbf{pp}}(t) \equiv f''_{\mathbf{pp}}\big(t, A[z_0](t), v_0(t)\big), \quad t \in \Pi;$$
$$\Delta_v J \equiv J[v] - J[v_0], \quad \Delta z \equiv z_v - z_0, \quad v \in \Omega;$$
$$r(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L_1^m}, \quad r_1(v) \equiv \big\|\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\big\|_{L_1^{m\times l}}, \quad v \in \mathcal{D}.$$

3.2. Аксиоматическое описание способов варьирования. Необходимые условия оптимальности первого порядка. Варьирование оптимального управления $v_0(\cdot)$, используемое при выводе тех или иных НУО L_1^s-локального минимума в задаче (3), можно в достаточно общем виде описать, например, следующим образом. Пусть Σ — некоторое множество, элементы которого будем обозначать σ. Каждой паре $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\sigma \in \Sigma$, поставим в соответствие некоторую функцию $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}(t)$, $t \in \Pi$, со значениями из $\mathbb{R}^s$, предполагая, что выполняются следующие условия.

(**0**) Для каждого $\sigma \in \Sigma$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ управление $v_h(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{D}$.

(**1**) $\rho(v_h) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$.

(**2**) Для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $\{\gamma > 0 : \|v_h - v_0\|_{L_1^s} = O(\varepsilon^\gamma),\ \varepsilon \to 0\}$ не пусто и имеет максимальный элемент γ_0, не зависящий от $\sigma \in \Sigma$.

(**3**) $r(v_h) = O(\varepsilon^{\gamma_0})$, $\varepsilon \to 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$.

(**4**) $r_1(v_h) = O(\varepsilon^{\gamma_0})$, $\varepsilon \to 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$.

(**4**) Для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует предел

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{\gamma_0}} \Delta_{v_h} J.$$

Традиционные способы варьирования (классического, игольчатого, импульсного на полосах (см., например, [4]), пакетами, сдвигом и др.) обычно удовлетворяют условиям (**0**)—(**4**). Ввиду теоремы 1 условия (**0**), (**1**) обеспечивают корректность варьирования: для любого $\sigma \in \Sigma$ существует $\varepsilon_\sigma > 0$ такое, что $v_{\{\varepsilon,\sigma\}} \in \Omega$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma$. Таким образом, каждому элементу $\sigma \in \Sigma$ отвечает лежащее в Ω однопараметрическое семейство функций $\{v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}(t),\ t \in \Pi\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_\sigma}$, которое назовем вариантой управления $v_0(\cdot)$, соответствующей параметру варьирования σ.

Величину $\delta^{\gamma_0} J(\sigma)$ естественно назвать первой вариацией функционала J на варианте $\{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_\sigma}$, а содержащееся в следущей теореме очевидное необходимое условие L_1^s-локальной оптимальности управления v_0 в задаче (3) — НУО первого порядка для способа варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}} : \varepsilon > 0,\ \sigma \in \Sigma\}$.

Теорема 2 (Необходимое условие оптимальности первого порядка)**.** *Для L_1^s-локального решения v_0 задачи* (3) *при всяком способе варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$, удовлетворяющем условиям* (**0**)—(**4**)*, выполняются неравенства*

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \leqslant 0, \quad \sigma \in \Sigma. \tag{4}$$

Выбор (возможность, допустимость) того или иного способа варьирования определяется, кроме всего прочего, свойствами множества допустимых управлений $\mathcal{D}$. Далее для определенности будем считать, что $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U,\ t \in \Pi\}$, где $U \subset \mathbb{R}^s$ — заданное ограниченное множество. В этом случае всегда допустимы игольчатое и импульсное на полосе варьирования управления v_0, а при условии, например, выпуклости U допустимо и классическое варьирование.

Рассмотрим, например, простейшее одноточечное игольчатое варьирование, которым позже воспользуемся для вывода в задаче (3) НУО в виде ППМ. Ввиду условий (**N**), (**b**) функция $f'_{\mathbf{p}}(\cdot)$ принадлежит классу $L_\infty^{m\times l}$, а формула

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_{\mathbf{p}}(t)A[z](t), \quad z \in L_1^m, \quad t \in \Pi,$$

определяет оператор $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$. Из условия (**a**) следует, что оператор S имеет ограниченный обратный $S^{-1} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$, а потому существует оператор

$$(S^*)^{-1} \in \mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m),$$

совпадающий с оператором $(S^{-1})^*$ (см. [17, с. 516], [71, с. 61]). Пусть $a_0 \equiv F'(z_0)$ — производная Фреше функционала $F\colon L_1^m \to \mathbb{R}$ в точке z_0, $\omega \in L_\infty^m$ — функция Рисса функционала a_0 как элемента сопряженного пространства $(L_1^m)^*$, $\psi(\cdot)$ — единственное в L_∞^m решение уравнения

$$S^*[\psi](t) = \omega(t), \quad \psi \in L_\infty^m, \quad t \in \Pi. \tag{5}$$

Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t)\rangle_m, \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U,$$

и пусть $\Pi_{\mathbf{w}}$ — множество правильных точек Лебега функции $\pi(\cdot, \mathbf{w})\colon \Pi \to \mathbb{R}$ при $\mathbf{w} \in U$. Возьмем

$$\Sigma \equiv \big\{\{\tau, \mathbf{w}\} : \tau \in \Pi_{\mathbf{w}},\ \mathbf{w} \in U\big\}$$

и для каждой пары $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$, в которой $\varepsilon > 0$, $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$, определим функцию $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}(t)$, $t \in \Pi$, формулой

$$v_h(t) \equiv \big\{\mathbf{w}, t \in \Pi \cap \Pi_\varepsilon(\tau); v_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\big\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \sigma = \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma, \tag{6}$$

где $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0,1]^n$. Для построенного семейства функций (6) выполняются сформулированные выше условия (**0**)—(**4**), причем величина γ_0 равна размерности n пространства независимых переменных. Выполнение условий (**0**)—(**4**) очевидно. Выполнение условия (**4**) следует непосредственно из приведенной ниже, в теореме 3, асимптотической формулы (7) для приращения функционала и теоремы Лебега о правильных точках. Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующее утверждение, частный случай теоремы 1.9.3 из [18].

Лемма 1 (обобщенная лемма Гронуолла)**.** *Пусть банахово пространство* $\mathbf{B}$ *полуупорядочено по конусу* $K \subset \mathbf{B}$, *а* $G \in \mathfrak{L}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ — *квазинильпотентный оператор, для которого* K *инвариантен. Если для некоторых* $x, y \in \mathbf{B}$ *выполняется неравенство* $x \leqslant G[x] + y$, *то* $x \leqslant R(G)[y]$, *где*

$$R(G) = \sum_{i=0}^\infty G^i.$$

При этом K *считаем конусом в* $\mathbf{B}$, *если* K *выпукло, замкнуто и для любого отличного от нуля элемента* $x \in K$ *весь луч* $\{\lambda x : \lambda \geqslant 0\}$ *принадлежит* K, *но* $(-x) \notin K$.

Теорема 3 (первая асимптотическая формула для приращения функционала)**.** *Справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$\Delta_v J = \int\limits_\Pi \pi(t, v(t))dt + o(r(v) + r_1(v)), \quad r(v) \to 0, \quad r_1(v) \to 0, \quad \rho(v) \to 0 \quad (v \in \Omega). \tag{7}$$

Доказательство. При любом $v \in \Omega$ по теореме о конечных приращениях в интегральной форме

$$\Delta z = \left\{ \int\limits_0^1 f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t))d\xi \right\} A[\Delta z] + \Delta_v f(t), \tag{8}$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + \theta_0, \tag{9}$$

где

$$\theta_0 \equiv \int\limits_0^1 \{F'(z_0 + \xi\Delta z) - F'(z_0)\} d\xi [\Delta z].$$

С помощью (5), (8) формула (9) переписывается в виде

$$\Delta_v J = \int\limits_\Pi \langle \psi, \Delta_{v(t)} f(t) \rangle_m dt + \theta_0 + \theta_1, \tag{10}$$

$$\theta_1 \equiv \int\limits_\Pi \left\langle \psi(t), \int\limits_0^1 \{f'_{\mathbf{p}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v) - f'_{\mathbf{p}}(t)\} d\xi \cdot A[\Delta z](t) \right\rangle_m dt.$$

Из (8), леммы 1 и второго неравенства (2) следует существование такой постоянной C_1, что

$$\|\Delta z\|_{L_1^m} \leqslant C_1 \cdot r(v), \quad \text{если} \quad \rho(v) < \varkappa, \tag{11}$$

что дает $|\theta_0| = o(r(v))$, $r(v) \to 0 (v \in \Omega)$. Из (11) и второго неравенства (2) получаем

$$|\theta_1| = o(r(v) + r_1(v)), \quad r(v) + r_1(v) \to 0, \quad \rho(v) \to 0 \quad (v \in \Omega).$$

Это завершает доказательство формулы (7). □

Из асимптотической формулы (7) и аксиом варьирования получаем следующую более конкретную формулу.

Следствие 1. *Для любого способа варьирования*

$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}} : \varepsilon > 0,\ \sigma \in \Sigma\},$$

удовлетворяющего условиям (**0**)—(**4**), *справедлива асимптотическая формула*

$$\Delta_{v_h} J = \int\limits_\Pi \pi(t, v_h(t)) dt + o(\varepsilon^{\gamma_0}), \quad \varepsilon \to 0 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{12}$$

Из формулы (12) и теоремы Лебега о правильных точках находим, что в случае простейшего одноточечного игольчатого варьирования первая вариация функционала имеет вид

$$\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv \delta^n J(\tau, \mathbf{w}) = \pi(\tau, \mathbf{w}), \quad \tau \in \Pi_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Таким образом, из теоремы 2 получаем следующее НУО в виде ППМ.

Следствие 2 (поточечный принцип максимума). *Для L_1^s-локального решения v_0 задачи* (3)

$$\pi(\tau, \mathbf{w}) \leqslant 0 \textit{ при почти всех } \tau \in \Pi \textit{ для каждого } \mathbf{w} \in U. \tag{13}$$

Из асимптотической формулы (12) и неравенств ППМ (13) вытекает, что ППМ — самое сильное из всех НУО (4) в следующем смысле. Обозначим через $\mathcal{P}$ семейство всех способов варьирования

$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}} : \varepsilon > 0,\ \sigma \in \Sigma\}$$

со свойствами (**0**)—(**4**).

Теорема 4. *Если управление v_0 удовлетворяет неравенствам ППМ* (13), *то при каждом способе варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \in \mathcal{P}$ для v_0 выполняются неравенства* (4).

3.3. Особые управления. Рассмотрим ситуацию, когда НУО первого порядка (4) для управления v_0 вырождается, а именно для некоторого способа варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ выполняется тождество $\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$. В этом случае управление v_0 назовем *особым управлением* (ОУ) для этого способа варьирования и для соответствующего НУО (4). Так, например, управление v_0 будет ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования тогда и только тогда, когда $\pi(\tau, \mathbf{w}) = 0$ для всех $\mathbf{w} \in U$ при почти всех $\tau \in \Pi$. Будем называть ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования *полностью вырожденным* ОУ поточечного принципа максимума и говорить, что на таком ОУ *поточечный принцип максимума полностью вырождается.* Из асимптотической формулы (12) получаем следующее утверждение, дополняющее теорему 4.

Теорема 5. *Если v_0 — ОУ для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования, т.е. полностью вырожденное ОУ для ППМ* (13), *то v_0 — ОУ для каждого способа варьироания семейства $\mathcal{P}$, т.е. для каждого НУО первого порядка* (4).

3.4. Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем. Пусть v_0 — ОУ для способа варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ и $\gamma > \gamma_0$ — некоторое число. Предел

$$\delta^{\gamma} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{\gamma}} \Delta_{v_h} J,$$

если он существует, назовем вариацией J порядка $\gamma - \gamma_0 + 1$ на варианте $\{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}\}_{0<\varepsilon<\varepsilon_\sigma}$, а НУО вида

$$\delta^{\gamma} J(\sigma) \leqslant 0, \quad \sigma \in \Sigma$$

назовем НУО порядка $\gamma - \gamma_0 + 1$ управления v_0. В традиционных способах варьирования параметр ε обычно вводится так, что для ОУ v_0 вместе с $\delta^{\gamma_0} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, имеем $\delta^{\gamma} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, $\gamma_0 < \gamma < \gamma_0 + 1$, и содержательны, вообще говоря, лишь НУО, начиная с порядка 2. Будем считать, что у нас имеет место именно такой случай. Поэтому назовем ОУ v_0 *сильно вырожденным* для способа варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка, т.е. $\delta^{\gamma_0+1} J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$.

Сформулируем условия (это условия $(\mathbf{P})$ ниже), обеспечивающие при $\gamma_0 > 1$ сильное вырождение ОУ и позволяющие с помощью теории тензорных произведений лебеговых пространств построить удобную для изучения ОУ асимптотическую формулу приращения $\Delta_v J$ (это формула (17)). Введем специальные обозначения:

$$f''_{\mathbf{pp}}(\cdot)[x, y] \equiv \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} f''_{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}(\cdot) x^i y^j, \quad x, y \in \mathbb{R}^l,$$

$$\Gamma \equiv \big\{\{i, j\} : i \in \overline{1, m},\ j \in \overline{1, l};\ \Delta_{\mathbf{v}} f^{i\prime}{}_{\mathbf{p}^j}(t) = 0 \text{ для любого } \mathbf{v} \in U \text{ при почти всех } t \in \Pi\};$$

если $X = (X_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, то $\overline{X} = (\overline{X}_{ij})$ — $(m \times l)$-матрица, в которой

$$\overline{X}_{ij} = \{0, \{i, j\} \in \Gamma; X_{ij},\ \{i, j\} \notin \Gamma\},$$

X^0 — ml-вектор-столбец, полученный развертыванием X по правилу

$$X^0 = \{X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{m1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{ml}\},$$

а $M[.]$ — обратный оператор свертывания ml-вектора-столбца в $(m \times l)$-матрицу.

Условия (P).

$(\mathbf{P}_1)$ Для любых $\xi \in L^l_\infty$, $v \in \Omega$ формула

$$b_1(\xi, v)[x, y] \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Pi} \langle \psi(t), f''_{\mathbf{pp}}(t, \xi(t), v(t))[A[x](t), A[y](t)] \rangle_m dt, \quad x, y \in L^m_1,$$

определяет на $L^m_1 \times L^m_1$ ограниченный билинейный функционал $b_1(\xi, v)[.,.]$, непрерывно в норме $L^l_\infty \times L^s_1$ зависящий от $\{\xi, v\}$.

($\mathbf{P}_2$) Формула

$$b_2[x,y] \equiv \int\limits_{\Pi} \langle \psi(t), \overline{M[y(t)]} A[x](t)\rangle_m dt, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^{ml},$$

определяет на $L_1^m \times L_1^{ml}$ ограниченный билинейный функционал $b_2[.,.]$.

Укажем некоторые, простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда условия ($\mathbf{P}$) заведомо выполняются.

Теорема 6. *Условия* ($\mathbf{P}$) *выполняются в каждом из следующих случаев:*

(i) $\psi(t) \equiv 0$, $t \in \Pi$;

(ii) $A \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_\infty^l)$;

(iii) $f(t,\mathbf{p},\mathbf{v}) = f_1(t,\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2 + f_2(t,\mathbf{p}_1,\mathbf{v})$, $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2\}$, $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{l_i}$ $(i=1,2)$, $l_1+l_2=l$, f_1 — $(m\times l_2)$-*матрица,* $A[.] = \{A_{(1)}[.], A_{(2)}[.]\}$, $A_{(i)}[.]\colon L_1^m \to L_1^{l_i}$ $(i=1,2)$, *причем* $A_{(1)} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_\infty^{l_1})$.

Любой ограниченный билинейный над $L_1^m \times L_1^k$ функционал $b[.,.]$ единственным образом представим в виде

$$b[x,y] = \int\limits_{\Pi} dt \int\limits_{\Pi} x^*(t)\Theta(t,s)y(s)ds, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k, \tag{14}$$

где $\Theta \in L_{\infty,m\times k}(\Pi\times\Pi)$ (см., например, [74, гл. 3, пп. 6.2, 6.4, 6.5]). Пусть

$$b_0[x,y] \equiv \frac{1}{2}\cdot F''(z_0)[x,y], \quad x,y \in L_1^m,$$

где $F''(z_0)[.,.]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t,s)$, $\Theta_1(t,s)$ — $(m\times m)$-матрицы, отвечающие по формуле (14) функционалам b_0,

$$b_{10} \equiv b_1(A[z_0], v_0);$$

$\Theta_2(t,s)$ — $(m\times ml)$-матрица, отвечающая функционалу b_2; I_k — тождественный оператор в L_1^k; $L_1^m \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^m и L_1^k, натянутое на элементы $x(t)\otimes y(s) \equiv x(t)y^*(s)$ ($x \in L_1^m$, $y \in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{m\times k}(\Pi\times\Pi)$.

Рассматриваемое над $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ уравнение

$$(S\otimes S)^*[\eta(t,s)] = \Theta_i(t,s) \tag{15}$$

имеет единственное решение $\eta_i(t,s)$ $(i=0,1)$. Уравнение

$$(S\otimes I_{ml})^*[\eta(t,s)] = \Theta_2(t,s) \tag{16}$$

имеет единственное в $L_\infty^{m\times ml}(\Pi\times\Pi)$ решение $\eta_2(t,s)$ (по поводу уравнений (15) и (16) см. ниже п. 3.6). В теории принципа максимума уравнение (5) обычно называют сопряженным уравнением. По аналогии с этим уравнения (15) и (16) можно назвать *бисопряженными уравнениями.* Положим

$$E(t,s;\mathbf{v},\mathbf{w}) \equiv \langle \Delta_{\mathbf{v}} f(t), \{\eta_0(t,s)+\eta_1(t,s)\}\Delta_{\mathbf{w}} f(s) + \eta_2(t,s)\{\Delta_{\mathbf{w}} f'_{\mathbf{p}}(s)\}^0\rangle_m, \quad t,s\in\Pi, \quad \mathbf{v},\mathbf{w}\in U.$$

Теорема 7 (вторая асимптотическая формула для приращения функционала)**.** *При условиях* ($\mathbf{P}$) *справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{gathered}\Delta_v J = \int\limits_{\Pi} \pi(t,v(t))dt + \int\limits_{\Pi} dt \int\limits_{\Pi} E(t,s;v(t),v(s))ds + o(\{r(v)+r_1(v)\}^2),\\ r(v)\to 0, \quad r_1(v)\to 0, \quad \rho(v)\to 0, \quad \|v-v_0\|_{L_1^s}\to 0, \quad v\in\Omega.\end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. В силу условия (**a**) существует оператор $S^{-1} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$ и, как мы уже отмечали, $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$. С помощью формулы Тейлора находим

$$S[\Delta z](t) = Q(t), \quad t\in\Pi, \tag{18}$$

$$Q(t) \equiv \Delta_{v(t)} f(t) + Q_0(t), \quad Q_0(t) \equiv \sum_{i=1}^{3} Q_i(t),$$

$$Q_1(t) \equiv \{\Delta_{v(t)} f'_{\mathbf{p}}(t)\} \cdot A[\Delta z](t), \quad Q_2(t) \equiv \frac{1}{2} f''_{\mathbf{pp}}(t)[A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)],$$

$$Q_3(t) \equiv \int\limits_0^1 (1-\xi) \cdot \{f''_{\mathbf{pp}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t)) - f''_{\mathbf{pp}}(t)\}[A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)] d\xi,$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + b_0[\Delta z, \Delta z] + \theta_2,$$

$$\theta_2 \equiv \left\{ \int\limits_0^1 (1-\xi) \cdot \{F''(z_0 + \xi \Delta z) - F''(z_0)\} d\xi \right\} [\Delta z, \Delta z].$$

Из (7) и (18) получаем

$$a_0[\Delta z] = \int\limits_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + b_{10}[\Delta z, \Delta z] + b_2[\Delta z(\cdot), \{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^0] + \theta_3,$$

$$\theta_3 = a_0[Q_3(\cdot)].$$

Каждый билинейный функционал (14) однозначно отождествляется с некоторым линейным функционалом $c[\cdot]$ над проективным тензорным произведением $L_1^m \otimes L_1^k \equiv L_1^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$ равенством

$$c[x(t) \cdot y^*(s)] = b[x, y], \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k. \tag{19}$$

Пусть: c_0, c_1, c_2 — функционалы, отождествляемые по (19) соответственно с b_0, b_{10}, b_2; функционалы $l_0, l_1 \in (L_1^m \otimes L_1^m)^*$, $l_2 \in (L_1^m \otimes L_1^{ml})^*$ определяются формулами

$$l_i = (S^{-1} \otimes S^{-1})^*[c_i] \quad (i = 0, 1); \quad l_2 = (S^{-1} \otimes I_{ml})^*[c_2], \tag{20}$$

а $\eta_i(t, s) \in L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ $(i = 0, 1)$, $\eta_2(t, s) \in L_1^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$ — функции Рисса для l_i $(i = 0, 1)$, l_2 соответственно. Учитывая, что

$$(S^{-1} \otimes S^{-1})^* = ((S \otimes S)^*)^{-1}, \quad (S^{-1} \otimes I_{ml})^* = ((S \otimes I_{ml})^*)^{-1},$$

равенства (20) можно переписать в виде

$$(S \otimes S)^*[l_i] = c_i, \quad i = 0, 1, \qquad (S \otimes I_{ml})^*[l_2] = c_2$$

или, переходя от функционалов к соответствующим функциям Рисса, в виде

$$(S \otimes S)^*[\eta_i] = \Theta_i \quad (i = 0, 1), \quad (S \otimes I_{ml})^*[\eta_2] = \Theta_2,$$

что означает: $\eta_i(t, s)$ — единственное в $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ решение i-го уравнения (15) $(i = 0, 1)$, $\eta_2(t, s)$ — единственное в $L_\infty^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$ решение уравнения (16). Соотношения (18), (20) дают

$$b_0[\Delta z, \Delta z] = l_0[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(0)}, \tag{21}$$

$$b_{10}[\Delta z, \Delta z] = l_1[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(1)}, \tag{22}$$

$$b_2[\Delta z, \{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^c] = l_2[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^0] + \theta_5, \tag{23}$$

где

$$\theta_4^{(i)} \equiv l_i[Q_0(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + l_i[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] + l_i[Q_0(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] \quad (i = 0, 1),$$

$$\theta_5 \equiv l_2[Q_0(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^0].$$

Для завершения доказательства (17) достаточно показать (см. (17), (9), (10), (21), (22), (23)), что каждая из величин θ_2, θ_3, $\theta_4^{(0)}$, $\theta_4^{(1)}$, θ_5 подчиняется условию

$$|\theta| = o(\{r(v) + r_1(v)\}^2), \quad r(v) \to 0, \quad r_1(v) \to 0, \quad \rho(v) \to 0 \quad (v \in \Omega).$$

Для θ_2 это следует из (11) и непрерывности второй производной Фреше F'', для θ_3 — из (11) и условия $(\mathbf{P}_1)$, для $\theta_4^{(i)}$ $(i = 1, 0)$ — из (2), (11), для θ_5 — из (2), (11) и условия $(\mathbf{P}_2)$. Теорема 7 доказана. $\square$

Непосредственно из формулы (17) и аксиом варьирования получаем следующую более конкретную асимптотическую формулу.

Следствие 3. *Для любого способа варьирования*
$$\{v_h : \sigma \in \Sigma\} \equiv \{v_h \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}} : \varepsilon > 0,\ \sigma \in \Sigma\},$$
удовлетворяющего условиям $(\mathbf{0})$—$(\mathbf{4})$*, справедлива асимптотическая формула*
$$\Delta_{v_h} J = \int\limits_{\Pi} \pi(t, v_h(t))dt + \int\limits_{\Pi} dt \int\limits_{\Pi} E(t, s; v_h(t), v_h(s))ds + o(\varepsilon^{2\gamma_0}), \quad \varepsilon \to 0 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{24}$$

Из формулы (24), с учетом вида функции E, получаем следующее утверждение о достаточных условиях сильного вырождения ОУ для способа варьирования семейства $\mathcal{P}$.

Теорема 8 (общие достаточные условия сильного вырождения особых управлений)**.** *Пусть* v_0 *есть ОУ для принадлежащего* $\mathcal{P}$ *способа варьирования* $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$*. Если выполняются условия* $(\mathbf{P})$ *и*
$$\int\limits_{\Pi} \pi(t, v_h(t))dt = 0, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_\sigma(\sigma \in \Sigma),$$
то
$$\Delta_{v_h} J = O(\varepsilon^{2\gamma_0}), \quad \varepsilon \to 0(\sigma \in \Sigma),$$
и при $\gamma_0 > 1$ *управление* v_0 *является сильно вырожденным ОУ для данного способа варьирования.*

Теорема 9 (достаточные условия сильного вырождения особых управлений ППМ)**.** *Если* v_0 *есть полностью вырожденное ОУ для ППМ и выполняются условия* $(\mathbf{P})$*, то из полученных для* v_0 *простейшим одноточечным игольчатым варьированием НУО вырождаются все НУО до порядка* n *включительно, и содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего* n*. Таким образом, в случае* $n > 1$ *всякое ОУ ППМ является сильно вырожденным ОУ.*

Доказательство. При простейшем одноточечном игольчатом варьировании, ввиду полного вырождения ППМ, имеем $\pi(t, v_h(t)) = 0$, $t \in \Pi$, для любого $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Так как в данном случае $\gamma_0 = n$, то выводы теоремы 9 следуют напрямую из теоремы 8. Теорема 9 доказана. □

3.5. Необходимые условия оптимальности сильно вырожденных особых управлений поточечного принципа максимума. В условиях теоремы 8 асимптотическая формула (24) позволяет, если для способа варьирования $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$ существует вариация $\delta^{2\gamma_0} J(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, порядка $\gamma_0 + 1$, получить НУО порядка $\gamma_0 + 1$:
$$\delta^{2\gamma_0} J(\sigma) \leqslant 0, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Рассмотрим в качестве примера способ простейшего одноточечного игольчатого варьирования. Очевидно, что в этом случае для существования вариации $\delta^{2\gamma_0} J(\sigma) \equiv \delta^{2n} J(\tau, \mathbf{w})$ порядка $n + 1$ достаточно, например, выполнения следующих условий.

Условия (G).

($\mathbf{G}_i$) Для функции $\eta_i(t, s)$ правильные относительно $2n$-мерной меры Лебега на $\Pi \times \Pi$ точки Лебега образуют на «диагонали» $\{\{t, s\} \in \Pi \times \Pi : t = s\}$ множество полной меры относительно n-мерной «диагональной» меры Лебега $(i = 0, 1, 2)$.

На первый взгляд условия $(\mathbf{G})$ могут показаться неконструктивными. Однако на самом деле эти условия часто выполняются и сравнительно легко проверяются. О возможностях проверки условий $(\mathbf{G})$ в конкретных задачах см. п. 3.6. Конкретные примеры проверки этих условий см. в разделе 4.

Из сказанного выше получаем, что справедливы следующие НУО особых управлений ППМ в случае полного (и сильного) вырождения ППМ.

Теорема 10. *Пусть* v_0 — L_1^s*-локальное решение задачи* (3) *и полностью вырожденное ОУ для ППМ. Если выполняются условия* (**P**) *и* (**G**), *то*

$$\text{для каждого } \mathbf{w} \in U \text{ при почти всех } \tau \in \Pi : \quad \delta^{2n} J(\tau, \mathbf{w}) = E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leqslant 0.$$

Полное вырождению ППМ для ОУ v_0 означает, что сечения $\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{v} \in U : \{t, \mathbf{v}\} \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M} \equiv \{\{t, \mathbf{v}\} \in \Pi \times U : \pi(t, \mathbf{v}) = 0\}$ совпадают с множеством U при почти всех $t \in \Pi$.

В общем случае мы говорим, что ППМ вырождается на решении v_0 задачи (3) и это решение v_0 есть ОУ для ППМ, если

$$\operatorname{mes}\{t \in \Pi : \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0. \tag{25}$$

Покажем, что в этом случае v_0 — ОУ для более общего способа одноточечного игольчатого варьирования, чем простейшее одноточечное игольчатое варьирование. Действительно, функция $\pi(t, \mathbf{v})\colon \Pi \times \overline{U} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}\colon \Pi \to 2^{\overline{U}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых сечений (см. [24, п. 8.1.5]) $\mathcal{K} \equiv \{v_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. у множества Π существует подмножество Π_0 полной меры такое, что

$$\overline{\mathcal{M}(t)} = \overline{\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} \{v_k(t)\} \right\}}, \quad t \in \Pi_0.$$

Обозначим через Π_l ту часть множества Π_0, каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot, v_k(\cdot))$ для любой функции $v_k(\cdot)$ семейства $\mathcal{K}$. Очевидно, что $\operatorname{mes}\Pi_l = \operatorname{mes}\Pi$. Пусть Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, v_k\}$, в каждом из которых v_k — какой-то элемент $\mathcal{K}$, а τ — некоторая точка множества Π_l. Каждой паре $h \equiv \{\varepsilon, \sigma\}$, в которой $\varepsilon > 0$, $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$, отвечает допустимое управление $v_h(t) \equiv v_{\{\varepsilon,\sigma\}}(t)$, $t \in \Pi$, определяемое формулой

$$v_h(t) \equiv \{v_k(t),\ t \in \Pi \cap \Pi_\varepsilon(\tau); v_0(t),\ t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}, \quad \varepsilon > 0, \quad \sigma = \{\tau, v_k\} \in \Sigma,$$

а каждому набору параметров (варьирования) $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$ — семейство функций $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\varepsilon,\sigma\} \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma}$, одноточечная игольчатая варианта управления v_0. Легко проверяется, что этот способ варьирования принадлежит семейству $\mathcal{P}$ и для него $\gamma_0 = n$. Для такого способа варьирования первая вариация

$$\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^n} \Delta_{v_h} J \right)$$

при любом $\sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$ существует и равна $\pi(\tau, v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для v_0 имеем $\delta J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$, т.е. v_0 — ОУ для указанного способа одноточечного игольчатого варьирования, назовем его *общим способом одноточечного игольчатого варьирования.*

При условиях (**P**) для общего способа одноточечного игольчатого варьирования из теоремы 8 получаем: $\Delta_{v_h} J = O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon \to 0$ ($\sigma \in \Sigma$). Значит, если $n > 1$, то v_0 — сильно вырожденное особое управление для этого способа варьирования. Если выполняются условия (**P**) и (**G**), то для общего способа одноточечного игольчатого варьирования получаем из (24) при любом $n \geqslant 1$:

$$\delta^{2n} J(\sigma) = E(\tau, \tau; v_k(\tau), v_k(\tau)) \text{ для всех } \sigma \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma.$$

Таким образом, справедливы следующие НУО порядка $n+1$, обобщающие условия теоремы 10.

Теорема 11. *Пусть* v_0 — L_1^s*-локальное решение задачи* (3) *и имеет место* (25). *Если выполняются условия* (**P**) *и* (**G**), *то*

$$E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leqslant 0 \text{ для каждого } \mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau) \text{ при почти всех } \tau \in \Pi.$$

3.6. Бисопряженные уравнения. В более подробной записи уравнения (15) ($i = 0, 1$) и (16) имеют, соответственно, вид

$$\eta(t,s) - (I_m^* \otimes A^*)\Big[\eta(t,s) \cdot \{f_{\mathbf{p}}'(s)\}^*\Big] - (A^* \otimes I_m^*)\Big[\{f_{\mathbf{p}}'(t)\}^* \cdot \eta(t,s)\Big] + \\ + (A^* \otimes A^*)\Big[\{f_{\mathbf{p}}'(t)\}^* \cdot \eta(t,s) \cdot \{f_{\mathbf{p}}'(s)\}^*\Big] = \Theta_i(t,s)(t, s \in \Pi), \quad i = 0, 1, \tag{26}$$

$$\eta(t,s) - (A^* \otimes I^*_{ml})\Big[\{f'_{\mathbf{p}}(t)\}^* \cdot \eta(t,s)\Big] = \Theta_0(t,s), \quad t,s \in \Pi. \tag{27}$$

Здесь каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной t», а каждый второй сомножитель — «по переменной s», I^*_m есть тождественный оператор в L^m_∞.

В конкретных задачах условия $(\mathbf{G})$ часто сравнительно легко проверяются. При этом удобно бывает воспользоваться тем, что уравнения (5), (26), (27) имеют вид

$$Z(\theta) - L[Z(\cdot)](\theta) = \Theta(\theta), \quad \theta \in Q, \tag{28}$$

где оператор $L \in \mathfrak{L}(L^r_\infty(Q), L^r_\infty(Q))$ квазинильпотентен. Поэтому, если некоторое замкнутое в $L^r_\infty(Q)$, инвариантное относительно L множество M содержит функцию $\Theta(\cdot)$, то и $L^r_\infty(Q)$-решение уравнения (28) принадлежит множеству M. Так, например, в задачах оптимизации гиперболических и сосредоточенных систем с терминальными и интегральными функционалами функции $\Theta_i(\cdot)$ $(i = 0,1,2)$ обычно непрерывны везде на $\Pi \times \Pi$ за исключением, быть может, конечного числа фиксированных гиперповерхностей разрыва типа конечного скачка. Уравнения (26), (27) позволяют доказать, что таковы же и функции $\eta_i(\cdot)$ $(i = 0,1,2)$, а это означает выполнение условий $(\mathbf{G})$ (см. примеры ниже).

4. Примеры. Применение полученных выше результатов к конкретной задаче оптимизации начинается с того, что рассматриваемая УНКЗ, решение которой ищется в заданном функциональном классе $W(\Pi)$, некоторой заменой $(\star)$, связанной, как правило, с обращением главной части УНКЗ, сводится к эквивалентному уравнению (1); наличие эквивалентного ВФУ вида (1) гарантирует справедливость для УНКЗ теоремы единственности решения: никакому управлению из класса допустимых не может отвечать более одного решения УНКЗ класса $W(\Pi)$. Той же заменой $(\star)$ к виду (3) преобразуется функционал качества. При этом класс Ω совпадает с множеством тех управлений v из класса допустимых $\mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное в $W(\Pi)$ решение x_v УНКЗ. Обратная замена позволяет переписать результаты в терминах исходной оптимизационной задачи.

Проиллюстрируем сказанное конкретными примерами, приняв следующие соглашения: функции $g(t,\mathbf{p},\mathbf{v})\colon \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, задающие правые части рассматриваемых ниже дифференциальных уравнений, дважды дифференцируемы по $\mathbf{p}$ для всех $\mathbf{v}$ при почти всех t и вместе с производными $g'_{\mathbf{p}}$, $g''_{\mathbf{pp}}$ измеримы по t для всех $\{\mathbf{p},\mathbf{v}\}$ и непрерывны по $\{\mathbf{p},\mathbf{v}\}$ для почти всех t, а также удовлетворяют условиям типа $(\mathbf{N})$, что гарантирует выполнение указанных выше условий $(\mathbf{N})$ для соответствующих (т.е. эквивалентных рассматриваемым УНКЗ) уравнений (1); $\mathcal{D} \equiv \{v \in L^s_\infty : v(t) \in U,\ t \in \Pi\}$, $U \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченное множество; $x_v(\cdot)$ — отвечающее управлению $v(\cdot) \in \Omega$ глобальное решение УНКЗ; $v_0(\cdot)$ — L^s_1-локальное решение рассматриваемой оптимизационной задачи; $x_0(\cdot) \equiv x_{v_0}(\cdot)$; $z_0(\cdot)$ — решение эквивалентного рассматриваемой УНКЗ уравнения (1), отвечающее управлению v_0; $G(\cdot) \in C_2(\mathbb{R}^m)$ — заданная функция; $W^1_p(\Pi)$ — соболевское пространство, состоящее из всех элементов $L_p(\Pi)$, имеющих обобщенные производные первого порядка по всем независимым переменным, принадлежащие $L_p(\Pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; используется тот же «принцип сокращений в обозначениях», что и выше: $g(t)$ — правая часть уравнения, в которой $x(t)$ заменено на $x_0(t)$, а $v(t)$ — на $v_0(t)$ (аналогичный смысл имеют $g'_{\mathbf{p}}(t)$ и $g''_{\mathbf{pp}}(t)$), $\Delta_{\mathbf{w}} g(t)$ — разность, где уменьшаемое равно правой части уравнения, в которой $x(t)$ заменено на $x_0(t)$, $v(t)$ — на некоторый элемент $\mathbf{w}$ множества U, а вычитаемое — это $g(t)$ (аналогичный смысл имеют $\Delta_{\mathbf{w}} g'_{\mathbf{p}}(t)$ и $\Delta_{\mathbf{w}} g''_{\mathbf{pp}}(t)$).

4.1. Оптимизационная задача для полулинейного волнового уравнения. Пусть $n = 2$, $\Pi = [0,1]^2$, $l = m = 1$, $s = 1$ и управляемая система описывается смешанной задачей для полулинейного волнового уравнения

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv x''_{t^1t^1} - x''_{t^2t^2} = g(t, x(t), u(t)), \quad t \in \Pi, \tag{29}$$

$$x(0,t^2) = w_1(t^2), \quad x'_{t^1}(0,t^2) = w_2(t^2), \quad t^2 \in [0,1], \tag{30}$$

$$x'_{t^2}(t^1,0) = 0, \quad x'_{t^2}(t^1,1) = 0, \quad t^1 \in [0,1]. \tag{31}$$

Здесь w_1 и w_2 — заданные функции, соответственно из класса $AC_\infty([0,1])$ абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций с ограниченной производной и класса $L_\infty([0,1])$. Будем рассматривать обобщенные из $W^1_\infty(\Pi)$ решения задачи (29)—(31). Перед тем как дать определение решения УНКЗ (29)—(31), рассмотрим волновое уравнение

$$\mathcal{L}[x](t) = z(t), \quad t \in \Pi, \tag{32}$$

где $z(\cdot) \in L_\infty$, и смешанную задачу (30)—(32). Положим для любых x, $\eta \in W^1_2(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$:

$$\mathcal{J}[x,\eta,z] \equiv \int\limits_\Pi (-x'_{t^1}\eta'_{t^1} + x'_{t^2}\eta'_{t^2} - z\eta)dt - \int\limits_0^1 \eta(0,\xi)w_2(\xi)d\xi.$$

Функцию $x(\cdot) \in W^1_2(\Pi)$ назовем обобщенным решением задачи (30)—(32), если для нее $x(0,t^2) = w_1(t^2)$, $t^2 \in [0,1]$ и для любой функции $\eta \in W^1_2(\Pi)$, удовлетворяющей условию

$$\eta(1,t^2) = 0, \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1, \tag{33}$$

выполняется равенство $\mathcal{J}[x,\eta,z] = 0$. Из результатов [36, гл. 5, § 2] следует, что задача (30)—(32) для любого $z \in L_\infty$ имеет единственное решение в $W^1_2(\Pi)$. Непосредственным вычислением проверяется, что это решение, как и в классическом случае, задается формулой Даламбера (см. (34)—(36)). Для удобства ее записи обозначим через $e_\zeta[y]$ четное и с периодом 2 по переменной ζ продолжение на всю действительную ось ζ функции y, заданной первоначально (как функция переменной ζ) на отрезке $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$; если величина y не зависит ни от каких других переменных кроме ζ, то вместо $e_\zeta[y]$ пишем $e[y]$. Например: в приведенной ниже формуле (35) $e[w_1](\cdot)$ — четное и с периодом 2 продолжение на всю действительную ось определенной на отрезке $[0,1]$ функции $w_1(\cdot)$; в формуле (36) $e_{\xi^2}[z](\xi)$ — четное и с периодом 2 по переменной ξ^2 продолжение на всю полосу $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \xi^1 \leqslant 1\}$ функции $z(\xi)$, заданной на квадрате $\Pi \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \xi^1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \xi^2 \leqslant 1\}$. Решение задачи (30)—(32) записывается в виде

$$x(t) = \Theta(t) + A[z](t), \quad t \in \Pi, \tag{34}$$

где

$$\Theta(t) \equiv \frac{1}{2}\{e[w_1](t^2+t^1) + e[w_1](t^2-t^1)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{t^2-t^1}^{t^2+t^1} e[w_2](\zeta)d\zeta, \tag{35}$$

$$A[z](t) \equiv \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(t)} e_{\xi^2}[z](\xi)d\xi^1 d\xi^2, \quad t \in \Pi, \tag{36}$$

$$\Delta(t) \equiv \Big\{\xi \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant \xi^1 \leqslant t^1,\ t^2 - (t^1 - \xi^1) \leqslant \xi^2 \leqslant t^2 + (t^1 - \xi^1)\Big\}; \tag{37}$$

$\Delta(t)$ — часть характеристического конуса уравнения (32) с вершиной $t = \{t^1, t^2\}$, лежащая в полосе $[0 \leqslant \xi^1 \leqslant t^1] \times (-\infty < \xi^2 < +\infty)$. Из (34)—(36) следует, что решение (30)—(32) принадлежит классу $W^1_\infty(\Pi)$. Пусть $W(\Pi)$ — класс функций $x(\cdot) \in W^1_\infty(\Pi)$, каждая из которых при некотором $z \in L_\infty(\Pi)$ является решением (30)—(32), т.е. представима в виде (34).

Приведем УНКЗ (29)—(31) к эквивалентному ВФУ вида (1), пользуясь тем, что формула (34) (играющая в данном случае роль формулы замены ($\star$)) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_∞ функций $z(\cdot)$ и классом $W(\Pi)$ функций $x(\cdot)$ из пространства W^1_∞, удовлетворяющих условиям (30)—(31).

Обобщенным решением задачи (29)—(31), отвечающим данному $u(\cdot) \in \mathcal{D}$, назовем такую функцию $x(\cdot)$ из $W^1_\infty(\Pi)$, для которой при любой функции $\eta \in W^1_2(\Pi)$, удовлетворяющей условию (33), имеем $\mathcal{J}[x(\cdot), \eta(\cdot), g(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))] = 0$. Если функция $x(\cdot)$ является решением (29)—(31), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{D}$, то она удовлетворяет задаче (30)—(32) при $z(t) = g(t, x(t), u(t))$, $t \in \Pi$, и, следовательно, принадлежит классу $W(\Pi)$. Так как при этом $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ связаны формулой (34), то $z(\cdot)$ удовлетворяет на Π интегральному уравнению

$$z(t) = g(t, \Theta(t) + A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi. \tag{38}$$

Пусть, наоборот, некоторая функция $\tilde{z}(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$ удовлетворяет на Π уравнению (38) при данном $u(\cdot)$. Тогда связанная с ней формулой (34) функция $\tilde{x}(\cdot)$ принадлежит классу $W(\Pi)$, являясь при $z \equiv \tilde{z}$ решением задачи (30)—(32). Но так как $\tilde{z}(t) = g(t, \tilde{x}(t), u(t))$, $t \in \Pi$, то функция $\tilde{x}(\cdot)$ является решением (29)—(31), отвечающим управлению $u(\cdot)$. Таким образом, для каждого фиксированного $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ задача (29)—(31) эквивалентна рассматриваемому над $L_\infty(\Pi)$ интегральному уравнению (38), а связь между их решениями задается формулой (34). Уравнение (38) это уравнение вида (1), в котором

$$f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv g(t, \Theta(t) + \mathbf{p}, \mathbf{v}), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}.$$

Легко проверяются условия (**a**), (**b**), (**c**), в качестве мажоранты B подходит сам оператор A; для соответствующего оператора B_∞ при любом $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой является, например, дополненная пустым множеством система прямоугольников

$$\Big\{\big\{t \in \mathbb{R}^2 : [0 \leqslant t^1 \leqslant i/(K+1)] \times [0 \leqslant t^2 \leqslant 1]\big\},\ i = 1, 2, \ldots, K+1\Big\},$$

где K — целая часть числа $3/\delta$.

Рассмотрим для УНКЗ (29)—(31) оптимизационную задачу

$$J[v] \equiv \int\limits_0^1 G(x_v(1, t^2))dt^2 \to \max, \quad v \in \Omega.$$

Эта задача заменой (34) приводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида (3) для уравнения (38), в которой

$$F[z] \equiv \int\limits_0^1 G(\Theta(1, t^2) + A[z](1, t^2))dt^2, \quad z \in L_1.$$

Здесь выполняется условие (ii) теоремы 6. Положив

$$\nabla(t) \equiv \Big\{\xi \in \mathbb{R}^2 :\ t^1 \leqslant \xi^1 \leqslant 1,\ t^2 + t^1 - \xi^1 \leqslant \xi^2 \leqslant t^2 - t^1 + \xi^1\Big\}, \quad t \in \Pi,$$

имеем

$$A^*[z](t) \equiv \frac{1}{2} \iint\limits_{\nabla(t)} e_{\xi^2}[z](\xi) d\xi^1 d\xi^2, \quad t \in \Pi, \quad z \in L_\infty,$$

$$\omega(t) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{t^2+t^1-1}^{t^2-t^1+1} G'(e_\zeta[x_0(1, \zeta)](\zeta))d\zeta, \quad t \in \Pi.$$

Из (5) следует, что ψ непрерывна и является слабым $W_2^1(\Pi)$-решением задачи

$$\mathcal{L}[\psi](t) = g'_{\mathbf{p}}(t)\psi(t), \quad t \in \Pi;$$

$$\psi'_{t^2}(t^1, 0) = \psi'_{t^2}(t^1, 1) = 0, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1;$$

$$\psi(1, t^2) = 0, \quad \psi'_{t^1}(1, t^2) = -G'(x_0(1, t^2)), \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1.$$

Находим:

$$\Theta_0(t, s) = \frac{1}{4} \int\limits_{\mathbb{R}} G''(e_\zeta[x_0(1, \zeta)](\zeta)) \cdot \chi_{\nabla(t)}(1, \zeta) \cdot \sum_{i=0}^{1} \{\chi_{\nabla(s)}(1, \zeta - 2i) + \chi_{\nabla(s)}(1, -\zeta + 2i)\} d\xi,$$

$$\Theta_2(t, s) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{1} \{\chi_{\nabla(s)}(t^1, t^2 + 2i) + \chi_{\nabla(s)}(t^1, 2i - t^2)\},$$

$$\Theta_1(t,s)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{1}\{\sigma(t^1,t^2+2i;s^1,s^2+2j)+\sigma(t^1,2i-t^2;s^1,s^2+2j)+$$
$$+\sigma(t^1,t^2+2i;s^1,2j-s^2)+\sigma(t^1,2i-t^2;s^1,2j-s^2)\},\quad t,s\in\Pi,$$

где

$$\sigma(t,s)\equiv\int\limits_{\Pi}\psi(\xi)\cdot g''_{\mathbf{pp}}(\xi)\cdot\chi_{\nabla(t)}(\xi)\cdot\chi_{\nabla(s)}(\xi)d\xi\quad(t,s\in\Pi).$$

Функции Θ_0, Θ_1 непрерывны на $\Pi\times\Pi$. Функция Θ_2 непрерывна везде на $\Pi\times\Pi$ за исключением границ тел

$$I_1\equiv\{\{t,s\}\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:t\in\Delta(s)\},$$
$$I_2\equiv\{\{t,s\}\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:\{t^1,-t^2\}\in\Delta(s)\},$$
$$I_3\equiv\{\{t,s\}\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2:\{t^1,2-t^2\}\in\Delta(s)\},$$

где она терпит разрывы типа конечного скачка (говорим, что функция Θ имеет в точке границы некоторого тела $\Delta\subset\Pi\times\Pi$ конечный скачок, если в этой точке существуют различные конечные пределы Θ по внутренности $\overset{\circ}{\Delta}$ множества Δ и по множеству $(\Pi\times\Pi)\setminus\Delta)$, причем $\Theta_2(t,s)=0$, $t\notin\Delta(s)$. Пользуясь сказанным в п. 3.6, получаем, что уравнения (26), которые в данном случае записываются в виде

$$\eta(t,s)-\frac{1}{2}\int\limits_{\nabla(t)}e_{\xi^2}[\eta(\xi,s)]d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\nabla(s)}e_{\xi^2}[\eta(t,\xi)]d\xi+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_{\nabla(t)}d\xi\int\limits_{\nabla(s)}e_{\xi^2}[e_{\tau^2}[\eta(\xi,\tau)]]d\tau=\Theta_i(t,s),\quad t,s\in\Pi,\quad i=1,2,$$

имеют непрерывные на $\Pi\times\Pi$ решения η_i $(i=0,1)$, а решение $\eta_2(t,s)$ уравнения (27), имеющего вид

$$\eta(t,s)-\frac{1}{2}\int\limits_{\nabla(t)}e_{\xi^2}[\eta(\xi,s)]d\xi=\Theta_2(t,s),\quad t,s\in\Pi,$$

непрерывно везде на $\Pi\times\Pi$ вне границ ∂I_1, ∂I_2, ∂I_3, на которых оно может иметь лишь разрывы типа конечного скачка, причем $\eta_2(t,s)=0$, если $t\notin\Delta(s)$. Это означает, что выполняются условия ($\mathbf{G}$). При этом условию ($\mathbf{G}_2$) удовлетворяет та функция из соответствующего класса эквивалентности, для которой

$$\eta_2(\tau,\tau)=\lim_{t\to\tau,s\to\tau,t\in\Delta(s)}\left\{\frac{1}{4}\eta_2(t,s)\right\}$$

при почти всех $\tau\in\Pi$. По теореме 9, если v_0 — ОУ для ППМ, то в рассматриваемой задаче из получаемых игольчатым варьированием НУО вырождаются все НУО до порядка 2 включительно и содержательны, вообще говоря, лишь НУО теорем 10 и 11, имеющие третий порядок.

4.2. Оптимизационная задача для системы Гурса—Дарбу. Пусть $n=2$, $\Pi=[0,1]^2$, $l=3m$ и управляемая система описывается краевой задачей Гурса—Дарбу

$$x''_{t^1t^2}=g(t,x,x'_{t^1},x'_{t^2},v(t)),\quad t\equiv\{t^1,t^2\}\in\Pi,\tag{39}$$
$$x(t^1,0)=w_1(t^1),\quad 0\leqslant t^1\leqslant 1;\quad x(0,t^2)=w_2(t^2),\quad 0\leqslant t^2\leqslant 1,\tag{40}$$

где w_1, w_2 — такие фиксированные функции из класса $AC^m_\infty([0,1])$, что $w_1(0)=w_2(0)$; $g(t,\mathbf{p},\mathbf{v})\equiv g(t,\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{v})$, $\mathbf{p}_i\in\mathbb{R}^m$ $(i=0,1,2)$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^s$. Решение задачи (39), (40) понимаем в смысле почти всюду и ищем в классе $W(\Pi)$ всех удовлетворяющих условиям (40) абсолютно непрерывных на Π m-вектор-функций с ограниченными первыми и смешанной производными. Формула

$$x(t) = w_1(t^1) + w_2(t^2) - w_1(0) + \int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi)d\xi^1 d\xi^2 \tag{41}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями $z(\cdot)$ из пространства L_∞^m и функциями $x(\cdot)$ из класса $W(\Pi)$. Используя (41) как формулу замены ($\star$), приводим УНКЗ (39), (40) к эквивалентному уравнению вида (1) над пространством L_∞^m, при этом

$$f(t,\mathbf{p},\mathbf{v}) \equiv f(t,\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{v}) = g(t, w_1(t^1)+w_2(t^2)-w_1(0)+\mathbf{p}_0, w_1'(t^1)+\mathbf{p}_1, w_2'(t^2)+\mathbf{p}_2,\mathbf{v}),$$

$$A[z](t) \equiv \{A_{(0)}[z](t), A_{(1)}[z](t), A_{(2)}[z](t)\} \equiv \left\{\int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi)d\xi^1 d\xi^2, \int_0^{t^2} z(t^1,\xi)d\xi, \int_0^{t^1} z(\xi,t^2)d\xi\right\}.$$

Проверяем условия (**a**), (**b**), (**c**): в качестве мажоранты B подходит оператор, задаваемый формулой

$$B[z](t) \equiv \int_0^{t^1}\int_0^{t^2} z(\xi)d\xi^1 d\xi^2 + \int_0^{t^2} z(t^1,\xi)d\xi + \int_0^{t^1} z(\xi,t^2)d\xi, \quad t\in\Pi, \quad z\in L_1;$$

как для этого оператора B, так и для соответствующего оператора B_∞ вольтеррова δ-цепочка при любом $\delta > 0$ легко набирается, например, из множеств $H_\alpha \equiv \{t\in\Pi : 0 \leqslant t^1+t^2 \leqslant \alpha\}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 2$; из упомянутого выше признака квазинильпотентности [61, Теорема 2] следует квазинильпотентность операторов B и B_∞.

Для управляемой системы Гурса—Дарбу (39), (40) рассмотрим терминальную задачу оптимизации

$$J[v] \equiv G(x_v(1,1)) \to \max, \quad v\in\Omega. \tag{42}$$

Эта задача заменой (41) приводится к эквивалентной оптимизационной задаче вида (3), в которой

$$F[z] \equiv G\left(w_1(1)+w_2(1)-w_1(0)+\int_0^1\int_0^1 z(\xi)d\xi^1 d\xi^2\right), \quad z\in L_1^m.$$

Сопряженное уравнение (5) имеет вид

$$\psi(t) - A^*[\{g'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^*\psi(\cdot)](t) = (G'(x_0(1,1)))^*, \quad t\in\Pi, \tag{43}$$

где $g'_{\mathbf{p}}(t) \equiv g'_{\mathbf{p}}(t, x_0(t), x'_{0t^1}(t), x'_{0t^2}(t), v_0(t))$, $t\in\Pi$, A^* — сопряженный к оператору A как элементу класса $\mathfrak{L}(L_1^m, L_1^l)$,

$$A^*[z](t) \equiv A^*_{(0)}[z^{(0)}](t) + A^*_{(1)}[z^{(1)}](t) + A^*_{(2)}[z^{(2)}](t), \quad t\in\Pi,$$

$$A^*_{(0)}[z^{(0)}](t) \equiv \int_{t^1}^1\int_{t^2}^1 z^{(0)}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \quad A^*_{(1)}[z^{(1)}](t) \equiv \int_{t^2}^1 z^{(1)}(t^1,\xi)d\xi,$$

$$A^*_{(2)}[z^{(2)}](t) \equiv \int_{t^1}^1 z^{(2)}(\xi,t^2)d\xi, \quad z=\{z^{(0)},z^{(1)},z^{(2)}\}\in L_\infty^m\times L_\infty^m\times L_\infty^m.$$

Для задачи (3), эквивалентной задаче (42), условие (ii) теоремы 6, которое выполнялось в предыдущем примере раздела 4, может и не выполняться. Оно, очевидно, выполняется лишь в том случае, когда правая часть уравнения (39) не зависит от производных. Однако непосредственно из теорем 6 и 9 получаем, например, следующий результат: если L_1^s-локальное решение задачи (42) v_0 является полностью вырожденным ОУ для ППМ, то при условии, что правая часть уравнения (39) зависит от производных аффинно и они в ней аддитивно отделены от управления, т.е.

$$g(t,\mathbf{p},\mathbf{v}) \equiv g_1(t,\mathbf{p}_0)\mathbf{p}_1 + g_2(t,\mathbf{p}_0)\mathbf{p}_2 + g_0(t,\mathbf{p}_0,\mathbf{v}) \quad (g_i - (m\times m)\text{-матрицы-функции}), \tag{44}$$

из НУО, полученных простейшим игольчатым варьированием управления v_0, вырождаются все условия до порядка 2 включительно и содержательными могут быть лишь НУО порядка, большего 2 (т.е. в этом случае v_0 есть сильно вырожденное ОУ для ППМ).

Чтобы для задачи (42) в случае (44) рассмотреть вопрос о НУО сильно вырожденных ОУ ППМ, предположим дополнительно, что выполняются следующие условия

Условия (j). Функция $g_1(t,\mathbf{p}_0)$ (соотв. $g_2(t,\mathbf{p}_0)$) непрерывна по t^1 (соотв. по t^2) для каждого $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^m$ при почти всех t^2 (соотв. t^1).

Покажем, что при этом условии для задачи (3), эквивалентной задаче (42), выполняются условия (**G**), а следовательно, к ней применимы теоремы 10 и 11, дающие в данном случае НУО порядка 3. Непосредственно по определению матриц Θ_i находим: $\Theta_0(t,s) \equiv 2^{-1}G''(x_0(1,1))$;

$$\Theta_1(t,s) \equiv 2^{-1}\left\{ \int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1} \int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1} \Xi_{00}(\xi)d\xi + \mathfrak{K}(s^1-t^1) \int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1} \Xi_{01}(s^1,\xi^2)d\xi^2 + \right.$$

$$+ \mathfrak{K}(s^2-t^2) \int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1} \Xi_{02}(\xi^1,s^2)d\xi^1 + \mathfrak{K}(t^1-s^1) \int\limits_{\max\{t^2,s^2\}}^{1} \Xi_{10}(t^1,\xi^2)d\xi^2 +$$

$$\left. + \mathfrak{K}(t^2-s^2) \int\limits_{\max\{t^1,s^1\}}^{1} \Xi_{20}(\xi^1,t^2)d\xi^1 \right\} \quad (t,s\in\Pi),$$

где $\mathfrak{K}(\cdot)$ — функция Хевисайда,

$$\Xi_{ij}(t) \equiv \left\{\langle\psi(t), g(t,\mathbf{p},u_0(t))\rangle_m\right\}''_{\mathbf{p}_i\mathbf{p}_j}\Big|_{\mathbf{p}=\left\{x_0(t),{x_0}'_{t^1}(t),{x_0}'_{t^2}(t)\right\}}, \ i,j=0,1,2, \quad t\in\Pi;$$

$$\Theta_2(t,s) \equiv \left(\Theta_2^{ij}(t,s)\right), \ 1\leqslant i\leqslant m, \ 1\leqslant j\leqslant 3m^2 (t,s\in\Pi),$$

где

$$\Theta_2^{ij}(t,s) = \begin{cases} \psi^{j-(i-1)m}(s)\mathfrak{K}(s^1-t^1)\mathfrak{K}(s^2-t^2), & \text{если } (i-1)m+1\leqslant j\leqslant im \\ 0, & \text{если } j\leqslant(i-1)m \text{ или } j>im \end{cases}.$$

Воспользуемся соображениями п. 3.6. Формулы $K[z](t) \equiv g'_{\mathbf{p}}(t)A[z](t)$, $S[z](t) \equiv z(t) - K[z](t)$, $z\in L_1^m$, $t\in\Pi$, задают операторы K, $S \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$. Левая часть (43) равна $S^*[\psi](t) \equiv \psi(t) - K^*[\psi](t)$, $t\in\Pi$, причем оператор $K^*\in\mathfrak{L}(L_\infty^m, L_\infty^m)$ квазинильпотентен. Так как замкнутое в L_∞^m, инвариантное (в силу условия (**j**)) относительно K^* подпространство $C^m(\Pi)$ содержит функцию-постоянную, стоящую в правой части (43), то и L_∞^m-решение ψ уравнения (5) принадлежит $C^m(\Pi)$. Из приведенных выше формул следует, что $\Theta_1(t,s)$ непрерывна на $\Pi\times\Pi$, а $\Theta_2(t,s)$ непрерывна везде на $\Pi\times\Pi$ за исключением, может быть, точек границы тела $\Delta \equiv \{\{t,s\}\in\Pi\times\Pi : s^1 \geqslant t^1, \ s^2\geqslant t^2\}$, в которых возможен ее конечный скачок. Таким образом, Θ_0, $\Theta_1 \in L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$, $\Theta_2\in L_\infty^{m\times 3m^2}(\Pi\times\Pi)$.

Вид уравнений (26), (27) позволяет утверждать, что функции $\eta_0(t,s)$ и $\eta_1(t,s)$ непрерывны на $\Pi\times\Pi$, а функция $\eta_2(t,s)$ кусочно непрерывна на $\Pi\times\Pi$, причем она может иметь лишь разрывы типа конечного скачка в точках границы тела Δ, вне которого она равна нулю. Действительно, уравнение (26) представимо в виде

$$\eta(t,s) - \mathcal{A}^*[\eta](t,s) = \Theta_i(t,s), \quad t\in\Pi, \quad s\in\Pi,$$

где оператор

$$\mathcal{A}^* \equiv (K\otimes I_m + I_m\otimes K - K\otimes K)^* \in \mathfrak{L}\big(L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi), L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)\big)$$

(здесь I_k — тождественный оператор в L_1^k) квазинильпотентен. Замкнутое подпространство $C^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ пространства $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ (в силу условия (**j**)) и содержит функции Θ_i $(i=0,1)$, поэтому $L_\infty^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$-решение уравнения (26) и при $i=0$ и при $i=1$ принадлежит $C^{m\times m}(\Pi\times\Pi)$. Уравнение (27) представимо в виде

$$\eta(t,s)-\mathcal{B}^*[\eta](t,s)=\Theta_2(t,s),\quad t\in\Pi,\quad s\in\Pi,$$

где оператор

$$\mathcal{B}^*\equiv(K\otimes I_{3m^2})^*\in\mathfrak{L}\big(L_\infty^{m\times3m^2}(\Pi\times\Pi),L_\infty^{m\times3m^2}(\Pi\times\Pi)\big)$$

квазинильпотентен. Множество $\mathcal{G}$ функций, кусочно непрерывных на $\Pi\times\Pi$ с единственно возможными разрывами типа конечного скачка в точках границы тела Δ и равных нулю вне этого тела, замкнуто в $L_\infty^{m\times3m^2}(\Pi\times\Pi)$, инвариантно относительно $\mathcal{B}^*$ (в силу условия (**j**)) и содержит функцию $\Theta_2(t,s)$. Поэтому $L_\infty^{m\times3m^2}(\Pi\times\Pi)$-решение $\eta_2(t,s)$ уравнения (27) также принадлежит $\mathcal{G}$. Далее будем считать, что η_2 — тот представитель соответствующего класса эквивалентности, для которого

$$\eta_2(\tau,\tau)=\lim_{\{t,s\}\to\{\tau,\tau\},\ \{t,s\}\in\overset{\circ}{\Delta}}\frac{1}{4}\eta_2(t,s)$$

при почти всех $\tau\in\Pi$. Переходя к пределу в уравнении (27), находим, что для почти каждого $\tau\in\Pi$

$$\eta_2^{ij}(\tau,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\psi^{j-(i-1)m}(\tau), & \text{если } (i-1)m+1\leqslant j\leqslant im,\\ 0, & \text{если } j\leqslant(i-1)m \text{ или } j>im,\end{cases}\qquad 1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant 3m^2.$$

Сказанное означает, что при выполнении условия (**j**) выполняются и условия (**G**). При этом условию G_2 удовлетворяет указанный выше представитель класса эквивалентности η_2. Таким образом, при выполнении условия (**j**), в случае полного вырождения ППМ применима теорема 10, а в общем случае вырождения ППМ — теорема 11. При этом

$$E(\tau,\tau,\mathbf{w},\mathbf{w})=\big\langle\Delta_{\mathbf{w}}g(\tau),\Psi_1(\tau)\cdot\Delta_{\mathbf{w}}g(\tau)+\Psi_2(\tau)\cdot\big\{\Delta_{\mathbf{w}}g'_{0\mathbf{p}_0}(\tau)\big\}^0\big\rangle_m,\quad\tau\in\Pi,\quad\mathbf{w}\in U,$$

где $\Psi_1(\tau)\equiv\eta_0(\tau,\tau)+\eta_1(\tau,\tau)$, $\Psi_2(\tau)$ — $(m\times m^2)$-матрица, полученная отбрасыванием $2m^2$ последних столбцов $(m\times3m^2)$-матрицы $\eta_2(\tau,\tau)$, $\tau\in\Pi$; $\{\dots\}^0$ — m^2-столбец, полученный развертыванием $(m\times m)$-матрицы $X\equiv\{\dots\}$ по правилу $X^0=\{X_{11},X_{21},\dots,X_{mm}\}$ («столбец за столбцом»).

В заключение заметим, что изучению ОУ ППМ для терминальной задачи оптимизации системы Гурса—Дарбу с правой частью уравнения вида (44) посвящено немало работ (см., например, [8,10], [11, гл. 1,§ 2], [34, гл. 1, § 5], библиографию в [11,34], обзоры [14,33]). Однако известные автору данной статьи НУО ОУ для задачи (42), сходные с теоремами 10, 11 и полученные ранее другими авторами, касались случая определенной гладкости правой части уравнения (как правило, предполагалась непрерывность по совокупности переменных правой части и ее первых и вторых производных по «фазовым» переменным, см. [8, 10], [11, гл. 1, § 2], [34, гл. 1, § 5], обзоры [14, 33] и др.). Понятно, что НУО ОУ, полученные при одинаковых условиях разными методами, использующими один и тот же способ варьирования, эквивалентны и могут отличаться лишь формой записи. Поэтому, если вывод для задачи (42) некоторых НУО ОУ, получаемых простейшим одноточечным игольчатым варьированием (соотв. общим способом одноточечного игольчатого варьирования), требует большей предполагаемой нами степени гладкости правой части, то в случае, когда правая часть обладает этой большей степенью гладкости, НУО ОУ, полученные для задачи (42) из теоремы 10 (соотв. теоремы 11), могут быть переписаны в форме указанных НУО ОУ. В этом смысле НУО ОУ теорем 10, 11 применительно к задаче (42) обобщают известные сходные условия, относящиеся к случаю более гладких правых частей уравнений Гурса—Дарбу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. *Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990.
3. *Ащепков Л. Т., Васильев О. В.* Об оптимальности особых управлений в системах Гурса—Дарбу// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1975. — *15*, № 5. — С. 1157–1167.
4. *Ащепков Л. Т., Васильев О. В., Коваленок И. Л.* Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса—Дарбу// Диффер. уравн. — 1980. — *16*, № 6. — С. 1054–1059.
5. *Бурдуковский А. Н.* Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса—Дарбу// Управл. сист. (Новосибирск). — 1986. — № 26. — С. 16–24.
6. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. — Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977.
8. *Васильев О. В.* Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами// Управл. сист. (Новосибирск). — 1972. — № 10. — С. 27–34.
9. *Васильев О. В.* Об оптимальности особого управления в системах с распределенными параметрами// Тез. докл. II Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики. — Новосибирск, 1971. — С. 26–27.
10. *Васильев О. В.* Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Л.: ЛГУ, 1984.
11. *Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990.
12. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. Ч. II. — М.: Изд-во МЦНМО, 2011.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.. Мансимов К. Б.* Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. — Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1982.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967.
16. *Гусаренко С. А.* Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора// Докл. АН СССР. — 1987. — *295*, № 5. — С. 1046–1049.
17. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
19. *Жуковский Е. С.* К теории уравнений Вольтерра// Диффер. уравн. — 1989. — *25*, № 9. — С. 1599–1605.
20. *Жуковский Е. С., Алвеш М. Ж.* Абстрактные вольтерровы операторы// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 3. — С. 3–17.
21. *Забрейко П. П.* Об интегральных операторах Вольтерра// Усп. мат. наук. — 1967. — *22*, № 1. — С. 167–168.
22. *Забрейко П. П. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра* Лит. мат. сб. — 1967. — *7*, № 2. — С. 281–287.
23. *Зеликин М. И., Борисов В. Ф.* Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики// Совр. мат. прилож. — 2003. — *11*. — С. 3–161.
24. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
25. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
26. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
27. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.
28. *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Нелинейная управляемая задача Гурса—Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости// Диффер. уравн. — 2011. — *47*, № 6. — С. 858–870.
29. *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса—Дарбу// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Мат. Мех. Комп. наукию — 2015 25. — № 4. — С. 483–491.
30. *Лисаченко И. В., Сумин В. И.* Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса—Дарбу// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1264–1274.

31. *Лицына Е.* Линейные операторы Вольтерра в некоторых метрических пространствах// Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*, № 3. — С. 223–240.
32. *Мансимов К. Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами// Докл. АН СССР. — 1988. — *301*, № 3. — С. 546–550.
33. *Мансимов К. Б.* Особые управления в задачах управления системами с распределенными параметрами// Совр. мат. прилож. — 2006. — *42*. — С. 39–83.
34. *Мансимов К. Б., Марданов М. Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса—Дарбу. — Баку: Элм, 2010.
35. *Меликов Т. К.* Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Баку, 1976.
36. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
37. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
38. *Плотников В. И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида// Докл. АН СССР. — 1971. — *199*, № 2. — С. 275–278.
39. *Плотников В. И., Сумин В. И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве// Сиб. мат. ж. — 1981. — *22*, № 6. — С. 142–161.
40. *Срочко В. А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами// Сиб. мат. ж. — 1976. — *17*, № 5. — С. 1108–1115.
41. *Сумин В. И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Горький, 1975.
42. *Сумин В. И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами// Докл. АН СССР. — 1989. — *305*, № 5. — С. 1056–1059.
43. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч. 1. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
44. *Сумин В. И.* О функциональных вольтерровых уравнениях// Изв. вузов. Мат. — 1995. — № 9. — С. 67–77.
45. *Сумин В. И.* О расширении оптимизационных задач, связанных с функциональными уравнениями в пространствах существенно ограниченных функций// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. Оптим. управл. — 1998. — № 1 (18). — С. 126–133.
46. *Сумин В. И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. — 2003. — № 1. — С. 91–107.
47. *Сумин В. И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 1998. — № 2 (19). — С. 138–151.
48. *Сумин В. И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Н. Новгород: Нижегород. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 1998.
49. *Сумин В. И.* Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2010. — *15*, № 1. — С. 453–466.
50. *Сумин В. И.* Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2020. — *25*, № 132. — С. 422–440.
51. *Сумин В. И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1990. — *30*, № 1. — С. 3–21.
52. *Сумин В. И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 12. — С. 2097–2109.
53. *Сумин В. И.* Функционально-операторные уравнения Вольтерра и устойчивость существования глобальных решений краевых задач// Укр. мат. ж. — 1991. — *43*, № 4. — С. 555–561.
54. *Сумин В. И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения// Диффер. уравн. — 1986. — *22*, № 9. — С. 1587–1595.
55. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, I// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 1999. — № 2 (21). — С. 145–155.
56. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, II// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 2001. — № 1 (23). — С. 198–204.
57. *Сумин В. И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем, III// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 2002. — № 1 (25). — С. 164–174.

58. *Сумин В. И.* Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем// Мат. Международю конф. «Современные методы теории краевых задач. Воронеж. весенняя мат. школа Понтрягинские чтения–XXXII» (Воронеж, 3–9 мая 2021 г.). — Воронеж, 2021. — С. 239–242.
59. *Сумин В. И.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2018. — *23*, № 124. — С. 745–756.
60. *Сумин В. И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений// Тр. ИММ УрО РАН. — 2019. — *25*, № 1. — С. 262–278.
61. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность// Диффер. уравн. — 1998. — *34*, № 10. — С. 1402–1411.
62. *Сумин В. И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений// Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. техн. науки. — 2000. — *5*, № 4. — С. 493–495.
63. *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации// Докл. АН СССР. — 1991. — *320*, № 2. — С. 295–299.
64. *Сумин В. И.* Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем// Оптимизация. Сб. научн. тр. — 1993. — № 52 (69). — С. 74–94.
65. *Сумин В. И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Мат. Мех. Комп. науки. — 2010. — № 3. — С. 70–80.
66. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. — Деп. в ВИНИТИ 25.04.2000. № 1198-В00.
67. *Сумин В. И., Чернов А. В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений// Вестн. Нижегород. ун-та. Мат. модел. оптим. управл. — 2003. — № 1 (26). — С. 39–49.
68. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем// Тр. Междунар. конф. «Динамика систем и процессы управления», посв. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2014 г.). — Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 2015. — С. 293–300.
69. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — *1*, № 8. — С. 1–25.
70. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
71. *Крейн С. Г. (ред.).* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
72. *Чернов А. В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нижний Новгород, 2000.
73. *Чернов А. В.* О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — *58*, № 12. — С. 2095–2111.
74. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
75. *Шрагин И. В.* Абстрактные операторы Немыцкого — локально определенные операторы// Докл. АН СССР. — 1976. — *227*, № 1. — С. 47–49.
76. *Chernov A. V. On Volterra functional operator games on a given set* Automat. Remote Control. — 2014. — *75*, № 4. — P. 787–803.
77. *Corduneanu C.* Integral Equations and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
78. *Drakhlin M. E., Ponosov A., Stepanov E.* On some classes of operators determined by the structure of their memory// Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2002. — *45*, № 2. — P. 467–490.
79. *Drakhlin M. E., Litsyn E.* Volterra operator: Back to the future// J. Nonlin. Conv. Anal. — 2005. — *6*, № 3. — P. 375–391.
80. *Sumin V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems* IFAC-PapersOnLine. — 2018. — *51*, № 32. — P. 759–764.
81. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra// Bull. Calcutta Math. Soc. — 1929. — *20*. — P. 31–48.
82. *Väth M.* Abstract Volterra equations of the second kind// J. Equat. Appl. — 1998. — *10*, № 9. — P. 125–144.

Сумин Владимир Иосифович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
E-mail: `v_sumin@mail.ru`