ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 68–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-68-77

УДК 514.765

УРАВНЕНИЯ ВАЙНГАРТЕНА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ГРУППАХ ГЕЛЬМГОЛЬЦЕВА ТИПА

© 2024 г. В. А. КЫРОВ

Аннотация. В данной статье изучаются поверхности на трехмерных группа Ли гельмгольцева типа, которые задают действия групп движений гельмгольцевых геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности. В работе для этих групп Ли приводятся левоинвариантные метрики и связности Леви-Чивиты, которые были найдены ранее. Для поверхностей групп Ли гельмгольцева типа вычисляются порождающие их спиноры, которые удовлетворяют уравнениям Дирака и Вайнгартена. Выводятся также условия совместности для уравнений Вайнгартена.

Ключевые слова: группа Ли, поверхность на группе Ли, уравнение Дирака, уравнение Вайнгартена, уравнение Кодацци.

WEINGARTEN EQUATIONS FOR SURFACES ON HELMHOLTZ-TYPE GROUPS

© 2024 V. A. KYROV

Abstract. In this paper, we study surfaces on three-dimensional Helmholtz-type Lie groups that define the actions of groups of motions of Helmholtz geometries, which are geometries of local maximal mobility. In this paper, we present left-invariant metrics and Levi-Civita connections for these Lie groups, which were found earlier. For surfaces of Helmholtz-type Lie groups, we calculate the spinors that generate them, which satisfy the Dirac and Weingarten equations. We also derive compatibility conditions for the Weingarten equations.

Keywords and phrases: Lie group, surface on a Lie group, Dirac equation, Weingarten equation, Codazzi equation.

AMS Subject Classification: 53C30

1. Введение. Г. Г. Михайличенко были найдены следующие геометрии локальной максимальной подвижности (см. [6, с. 54]):

псевдогельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = \frac{(y_1 - y_2)^\beta}{(x_1 - x_2)^\alpha}; \tag{1}$$

собственно гельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right); \tag{2}$$

дуально-гельмгольцева геометрия:

$$f(1,2) = (x_1 - x_2) \exp \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \tag{3}$$

причем $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, f — функция пары точек (аналог евклидова расстояния) плоскости $\mathbb{R}^2$, а $1 = (x_1, y_1)$ и $2 = (x_2, y_2)$ — точки этой плоскости.

Группы движений этих геометрий, т.е. преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющих функции (1)–(3), являются подгруппами аффинной группы плоскости и задаются соответственно следующими уравнениями (см. [2–4]):

$$x' = e^{\alpha a}x + b, \qquad y' = e^{\beta a}y + c; \tag{4}$$

$$x' = xe^{-\gamma a}\cos a - ye^{-\gamma a}\sin a + b, \qquad y' = xe^{-\gamma a}\sin a + ye^{-\gamma a}\cos a + c; \tag{5}$$

$$x' = e^{a}x + b, \qquad y' = -ae^{a}x + e^{a}y + c, \tag{6}$$

причем a, b, c — параметры групп движений.

1.1. Матричные группы Ли и их алгебры Ли. Группы движений (4)–(6) можно рассмотреть как результат эффективного действия следующих неунимодулярных матричных групп Ли:

$$G_1 : \begin{pmatrix} e^{\alpha z} & 0 & x \\ 0 & e^{\beta z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$G_2 : \begin{pmatrix} e^{-\gamma z}\cos z & -e^{-\gamma z}\sin z & x \\ e^{-\gamma z}\sin z & e^{-\gamma z}\cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$G_3 : \begin{pmatrix} e^{z} & 0 & x \\ -ze^{z} & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где (x, y, z) — точка группы Ли, а α, β, γ — постоянные. Эти группы Ли в данной статье называются группами гельмгольцева типа. Заметим, что если в (7) допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то получится группа Sol (см. [1, 8, 9]).

Алгебры Ли групп Ли из списка (7)–(9) вычисляются просто. Их образующие e_1, e_2 и e_3 соответственно равны:

алгебра Ли AG_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\gamma & -1 & 0 \\ 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

алгебра Ли AG_3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый коммутатор для всех трех алгебр Ли нулевой, а остальные различные:

$$AG_1 : \quad [e_2, e_3] = -\beta e_2, \qquad [e_3, e_1] = \alpha e_1; \tag{10}$$

$$AG_2 : \quad [e_2, e_3] = e_1 + \gamma e_2, \quad [e_3, e_1] = e_2 - \gamma e_1; \tag{11}$$

$$AG_3 : \quad [e_2, e_3] = -e_2, \qquad [e_3, e_1] = e_1 - e_2. \tag{12}$$

Легко доказать неизоморфность и разрешимость этих алгебр Ли). Каждая из этих трех алгебр Ли является полупрямой суммой двумерного абелева радикала с образующими e_1 и e_2 и одномерной подалгебры с образующей e_3. Алгебры Ли AG_1–AG_3 изоморфны алгебрам Ли из классификации

Бианки трёхмерных вещественных алгебр Ли. Так, алгебра AG_1 изоморфна алгебре VI_a, $0 < |a| < 1$; для доказательства нужно перейти к новому базису

$$e_1 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3), \quad e_2 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3), \quad e_3 = \frac{\alpha}{a-1} f_1$$

при α и β разного знака и к базису

$$e_2 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3), \quad e_1 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3), \quad e_3 = \frac{\alpha}{a-1} f_1$$

при α и β одного знака. Алгебра AG_2 изоморфна алгебре VII_a, $a > 0$; для доказательства нужно перейти к новому базису

$$e_1 = f_3, \quad e_2 = f_2, \quad e_3 = -f_1$$

и ввести обозначение $\gamma = a$. Алгебра AG_3 изоморфна алгебре IV, в чем легко убедиться, перейдя к базису

$$e_1 = -f_2, \quad e_2 = f_3, \quad e_3 = f_1.$$

1.2. Левоинвариантные метрики. Левоинвариантные метрики для исследуемых групп Ли вычислены в [5]. Приведем результаты относительно ортонормированного базиса:

для группы G_1:

$$ds^2 = e^{-2\alpha z} dx^2 + e^{-2\beta z} dy^2 + e^{-(\alpha+\beta) z} dz^2;$$

для группы G_2:

$$ds^2 = e^{2\gamma z}(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

для группы G_3:

$$ds^2 = (1 + z^2) e^{-2z} dx^2 + 2z e^{-2z} dx dy + e^{-2z} dy^2 + e^{-2z} dz^2.$$

1.3. Связность Леви-Чивиты. Связность на группах Ли G_1, G_2 и G_3 также ранее была вычислена в [5]. Результаты вычислений следующие:

для группы G_1:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_3, && \nabla_{e_1} e_2 = 0, && \nabla_{e_1} e_3 = -\alpha e_1,\\
&\nabla_{e_2} e_1 = 0, && \nabla_{e_2} e_2 = \beta e_3, && \nabla_{e_2} e_3 = -\beta e_2,\\
&\nabla_{e_3} e_1 = 0, && \nabla_{e_3} e_2 = 0, && \nabla_{e_3} e_3 = 0;
\end{aligned}$$

для группы G_2:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1} e_1 = -\gamma e_3, && \nabla_{e_1} e_2 = 0, && \nabla_{e_1} e_3 = \gamma e_1,\\
&\nabla_{e_2} e_1 = 0, && \nabla_{e_2} e_2 = -\gamma e_3, && \nabla_{e_2} e_3 = \gamma e_2,\\
&\nabla_{e_3} e_1 = e_2, && \nabla_{e_3} e_2 = -e_1, && \nabla_{e_3} e_3 = 0;
\end{aligned}$$

для группы G_3:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1} e_1 = e_3, && \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{2} e_3, && \nabla_{e_1} e_3 = -e_1 + \frac{1}{2} e_2,\\
&\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, && \nabla_{e_2} e_2 = e_3, && \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1 - e_2,\\
&\nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, && \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, && \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что если в группе G_1 допустить $\alpha = -1$, $\beta = 1$, то её связность совпадет со связностью группы Sol (см. [1]).

2. Представление Вейерштрасса. Воспользуемся методом, предложенный И. А. Таймановым и апробированный в [1, 7].

Пусть G — одна из трёх групп Ли G_1, G_2, G_3. Обозначим через Σ поверхность, погруженную в G; пусть $f : \Sigma \to G$ — погружение, $z = x + iy$ — конформный параметр на Σ, $I = e^{2\varphi} dz d\bar{z}$ — индуцированная метрика.

Рассмотрим L-расслоение над Σ: $L \to E = f^{-1}(TG) \to \Sigma$ и дифференциал

$$d_A : \Omega^1(\Sigma; E) \to \Omega^2(\Sigma; E),$$

который действует на E-значных 1-формах следующим образом:

$$d_A\omega = d'_A\omega + d''_A\omega,$$

где

$$\omega = u\,dz + u^*\,d\bar{z}, \quad d'_A\omega = -\nabla_{\bar{\partial} f} u\,dz \wedge d\bar{z}, \quad d''_A\omega = \nabla_{\partial f} u^*\,dz \wedge d\bar{z}.$$

Тогда деривационные уравнения принимают вид:

$$d_A(df) = 0, \tag{13}$$

$$d_A(*df) = ie^{2\varphi} HN\,dz \wedge d\bar{z}, \tag{14}$$

где H — средняя кривизна, N — нормальный вектор, $*dz = -i\,dz$, $*d\bar{z} = i\,d\bar{z}$. Так как метрика левоинвариантна, то полагаем

$$\Psi = f^{-1}\partial f, \quad \Psi^* = f^{-1}\bar{\partial} f.$$

В результате деривационные уравнения принимают следующий вид:

$$\partial\Psi - \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi \Psi^* - \nabla_{\Psi^*}\Psi = 0, \tag{15}$$

$$\partial\Psi + \bar{\partial}\Psi^* + \nabla_\Psi \Psi^* + \nabla_{\Psi^*}\Psi = e^{2\varphi} H f^{-1}(N). \tag{16}$$

Так как G — группа Ли, то в её алгебре Ли можно выбрать ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 по отношению к скалярному произведению в алгебре Ли. Тогда справедливо разложение:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k, \quad \Psi^* = \sum_{k=1}^{3} \bar{Z}_k e_k.$$

Равенства (15) и (16) записываются в виде

$$\sum_{j=1}^{3} (\partial \bar{Z}_j - \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k=1}^{3} (Z_j \bar{Z}_k - \bar{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \big(\partial \bar{Z}_j + \bar{\partial} Z_j\big) e_j + \sum_{j,k=1}^{3} \big(Z_j \bar{Z}_k + \bar{Z}_j Z_k\big) \nabla_{e_j} e_k =$$
$$= 2iH\Big[\big(\bar{Z}_2 Z_3 - \bar{Z}_3 Z_2\big) e_1 + \big(\bar{Z}_3 Z_1 - \bar{Z}_1 Z_3\big) e_2 + \big(\bar{Z}_1 Z_2 - \bar{Z}_2 Z_1\big) e_3\Big]. \tag{18}$$

В [1] доказано, что

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = 0, \quad \langle \Psi^*, \Psi^* \rangle = 0, \quad \langle \Psi, \Psi^* \rangle = \frac{1}{2} e^{2\varphi}.$$

Это эквивалентно равенствам

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2} e^{2\varphi}.$$

Из первого равенства вытекает:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2. \tag{19}$$

Ниже нам понадобятся следующие формулы:

$$Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 Z_2 = -\frac{i}{2}\big(|\psi_1|^4 - |\psi_2|^4\big); \tag{20a}$$

$$Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1 Z_3 = \frac{i}{2}\big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big); \tag{20b}$$

$$Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 Z_3 = -\frac{1}{2}\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big); \tag{20c}$$

$$Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3 = \frac{i}{2}\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big); \tag{20d}$$

$$Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 Z_3 = -\frac{1}{2}\big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big); \tag{20e}$$

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \frac{1}{2}\big(|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4\big). \tag{20f}$$

С учетом последнего деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где U и V — потенциалы поверхности. Индуцированная метрика и левый сдвиг нормального вектора равны

$$I = e^{2\varphi}\,dz\,d\bar{z} = \big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big)^2\,dz\,d\bar{z},$$
$$f^{-1}(N) = e^{-\varphi}\Big[i\big(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)e_1 - \big(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big)e_2 + \big(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2\big)e_3\Big].$$

Пусть ψ определен на поверхности M с комплексным параметром z, $P \in M$. Подставим ψ в формулу (19) для компонент Z_1, Z_2, Z_3 вектора

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k = f^{-1}\partial f.$$

Затем решим линейное дифференциальное уравнение $f_z = f\Psi$ на группе G с начальным условием $f(P) = g \in G$. В результате получаем требуемую поверхность как отображение $f : M \to G$.

Дифференциал Хопфа равен

$$\omega = A\,dz^2, \quad A = \langle \nabla_{f_z} f_z, N\rangle.$$

Точные вычисления дают:

$$A = \langle \Psi_z, N\rangle + \left\langle \sum_{j,k=1}^{3} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle = \Big(\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2\Big) + \left\langle \sum_{j,k=1}^{3} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \right\rangle. \tag{22}$$

Далее, воспользовавшись уравнениями Дирака, получим

$$\varphi_z e^{\varphi} = \bar{\psi}_1\partial\psi_1 + \psi_2\partial\bar{\psi}_2 + \big(\psi_1\partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2\partial\psi_2\big),$$

где согласно уравнению Дирака выражение в скобках записывается в виде

$$\psi_1\partial\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2\partial\psi_2 = (\bar{V} - U)\psi_1\bar{\psi}_2.$$

Вместе с формулой для дифференциала Хопфа будем иметь систему:

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \psi_2 \\ \bar{\psi}_2 & -\psi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial\psi_1 \\ \partial\bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_z e^{\varphi} + (U - \bar{V})\psi_1\bar{\psi}_2 \\ A - \Big\langle \sum\limits_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \Big\rangle \end{pmatrix}.$$

3. Группа G_1. В уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_1. Тогда

$$\partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 - \alpha\big(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3\big) = 0, \tag{23a}$$
$$\partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 - \beta\big(Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3\big) = 0, \tag{23b}$$
$$\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 = 0, \tag{23c}$$
$$\partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 - \alpha\big(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_2Z_3 - \bar{Z}_3Z_2\big), \tag{23d}$$
$$\partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 - \beta\big(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_3Z_1 - \bar{Z}_1Z_3\big), \tag{23e}$$
$$\partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 + 2\alpha|Z_1|^2 + 2\beta|Z_2|^2 = 2iH\big(\bar{Z}_1Z_2 - \bar{Z}_2Z_1\big). \tag{23f}$$

При подстановке (19) в (23a), (23b), (23d) и (23e) после преобразований получим

$$\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 + \frac{\alpha+\beta}{2}\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) + \frac{\alpha-\beta}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) = 0,$$
$$-\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 - \frac{\alpha+\beta}{2}\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big) + \frac{\alpha-\beta}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big) = 2H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).$$

При выводе этих равенств мы воспользовались формулами (20).

В точке, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$б эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$
$$U = \frac{\alpha+\beta}{4}|\psi_1|^2 + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1\frac{\bar{\psi}_2^{\,2}}{\psi_1} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big), \tag{24}$$
$$V = -\frac{\alpha+\beta}{4}|\psi_2|^2 - \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2\frac{\bar{\psi}_1^{\,2}}{\psi_2} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).$$

Прямыми вычислениями находим дифференциал Хопфа поверхности в G_1:

$$A = \big(\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2\big) + \frac{\beta-\alpha}{4}\big(\bar{\psi}_2^4 - \psi_1^4\big).$$

Уравнения Вейнгартена принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2Ae^{-\varphi} + \frac{\alpha+\beta}{4}\psi_1^2\bar{\psi}_2 + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2^3, \qquad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\ \bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2, \qquad \bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} + \frac{\alpha+\beta}{4}\bar{\psi}_1\psi_2^2 + \frac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1^3. \end{gathered} \tag{25}$$

Уравнения Вайнгартена в операторной форме выглядят так:

$$(\partial - \tilde{A})\psi = 0, \quad (\bar{\partial} - \tilde{B})\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varphi_z + \dfrac{\alpha+\beta}{4}Z_3 & Ae^{-\varphi} + \dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2P_2 \\ -H_1 & \dfrac{\alpha+\beta}{4}Z_3 - \dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1P_2 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{4}\bar{Z}_3 - \dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_2P_1 & H_2 \\ -\bar{A}e^{-\varphi} + \dfrac{\alpha-\beta}{4}\bar{\psi}_1P_1 & \varphi_{\bar{z}} + \dfrac{\alpha+\beta}{4}\bar{Z}_3 \end{pmatrix},$$
$$Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2, \quad P_1 = \frac{\bar{\psi}_1^2}{\psi_1}, \quad P_2 = \frac{\bar{\psi}_2^2}{\psi_2}, \quad H_1 = \left(\frac{H}{2} + \frac{\alpha+\beta}{4}\right)e^{\varphi}, \quad H_2 = \left(\frac{H}{2} - \frac{\alpha+\beta}{4}\right)e^{\varphi}.$$

Из уравнений Вайнгартена вытекает соотношение

$$(\partial - \tilde{A})(\bar{\partial} - \tilde{B})\psi - (\bar{\partial} - \tilde{B})(\partial - \tilde{A})\psi = (\tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}])\psi = 0,$$

где введено обозначение
$$\tilde{R}=\tilde{A}_{\bar z}-\tilde{B}_z+[\tilde{A},\tilde{B}].$$
Уравнение $\tilde{R}\psi=0$ записывается так:

$$\kappa_1=\left(\varphi_{z\bar z}+\frac{\alpha-\beta}{4}\partial(\bar\psi_2P_1)+H_1H_2+\left(Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2P_2\right)\left(-\bar Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1P_1\right)\right)\psi_1+$$
$$+\left(A_{\bar z}e^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\partial\big(\bar\psi_2P_2\big)-\frac{H_z}{2}e^{\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha-\beta}{4}\left(\alpha_{\bar z}\bar\psi_2P_2+\bar\psi_2P_1\left(Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2P_2\right)+H_2\bar\psi_1P_2\right)\right)\psi_2=0;$$

$$\kappa_2=\left(-\frac{H_{\bar z}}{2}e^{\varphi}+\bar A_ze^{-\varphi}-\frac{\alpha-\beta}{4}\partial\big(\bar\psi_1P_1\big)-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha-\beta}{4}\left(\varphi_z\bar\psi_1P_1+\bar\psi_1P_2\left(-\bar Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1P_1\right)-H_1\bar\psi_2P_1\right)\right)\psi_1+$$
$$+\left(-\varphi_{z\bar z}-\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\partial\big(\bar\psi_1P_2\big)-H_1H_2-\left(Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_2P_2\right)\left(-\bar Ae^{-\varphi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\bar\psi_1P_1\right)\right)\psi_2=0,$$

причем учтено, что $\bar\partial Z_3-\partial\bar Z_3=0$. Приводя подобные и учитывая уравнения Дирака и Вайнгартена, получаем

$$\kappa_1=\left(\varphi_{z\bar z}+H_1H_2-|A|^2e^{-2\varphi}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar\psi_1^2\bar\psi_2^2+\frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\big(|\psi_1|^4-2|\psi_1|^2|\psi_2|^2-3|\psi_2|^4\big)\right)\psi_1+$$
$$+\left(A_{\bar z}e^{-\varphi}-\frac{H_z}{2}e^{\varphi}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar\psi_1\bar\psi_2^3\right)\psi_2=0;$$
$$\kappa_2=\left(\bar A_ze^{-\varphi}-\frac{H_{\bar z}}{2}e^{\varphi}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar\psi_1^3\bar\psi_2\right)\psi_1+$$
$$+\left(-\varphi_{z\bar z}-H_1H_2+|A|^2e^{-2\varphi}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\bar\psi_1^2\bar\psi_2^2+\frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\big(3|\psi_1|^4+2|\psi_1|^2|\psi_2|^2-|\psi_2|^4\big)\right)\psi_2=0.$$

Система уравнений Кодацци принимает вид:
$$\kappa_1\bar\psi_1-\bar\kappa_2\psi_2=0,\quad \kappa_1\bar\psi_2+\bar\kappa_2\psi_1=0.$$

Окончательно получаем:
$$\varphi_{z\bar z}+\frac{H^2}{4}e^{2\varphi}-|A|^2e^{-2\varphi}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{16}e^{2\varphi}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\big(\psi_1^2\psi_2^2+\bar\psi_1^2\bar\psi_2^2\big)+$$
$$+\frac{(\alpha-\beta)^2}{16}\big(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2-|\psi_1|^4-|\psi_2|^4\big),\tag{26a}$$
$$A_{\bar z}e^{-\varphi}-\frac{H_z}{2}e^{\varphi}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}\big(\bar\psi_1\bar\psi_2^3-\psi_1^3\psi_2\big)+\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\big(|\psi_2|^4-|\psi_1|^4\big)\psi_1\bar\psi_2.\tag{26b}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Поверхность на группе G_1 задается порождающим спинором (ψ_1,ψ_2), $\psi_1\psi_2\neq0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (24)*, Вайнгартена* (25) *и Кодацци* (26).

4. Группа G_2. Далее сделаем аналогичные выводы для группы G_2. Для этого в уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_2. Имеем:

$$\partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 + \gamma\big(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3\big) + Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3 = 0, \tag{27a}$$

$$\partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 - \big(Z_1\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1Z_3\big) + \gamma\big(Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2Z_3\big) = 0, \tag{27b}$$

$$\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 = 0, \tag{27c}$$

$$\partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 + \gamma\big(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3\big) - \big(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_2Z_3 - \bar{Z}_3Z_2\big), \tag{27d}$$

$$\partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 + \big(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1Z_3\big) + \gamma\big(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2Z_3\big) = 2iH\big(\bar{Z}_3Z_1 - \bar{Z}_1Z_3\big), \tag{27e}$$

$$\partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 - 2\gamma\big(|Z_1|^2 + |Z_2|^2\big) = 2iH\big(\bar{Z}_1Z_2 - \bar{Z}_2Z_1\big). \tag{27f}$$

Как и выше, подставляем (19) в (27a), (27b), (27d) и (27e) и после преобразований получаем:

$$\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 - (\gamma + i)\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) = 0,$$
$$-\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 + (\gamma - i)\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = 2H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).$$

Здесь использованы равенства (20).

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{gathered} D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ U = -\frac{\gamma}{2}|\psi_1|^2 - \frac{i}{2}|\psi_2|^2 + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big), \\ V = \frac{\gamma}{2}|\psi_2|^2 + \frac{i}{2}|\psi_1|^2 + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big). \end{gathered} \tag{28}$$

Прямыми вычислениями находим дифференциал Хопфа поверхности в G_2:

$$A = \big(\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2\big) - i\psi_1^2\bar{\psi}_2{}^2.$$

Как и выше, получаем уравнения Вайнгартена:

$$\begin{gathered} \partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2Ae^{-\varphi} - \frac{\gamma - i}{2}\psi_1^2\bar{\psi}_2, \qquad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\ \bar{\partial}\psi_1 = V\psi_2, \qquad \bar{\partial}\psi_2 = \varphi_{\bar{z}}\psi_2 - \psi_1\bar{A}e^{-\varphi} - \frac{\gamma - i}{2}\bar{\psi}_1\psi_2^2. \end{gathered} \tag{29}$$

Операторная форма уравнений Вайнгартена:

$$\big(\partial - \tilde{A}\big)\psi = 0, \quad \big(\bar{\partial} - \tilde{B}\big)\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varphi_z - \dfrac{\gamma - i}{2}Z_3 & Ae^{-\varphi} \\ -\dfrac{1}{2}(H - \gamma)e^{\varphi} & -\dfrac{\gamma - i}{2}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma - i}{2}\bar{Z}_3 & \dfrac{1}{2}(H + \gamma)e^{\varphi} \\ -\bar{A}e^{-\varphi} & \varphi_{\bar{z}} - \dfrac{\gamma - i}{2}\bar{Z}_3 \end{pmatrix}.$$

Как и выше, запишем уравнение

$$\tilde{R}\psi = 0, \quad \tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

В результате имеем:

$$\kappa_1 = \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi}\right)\psi_1 + \left(A_{\bar{z}}e^{-\varphi} - \frac{1}{2}H_ze^{\varphi}\right)\psi_2 = 0,$$
$$\kappa_2 = \left(\bar{A}_ze^{-\varphi} - \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{\varphi}\right)\psi_1 - \left(\varphi_{z\bar{z}} + \frac{H^2 - \gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2e^{-2\varphi}\right)\psi_2 = 0,$$

причем учтено соотношение $\bar{\partial}Z_3 - \partial\bar{Z}_3 = 0$.

Система уравнений Кодацци принимает вид:

$$\kappa_1\bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2\psi_2 = 0, \quad \kappa_1\bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2\psi_1 = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\varphi_{z\bar z} + \frac{H^2-\gamma^2}{4}e^{2\varphi} - |A|^2 e^{-2\varphi} = 0, \quad A_{\bar z}e^{-\varphi} - \frac{H_z}{2}e^{\varphi} = 0. \tag{30}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Поверхность на группе G_2 задается порождающим спинором (ψ_1, ψ_2), $\psi_1\psi_2 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (28)*, Вайнгартена* (29) *и Кодацци* (30)*.*

5. Группа G_3. Далее сделаем выводы для группы G_3. Сначала в уравнениях (17) и (18) воспользуемся связностью Леви-Чивиты группы G_3. Тогда

$$\partial\bar Z_1 - \bar\partial Z_1 - \big(Z_1\bar Z_3 - \bar Z_1 Z_3\big) = 0, \tag{31a}$$

$$\partial\bar Z_2 - \bar\partial Z_2 + \big(Z_1\bar Z_3 - \bar Z_1 Z_3\big) - \big(Z_2\bar Z_3 - \bar Z_2 Z_3\big) = 0, \tag{31b}$$

$$\partial\bar Z_3 - \bar\partial Z_3 = 0, \tag{31c}$$

$$\partial\bar Z_1 + \bar\partial Z_1 - \big(Z_1\bar Z_3 + \bar Z_1 Z_3\big) = 2iH\big(\bar Z_2 Z_3 - \bar Z_3 Z_2\big), \tag{31d}$$

$$\partial\bar Z_2 + \bar\partial Z_2 + \big(Z_1\bar Z_3 + \bar Z_1 Z_3\big) - \big(Z_2\bar Z_3 + \bar Z_2 Z_3\big) = 2iH\big(\bar Z_3 Z_1 - \bar Z_1 Z_3\big), \tag{31e}$$

$$\partial\bar Z_3 + \bar\partial Z_3 + 2\big(|Z_1|^2 + |Z_2|^2\big) = 2iH\big(\bar Z_1 Z_2 - \bar Z_2 Z_1\big). \tag{31f}$$

Как и выше, после подстановки (19) в (31a), (31b), (31d) и (31e) и несложных преобразований будем иметь:

$$2\partial\psi_2^2 + 2\bar\partial\psi_1^2 + \big((2+i)\psi_1\psi_2 + i\bar\psi_1\bar\psi_2\big)\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big) = 0,$$

$$-2\partial\psi_2^2 + 2\bar\partial\psi_1^2 - \big((2+i)\psi_1\psi_2 - i\bar\psi_1\bar\psi_2\big)\big(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2\big) = 4H\psi_1\psi_2\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big).$$

В точках, где $Z_3 = \psi_1\bar\psi_2 \neq 0$, эти уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\begin{gathered} D\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V\end{pmatrix}\right]\psi = 0, \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}, \\ U = \frac{2+i}{4}|\psi_1|^2 + \frac{i}{4}\frac{\bar\psi_1\bar\psi_2^2}{\psi_1} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big), \\ V = -\frac{2+i}{4}|\psi_2|^2 - \frac{i}{4}\frac{\bar\psi_2\bar\psi_1^2}{\psi_2} + \frac{H}{2}\big(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\big). \end{gathered} \tag{32}$$

Дифференциал Хопфа поверхности в G_3:

$$A = \big(\bar\psi_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2\big) - \frac{i}{4}\big(\psi_1^2 - \bar\psi_2{}^2\big)^2 = \big(\bar\psi_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar\psi_2\big) - iZ_2^2.$$

Уравнения Вайнгартена:

$$\begin{gathered} \partial\psi_1 = \varphi_z\psi_1 + \psi_2 A e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_1 Z_3 + iZ_2^2 e^{-\varphi}\psi_2 - \frac{1}{2}\psi_1 Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi}, \qquad \partial\psi_2 = -U\psi_1, \\ \bar\partial\psi_1 = V\psi_2, \qquad \bar\partial\psi_2 = \varphi_{\bar z}\psi_2 - \psi_1\bar A e^{-\varphi} + \frac{1}{2}\psi_2\bar Z_3 + i\bar Z_2^2 e^{-\varphi}\psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2\bar Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi}. \end{gathered} \tag{33}$$

Операторная форма уравнений Вайнгартена:

$$\big(\partial - \tilde A\big)\psi = 0, \quad \big(\bar\partial - \tilde B\big)\psi = 0,$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$,

$$\tilde A = \begin{pmatrix} \varphi_z + \frac{1}{2}Z_3 - \frac{1}{2}Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi} & Ae^{-\varphi} + iZ_2^2 e^{-\varphi} \\ -\frac{H+1}{2}e^{\varphi} - \frac{1}{2}\frac{\bar\psi_1}{\psi_1}Z_1 & \frac{1}{2}Z_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar Z_3 & \frac{H-1}{2}e^{\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\bar\psi_2}{\psi_2}\bar Z_1 \\ -\bar A e^{-\varphi} + i\bar Z_2^2 e^{-\varphi} & \varphi_{\bar z} + \frac{1}{2}\bar Z_3 + \frac{1}{2}\bar Z_1\big(\psi_1\psi_2 - \bar\psi_1\bar\psi_2\big)e^{-\varphi} \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо вывести уравнение

$$\tilde{R}\psi = 0, \quad \tilde{R} = \tilde{A}_{\bar{z}} - \tilde{B}_z + [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

Ввиду больших технических трудностей это уравнение еще не выведено, поэтому на данный момент уравнений Кодацци не получены.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Поверхность на группе G_3 задается порождающим спинором (ψ_1, ψ_2), $\psi_1\psi_2 \neq 0$, который удовлетворяет уравнениям Дирака* (32) *и Вайнгартена* (33).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности в трехмерных группах Ли// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1248–1264.
2. *Богданова Р. А.* Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2009. — *12*, № 46. — С. 12–22.
3. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
4. *Кыров В. А.* Гельмгольцевы пространства размерности два// Сиб. мат. ж. — 2005. — *46*, № 6. — С. 1341–1359.
5. *Кыров В. А.* Левоинвариантные метрики некоторых трехмерных групп Ли// Мат. заметки СВФУ. — 2023. — *30*, № 4. — С. 24–36.
6. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. — Горно-Алтайск: Изд-во Горно-Алтайск. гос. ун-та, 2016.
7. *Тайманов И. А.* Операторы Дирака и конформные инварианты торов в трехмерном пространстве// Тр. МИАН. — 2004. — *204*. — С. 249–280.
8. *Scott P.* The geometries of 3-manifolds// Bull. London Math. Soc. — 1982. — *15*, № 5. — P. 401–487.
9. *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry// Bull. Am. Math. Soc — 1982. — *6*, № 3. — P. 357–381.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович (Kyrov Vladimir Aleksandrovich)
Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск
(Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia)
E-mail: `kyrovVA@yandex.ru`