ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 235 (2024). С. 57–67
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-235-57-67

УДК 517.587, 519.622

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛАГЕРРА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **В. Г. КУРБАТОВ, Е. Д. ХОРОШИХ, В. Ю. ЧУРСИН**

Аннотация. Рассматривается уравнение $\ddot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с матричным коэффициентом A. Это уравнение имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение x при любом непрерывном ограниченном свободном члене f тогда и только тогда, когда спектр матрицы A не пересекает полуось $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. Решение x при этом задается формулой

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \quad G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.$$

Обсуждается задача приближенного нахождения функции Грина $G(t)$ с помощью разложения её в ряд Лагерра. Подбирается значение параметра масштабирования τ многочленов Лагерра, обеспечивающее наибольшую точность.

Ключевые слова: многочлены Лагерра, ортогональные ряды, функция Грина, задача об ограниченных решениях, оптимизация, параметр масштабирования.

APPLYING LAGUERRE'S FUNCTIONS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF GREEN'S FUNCTION OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

© 2024 **V. G. KURBATOV, E. D. KHOROSHIKH, V. YU. CHURSIN**

Abstract. We consider the equation $\ddot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, with the matrix coefficient A. This equation has a unique solution x, which is bounded on $\mathbb{R}$, for any continuous bounded inhomogeneity f if and only if the spectrum of the matrix A does not intersect the semi-axis $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. In this case, the solution x is defined by the formula

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \quad G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.$$

We discuss the problem of approximate calculation of Green's function $G(t)$ using its expansion into Laguerre's series. The scale parameter τ in Laguerre's polynomials is chosen to ensure the highest accuracy.

Keywords and phrases: Laguerre's polynomials, orthogonal series, Green's function, bounded solutions problem, optimization, scale parameter.

AMS Subject Classification: 65F60, 33C45, 97N50

Введение. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) - Ax(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

с комплексным матричным коэффициентом A размера $M \times M$. *Задачей об ограниченных решениях* для этого уравнения называют задачу о нахождении ограниченного на $\mathbb{R}$ решения x при условии, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^M$ непрерывна и ограничена (см. [3–5, 9, 11]). Задача об ограниченных решениях является разновидностью краевых задач — краевые условия заключаются в ограниченности решения на $\pm\infty$.

Предположим, что спектр $\sigma(A)$ матрицы A не пересекает множество $\mathbb{R}_- = \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$. В этом случае (теорема 4) при любой непрерывной ограниченной f задача об ограниченных решениях имеет единственное ограниченное решение, и это решение задается формулой

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,ds,$$

где

$$G(t) = -\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1},$$

а знак $\sqrt{}$ означает главное значение корня, определенное на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ и принимающее значения в правой комплексной полуплоскости.

Таким образом, решение задачи об ограниченных решениях сводится к нахождению *функции Грина* G. Очевидно, $G(-t) = G(t)$. Поэтому достаточно найти только $G(t)$ при $t \geqslant 0$.

Даже при небольших значениях порядка M матрицы A вычислить функцию Грина можно только приближенно. Желательно найти приближение функции Грина G в виде аналитического выражения, зависящего от t (а не только ее значения на некотором достаточно густом дискретном множестве). Точная функция Грина G представляет собой матрицу, состоящую из M^2 элементов, каждый из которых является линейной комбинацией из M функций типа $t \mapsto e^{-\sqrt{\lambda_k}|t|}$, где λ_k — собственные значения матрицы A.

В настоящей работе приближение к G ищется в виде

$$G_{N,\tau,A}(t) = \sum_{n=0}^{N} Q_{n,\tau,A}\, l_{n,\tau}(t), \quad t \geqslant 0,$$

где N — небольшое натуральное число, $Q_{n,\tau,A}$ — некоторые постоянные матричные коэффициенты, называемые *коэффициентами Лагерра*, а функции (зависящие от параметра $\tau > 0$)

$$l_{n,\tau}(t) = \sqrt{\tau}\, e^{-\frac{\tau t}{2}} L_n(\tau t), \quad t \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

называемые *функциями Лагерра*, представляют собой дополненные экспоненциальным весом *многочлены Лагерра* (см. [8, 10, 14, 15]):

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\big(t^n e^{-t}\big)^{(n)}, \quad t \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Известно, что функции Лагерра $l_{n,\tau}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0, \infty)$. Поэтому разложение функции Грина в ряд по функциям Лагерра заведомо существует.

Понятно, что скорость сходимости ряда Лагерра к функции G может зависеть от параметра масштабирования (сжатия-растяжения) τ. Основной задачей настоящей статьи является нахождение значения τ, обеспечивающего точность, близкую к максимально возможной. Ранее задача нахождения τ, обеспечивающего максимальную скорость сходимости, изучалась в [7, 12, 16, 18, 19, 21–23]. Во всех этих работах (за исключением [16]) речь шла о разложении в ряд Лагерра импульсной характеристики. Некоторые идеи из [12, 18, 19, 21–23] использованы в настоящей работе. В [16] рассматривалась задача об ограниченных решениях для уравнения первого порядка и использовался другой метод нахождения коэффициентов.

В разделе 1 приведены некоторые сведения о функциях от матриц. В разделе 2 описан основной объект исследования — дифференциальное уравнение второго порядка (3) — и явная формула для функции Грина задачи об ограниченных решениях. В разделе 3 определены функции Лагерра как многочлены Лагерра с экспоненциальным весом, зависящие от параметра масштабирования τ, и описана общая идея разложения функции Грина в ряд по функциям Лагерра. В разделе 4 выведены вычислительные формулы для коэффициентов разложения функции Грина в ряд по функциям Лагерра. В разделе 5 проведено обсуждение основных свойств вспомогательной функции ξ, представляющей собой основную часть оценки точности приближения функции Грина частичной суммой ряда Лагерра. В разделе 6 приведена оценка точности приближения функции Грина частичной суммой ряда Лагерра, а в разделе 7 — алгоритм нахождения τ, обеспечивающего наибольшую точность приближения. В разделе 8 описаны результаты численного эксперимента.

1. Функциональное исчисление. Пусть $M \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathbb{C}^{M\times M}$ линейное пространство всех комплексных матриц размера $M \times M$; $\mathbf{1} \in \mathbb{C}^{M\times M}$ означает единичную матрицу.

Для матрицы $C = \{C_{ij}\} \in \mathbb{C}^{M\times M}$ обозначим через $\|C\|_{2\to2}$ норму, индуцированную евклидовой нормой на $\mathbb{C}^M$, а через

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}|C_{ij}|^2} \tag{1}$$

— норму Фробениуса. Легко показать, что

$$\|AB\|_F \leqslant \|A\|_{2\to2}\cdot\|B\|_F, \quad \|AB\|_F \leqslant \|A\|_F\cdot\|B\|_{2\to2}, \quad \|A\|_{2\to2} \leqslant \|A\|_F.$$

Обозначим через $\sigma(C)$ спектр матрицы C.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{M\times M}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее спектр $\sigma(A)$ матрицы A, $f : U \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Результатом применения функции f к матрице A называют матрицу

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)\,(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ лежит в U и окружает $\sigma(A)$ (см. [6, 13, 20]). Наиболее важным для приложений примером функции f является функция $\exp_t(\lambda) = e^{\lambda t}$. Результат ее применения к матрице A обозначают символом $\exp_t(A)$ или e^{At}. Известно (см. [1, 6, 20]), что экспоненциальная функция обладает следующими свойствами:

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad \bigl(e^{At}\bigr)' = Ae^{At}, \quad e^{A\cdot 0} = \mathbf{1}.$$

Предложение 1 (см. [4, с. 43], [6, теорема 11.35])**.** *Пусть*

$$\beta = \max\bigl\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\bigr\}.$$

Тогда для любого $\gamma > \beta$ *найдется такое* K, *что*

$$\|e^{At}\| \leqslant K\,e^{\gamma t}, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Обратно, если для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ *выполняется оценка* (2) (*с некоторым* K), *то* $\beta \leqslant \gamma$.

Предложение 2 (теорема об отображении спектра [13, теорема 10.28])**.** *Для любых* A *и* f *выполняется соотношение*

$$\sigma\bigl(f(A)\bigr) = \bigl\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\bigr\}.$$

Предложение 3. *Пусть функция* g *является аналитической в окрестности* $\sigma(A)$, *а* f *является аналитической в окрестности* $g\bigl(\sigma(A)\bigr)$. (*В этом случае, очевидно, композиция* $f\circ g$ *определена и аналитична в окрестности* $\sigma(A)$.) *Тогда матрица* $\bigl(f\circ g\bigr)(A)$ *совпадает с функцией* f *от матрицы* $g(A)$:

$$f\bigl(g(A)\bigr) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\nu)\bigl(\nu\mathbf{1} - g(A)\bigr)^{-1}\,d\nu,$$

где контур Γ *окружает* $\sigma\bigl(g(A)\bigr)$.

Доказательство. Для контура Γ_1, окружающего спектр матрицы A, имеем

$$\big(f\circ g\big)(A)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} f\big(g(\lambda)\big)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\nu)}{\nu-g(\lambda)}\,d\nu\bigg)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\nu)\bigg(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}}{\nu-g(\lambda)}\,d\lambda\bigg)\,d\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\nu)\big(\nu\mathbf{1}-g(A)\big)^{-1}\,d\nu=f\big(g(A)\big).\quad\square$$

2. Функция Грина. Настоящая работа посвящена представлению решения задачи об ограниченных решениях для дифференциального уравнения $\ddot{x}(t)-Ax(t)=f(t)$. В теореме 4 (см. ниже) приводится точная формула для ее решения.

Обозначим через $C=C\big(\mathbb{R},\mathbb{C}^M\big)$ линейное пространство всех непрерывных ограниченных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^M$, а через $C^2=C^2\big(\mathbb{R},\mathbb{C}^M\big)$ — линейное пространство всех дважды непрерывно дифференцируемых функций x, для которых $x,\dot{x},\ddot{x}\in C$.

Теорема 4 (см. [17])**.** *Пусть $A\in\mathbb{C}^{M\times M}$, причем спектр A не пересекает отрицательную действительную полуось*

$$\mathbb{R}_-=\big\{z\in\mathbb{R}:z\leqslant 0\big\}.$$

Тогда для любой функции $f\in C$ уравнение

$$\ddot{x}(t)-Ax(t)=f(t),\quad t\in\mathbb{R},\tag{3}$$

имеет единственное решение $x\in C^2$, которое задается формулой

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(t-s)f(s)\,ds,\tag{4}$$

где

$$G(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}|t|}(\sqrt{A})^{-1}.\tag{5}$$

Здесь символом $\sqrt{}$ обозначено главное значение корня, определенное на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ и принимающее значения в открытой правой комплексной полуплоскости.

Функцию G называют *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях.

Очевидно, $G(-t)=G(t)$. Поэтому для построения полной функции Грина G достаточно найти лишь $G(t)$ при $t\geqslant 0$. Мы будем заниматься приближенным вычислением $G(t)$ при $t\geqslant 0$, и использовать обозначение

$$G_A(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{A}t}(\sqrt{A})^{-1},\quad t\geqslant 0.$$

3. Функции Лагерра. *Многочленами Лагерра* (см. [14, 15]) функции

$$L_n(t)=\frac{e^t}{n!}\big(t^ne^{-t}\big)^{(n)},\quad t\geqslant 0,\quad n=0,1,\dots.$$

Очевидно, функции L_n действительно являются многочленами степени n. Известно (см. [8, с. 59], [10, § 8]), что многочлены L_n образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\infty)$ относительно весовой функции $t\mapsto e^{-t}$:

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-t}L_n(t)\,L_m(t)\,dt=\delta_{nm},\quad n,m=0,1,\dots,$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Пусть $\tau>0$ — произвольное число; оно играет роль масштаба времени. Функции

$$l_{n,\tau}(t)=\sqrt{\tau}\,e^{-\frac{\tau}{2}t}L_n(\tau t),\quad t\geqslant 0,\quad n=0,1,\dots,\tag{6}$$

будем называть *функциями Лагерра*. Очевидно, они образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0,\infty)$ без веса:

$$\int_0^\infty l_{n,\tau}(t)\,l_{m,\tau}(t)\,dt=\delta_{nm},\quad n,m=0,1,\dots.$$

Поскольку функции Лагерра (6) образуют ортонормированный базис в $L_2[0,\infty)$, функцию Грина G_A можно разложить в сходящийся по норме L_2 *ряд Лагерра*

$$G_A=\sum_{n=0}^\infty Q_{n,\tau,A}\,l_{n,\tau}.$$

Коэффициенты

$$Q_{n,\tau,A}=\int_0^\infty G_A(t)\,l_{n,\tau}(t)\,dt \tag{7}$$

будем называть *коэффициентами Лагерра*. Будем использовать N-ю частичную сумму

$$G_{N,\tau,A}(t)=\sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,A}\,l_{n,\tau}(t) \tag{8}$$

ряда Лагерра с небольшим N (значительно меньшим M) для приближения G_A. Функции Лагерра выбраны для приближения G_A, поскольку элементы матрицы (5) представляют собой линейные комбинации экспоненциальных функций $t\mapsto e^{-\sqrt{\lambda_k}|t|}$, где λ_k — собственные значения матрицы A, умноженных на многочлены, а функции Лагерра (6) имеют похожий вид. Конечно, показатели λ_k и $\tau/2$ не совпадают. Но у нас есть возможность брать $\tau>0$ по своему усмотрению. Следует ожидать, что чем лучше $\tau/2$ приближает λ_k в некотором среднем смысле, тем быстрее ряд Лагерра сходится к функции G_A.

Целью работы является нахождение τ, для которого точность (при заданном N)

$$\big\|G_A-G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}=\sqrt{\int_0^\infty\big\|G_A(t)-G_{N,\tau,A}(t)\big\|_F^2\,dt}$$

является близкой к наименьшей возможной и которое тем самым целесообразно использовать для приближения функции Грина частичной суммой (8) ряда Лагерра.

4. Вычисление коэффициентов Лагерра. Для $\lambda\notin\mathbb{R}_-$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$g_\lambda(t)=-\frac{e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2\sqrt{\lambda}},\quad t>0,$$

где корень понимается в смысле главного значения (см. формулировку теоремы 4). Отметим, что значение функции Грина G_A при $t\geqslant 0$ можно понимать не только как функцию $\lambda\mapsto -e^{-\lambda t}\lambda$ от $\sqrt{A}$ (как мы делали ранее), но и (в силу предложения 3) как функцию $g_A(t)$.

Обозначим через $q_{n,\tau,\lambda}$ коэффициенты Лагерра функции g_λ в ортонормированном базисе $l_{n,\tau}$:

$$q_{n,\tau,\lambda}=\int_0^\infty g_\lambda(t)\,l_{n,\tau}(t)\,dt,\quad \lambda\notin\mathbb{R}_-. \tag{9}$$

Предложение 5. *Пусть* $\lambda\notin\mathbb{R}_-$. *Тогда*

$$q_{n,\tau,\lambda}=-\frac{\sqrt{\tau}(2\sqrt{\lambda}-\tau)^n}{\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}+\tau)^{n+1}},\quad n=0,1,\dots.$$

Доказательство сводится к прямым, но длинным вычислениям (см. [7]). □

Следствие 6. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда*

$$\overline{q_{n,\tau,\lambda}} = q_{n,\tau,\bar{\lambda}},$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Доказательство. Напомним, что $\tau > 0$, а $\sqrt{}$ означает главное значение корня (см. определение в формулировке теоремы 4), в силу чего $\overline{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\bar{\lambda}}$. Дальнейшее ясно из предложения 5. □

Следствие 7. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда коэффициенты* (9) *могут быть вычислены рекуррентно*:

$$q_{0,\tau,\lambda} = -\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}+\tau)}, \quad q_{n+1,\tau,\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\, q_{n,\tau,\lambda}.$$

Доказательство вытекает из предложения 5. □

Следствие 8. *Пусть спектр матрицы* $A \in \mathbb{C}^{M\times M}$ *не пересекается с* $\mathbb{R}_-$. *Тогда коэффициенты* (7) *могут быть вычислены рекуррентно*:

$$Q_{0,\tau,A} = -\sqrt{\tau}\big(\sqrt{A}\big)^{-1}(2\sqrt{A}+\tau\mathbf{1})^{-1}, \quad Q_{n+1,\tau,A} = (2\sqrt{A}-\tau\mathbf{1})(2\sqrt{A}+\tau\mathbf{1})^{-1}\, Q_{n,\tau,A}. \tag{10}$$

Доказательство. В силу формулы (5) имеем

$$G_A(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_\lambda(t)\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda.$$

Отсюда и из формулы (7) видно (см. [2, теорема 10.9′]), что

$$Q_{n,\tau,A} = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g_\lambda(t)\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda\Big)\, l_{n,\tau}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\int_0^\infty g_\lambda(t)\,l_{n,\tau}(t)\,dt\right)(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma q_{n,\tau,\lambda}\,(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}\,d\lambda.$$

Остается сослаться на следствие 7. □

Предлагается вычислять *коэффициенты Лагерра* $Q_{n,\tau,A}$ с помощью следствия 8. Матрицу $\sqrt{A}$ удобно вычислить заранее, например, по одному из алгоритмов, описанных в [20], или встроенной командой `MatrixPower` пакета Mathematica (см. [24]). После того, как матрицы $Q_{n,\tau,A}$ вычислены, можно построить приближение (8). Подчеркнем, что $G_{N,\tau,A}$ — функция переменной t.

5. Функция ξ. Для $\lambda \notin \mathbb{R}_-$ и $N \in \mathbb{N}$ обозначим через $\xi(N,\tau,\lambda)$ квадрат точности приближения функции g_λ ее N-й частичной суммой ряда Лагерра по L_2-норме:

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \int_0^\infty \Big| g_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt. \tag{11}$$

Данную формулу можно переписать в виде

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \Big\| g_\lambda - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}\Big\|_{L_2}^2 = \Big\|\sum_{n=N+1}^\infty q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}\Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^\infty |q_{n,\tau,\lambda}|^2. \tag{12}$$

Предложение 9. *Пусть* $\lambda \notin \mathbb{R}_-$. *Тогда*

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{|2\sqrt{\lambda}+\tau|^2 - |2\sqrt{\lambda}-\tau|^2}\cdot\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}.$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 5, равенством (12) и формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\xi(N,\tau,\lambda) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|q_{n,\tau,\lambda}\right|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\tau|2\sqrt{\lambda}-\tau|^{2n}}{|\lambda|\cdot|2\sqrt{\lambda}+\tau|^{2n+2}} =$$

$$= \frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{(2\lambda+\tau)^2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2n} = \frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{(2\lambda+\tau)^2}\left(\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}\Bigg/\left(1-\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\tau}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{|2\sqrt{\lambda}+\tau|^2-|2\sqrt{\lambda}-\tau|^2}\cdot\left|\frac{2\sqrt{\lambda}-\tau}{2\sqrt{\lambda}+\tau}\right|^{2N+2}. \quad \square$$

Аналог следующего утверждения впервые был получен в [18, 19]. Основные этапы доказательства рассматриваемого варианта можно найти в [21, следствие 7].

Предложение 10. *Для производной функции* (11) *справедливо представление*

$$\frac{\partial\xi(N,\tau,\lambda)}{\partial\tau} = -2d_{N+1}\,\mathrm{Re}\big(q_{N+1,\tau,\lambda}\,q_{N,\tau,\bar{\lambda}}\big),$$

где $d_n = n/(2\tau)$, *а* Re *— операция взятия действительной части комплексного числа.*

6. Оценка точности. Цель этого раздела — получить оценку $\left\|G_A - G_{N,\tau,A}\right\|_{L_2[0,\infty)}$. В этом разделе и далее мы используем в $\mathbb{C}^{M\times M}$ норму Фробениуса (1).

Рассмотрим вначале случай, когда матрица A является диагональной.

Предложение 11. *Пусть* $D\in\mathbb{C}^{M\times M}$ *— диагональная матрица с диагональными элементами* $\lambda_k\notin\mathbb{R}_-$, $k=1,2,\dots,M$. *Тогда для величины*

$$\left\|G_D - G_{N,\tau,D}\right\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\int_0^\infty \left\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\right\|_F^2\,dt}$$

справедлива оценка

$$\left\|G_D - G_{N,\tau,D}\right\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{M}\xi(N,\tau,\lambda_k)} \leqslant \sqrt{M\max_k \xi(N,\tau,\lambda_k)},$$

где ξ *— функция* (11).

Доказательство. Согласно предположению матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_M \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad G_D(t) = \begin{pmatrix} g_{\lambda_1}(t) & 0 & \dots & 0\\ 0 & g_{\lambda_2}(t) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & g_{\lambda_M}(t) \end{pmatrix}$$

и

$$G_{N,\tau,D}(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{N} q_{n,\tau,\lambda_1}\,l_{n,\tau}(t) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{N} q_{n,\tau,\lambda_2}\,l_{n,\tau}(t) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{n=0}^{N} q_{n,\tau,\lambda_M}\,l_{n,\tau}(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу определения нормы Фробениуса,

$$\big\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\big\|_F^2=\sum_{k=1}^M\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2.$$

В результате имеем

$$\sqrt{\int_0^\infty\big\|G_D(t)-G_{N,\tau,D}(t)\big\|_F^2\,dt}=\sqrt{\int_0^\infty\sum_{k=1}^M\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt}=$$

$$=\sqrt{\sum_{k=1}^M\int_0^\infty\Big|g_{\lambda_k}(t)-\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda_k}\,l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt}=\sqrt{\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)}.$$

Покажем, что выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)\leqslant M\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k).$$

Положим $a_k=\xi(N,\tau,\lambda_k)$ и $b=\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)$. Для этих чисел имеем

$$a_1\leqslant b,\quad a_2\leqslant b,\quad \dots,\quad a_k\leqslant b,\quad \dots,\quad a_M\leqslant b,$$
$$a_1+a_2+\dots+a_k+\dots+a_M\leqslant Mb,$$

что является другой формой записи нашей оценки. □

Предположим, что матрица A *диагонализуема*; это значит, что существуют такие обратимая матрица T и диагональная матрица D, что $A=TDT^{-1}$. Очевидно, диагональные элементы матрицы D являются собственными значениями матрицы A, а столбцы матрицы T — соответствующими собственными векторами. Ясно, что для диагонализуемой матрицы A

$$G_A(t)=TG_D(t)T^{-1},\qquad t\geqslant 0,$$
$$G_{N,\tau,A}(t)=\sum_{n=0}^N TQ_{n,\tau,D}T^{-1}\,l_{n,\tau}(t),\qquad t\geqslant 0.$$

Теорема 12. *Пусть $A\in\mathbb{C}^{M\times M}$ и $\lambda_k\notin\mathbb{R}_-$, $k=1,2,\dots,M$, — собственные значения A. Тогда имеет место оценка снизу*

$$\sqrt{\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)}\leqslant\|G_A-G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)},\tag{13}$$

а при условии, что A диагонализуема, — оценка сверху

$$\|G_A-G_{N,\tau,A}\|_{L_2[0,\infty)}\leqslant\varkappa(T)\sqrt{\sum_{k=1}^M\xi(N,\tau,\lambda_k)}\leqslant\varkappa(T)\sqrt{M\max_k\xi(N,\tau,\lambda_k)},\tag{14}$$

где $\varkappa(T)=\|T\|_{2\to2}\cdot\|T^{-1}\|_{2\to2}$ — число обусловленности матрицы T, а ξ — функция (11).

Доказательство. Пусть λ — собственное значение матрицы A и v — соответствующий нормированный собственный вектор. Поскольку $G_A(t)$ и $Q_{n,\tau,\lambda}$ — функции $\lambda\mapsto q_\lambda(t)$ и $\lambda\mapsto q_{n,\tau,\lambda}$ от матрицы A соответственно, то v — собственный вектор матриц $G_A(t)$ и $Q_{n,\tau,\lambda}$, соответствующий собственным числам $g_\lambda(t)$ и $q_{n,\tau,\lambda}$:

$$G_A(t)v=q_\lambda(t)v,\quad G_{N,\tau,A}(t)v=\Big(\sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big)v=\Big(\sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\,l_{n,\tau}(t)\Big)v.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\big\|G_A - G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2} \geqslant \big\|(G_A - G_{N,\tau,A})v\big\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\infty \big\|\big(G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\big)v\big\|^2\,dt} = \\
= \sqrt{\int_0^\infty \Big\|\Big(q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}\, l_{n,\tau}(t)\Big)v\Big\|^2\,dt} = \sqrt{\int_0^\infty \Big|q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}(t)\, l_{n,\tau}(t)\Big|^2 \cdot \|v\|^2\,dt} = \\
= \sqrt{\int_0^\infty \Big|q_\lambda(t) - \sum_{n=0}^N q_{n,\tau,\lambda}(t)\, l_{n,\tau}(t)\Big|^2\,dt} = \sqrt{\xi(N,\tau,\lambda)}.
\end{aligned}$$

Из этого неравенства следует оценка (13). Оценка (14) вытекает из предложения 11 и неравенства

$$\big\|TBT^{-1}\big\|_F \leqslant \big\|T\big\|_{2\to2} \cdot \big\|B\big\|_F \cdot \big\|T^{-1}\big\|_{2\to2} = \varkappa(T)\cdot\big\|B\big\|_F.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
&\big\|G_A - G_{N,\tau,A}\big\|_{L_2[0,\infty)} = \\
&= \sqrt{\int_0^\infty \big\|G_A(t) - G_{N,\tau,A}(t)\big\|_F^2\,dt} = \sqrt{\int_0^\infty \Big\|TG_D(t)T^{-1} - \sum_{n=0}^N TQ_{n,\tau,D}T^{-1}\, l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^\infty \|T\|_{2\to2}^2 \cdot \|T^{-1}\|_{2\to2}^2 \cdot \Big\|G_D(t) - \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,D}\, l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} = \\
&= \varkappa(T)\sqrt{\int_0^\infty \Big\|G_D(t) - \sum_{n=0}^N Q_{n,\tau,D}\, l_{n,\tau}(t)\Big\|_F^2\,dt} = \varkappa(T)\cdot\big\|G_D - G_{N,\tau,D}\big\|_{L_2[0,\infty)} = \varkappa(T)\sqrt{\sum_{k=1}^M \xi(N,\tau,\lambda_k)}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. ☐

7. Алгоритм выбора τ. Рассмотрим функцию

$$\rho(N,\tau) = \sum_{k=1}^M \xi(N,\tau,\lambda_k), \tag{15}$$

где λ_k — собственные значения матрицы A, а $\xi(N,\tau,\lambda_k)$ вычисляются с помощью предложения 9. Точка минимума τ_0 функции $\rho(N,\cdot)$ легко находится численно. Мы рекомендуем взять τ_0 в качестве оптимального значения τ, а соответствующее значение $\sqrt{\rho_0}$ использовать для получения оценки величины $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$ в соответствии с теоремой 12. Если величина точности $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$ недостаточна, число N слагаемых ряда Лагерра можно увеличить. Также легко вычислить $\max_k \sqrt{\xi(N,\tau,\lambda_k)}$, после чего это число также можно использовать для оценок в соответствии с теоремой 12.

Подчеркнем, что мы находим τ, обеспечивающее не минимум $\big\|G_A - G_{N,\tau_0,A}\big\|_{L_2[0,\infty)}$, а лишь минимум оценки (14), имеющей место при условии, что матрица A диагонализуема.

Формула из предложения 10 для $\partial\xi(N,\tau)/\partial\tau$ существенно упрощает поиск минимума. Кроме того, она позволяет численно убедиться в том, что (при фиксированном N) функция $\tau \mapsto \partial\rho(N,\tau)/\partial\tau$ является строго возрастающей. Таким образом, минимум у функции $\rho(N,\cdot)$ единственный.

8. Численный эксперимент. Вычисления проводились с помощью пакета Mathematica (см. [24]).

Создадим матрицу A размера $M \times M$, состоящую из случайных комплексных чисел, равномерно распределенных в $[-10, 10] \times [-10i, 10i]$. Поскольку элементы матрицы являются случайными числами, вероятность того, что ее спектр пересекает множество $\mathbb{R}_-$, равна нулю. Тем самым мы попадаем в условия теоремы 4. По тем же соображениям равна нулю вероятность получения кратных собственных значений. Поэтому условия теоремы 12 можно считать выполненными.

Вначале возьмем $M = 10$. Вычислим с помощью пакета Mathematica собственные значения и собственные векторы матрицы A и сформируем матрицу T, приводящую A к диагональному виду. Далее вычислим матрицу $G_A(t)$ в виде аналитического выражения, зависящего от параметра t. Возьмем $N = 8$ и сформируем выражение $\xi(N, \tau, \lambda)$ в соответствии с формулой из предложения 9. Затем сформируем функцию ρ в соответствии с формулой (15) (собственные значения и собственные векторы матрицы A даже для больших M легко и с большой точностью находятся с помощью QR-алгоритма, встроенного в команду `Eigensystem` пакета Mathematica). Найдем точку τ_0, в которой ρ достигает минимального значения и дальнейшие вычисления будем проводить с этим значением τ. Значение ρ в точке минимума также запомним и обозначим его через ρ_0.

Вычислим коэффициенты Лагерра по формулам (10) и сформируем матрицу $G_{N,\tau,A}(t)$, зависящую от параметра t, по формуле (8). Поскольку M и N невелики, удается вычислить

$$\left\| G_A - G_{N,\tau_0,A} \right\|_{L_2[0,\infty)} = \sqrt{\int_0^\infty \left\| G_A(t) - G_{N,\tau_0,A}(t) \right\|_F^2 dt}.$$

Согласно теореме 12 справедлива оценка

$$\left\| G_A - G_{N,\tau,A} \right\|_{L_2[0,\infty)} \leqslant \varkappa(T)\sqrt{\rho_0}.$$

Вычислим ее левую и правую части:

$$0{,}0282817 \leqslant 0{,}10984.$$

Мы видим, что зазор в этой оценке небольшой. Повторение эксперимента приводит к похожей величине зазора.

Возьмем теперь $M = 200$ и $N = 20$. Выполним на этот раз только часть предыдущих вычислений, необходимую для нахождения $\varkappa(T)$ и ρ_0 (остальные вычисления, например, нахождение матрицы $G_A(t)$ в виде формулы, зависящей от параметра t, провести не удается из-за большого значения M). Вычисления показывают, что оценка $\varkappa(T)\sqrt{\rho_0}$ обычно находится в промежутке [0,01; 0,3]. Построение приближения (8) для $M = 200$ проходит достаточно быстро.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А. В., Перов А. И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.–Ижевск: РХД, 2004.
2. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — М.: Наука, 1967.
3. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. — Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1994.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Курбатов В. Г., Курбатова И. В.* Вычислительные методы спектральной теории. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2022.
7. *Курбатов В. Г., Хороших Е. Д.* Применение функций Лагерра для вычисления импульсной характеристики// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2024. — № 1. — С. 39–49.
8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. — М.-Л.: ГИФМЛ, 1963.
9. *Левитан Б. П., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
10. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1985.

11. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
12. *Прохоров С. А., Куликовских И. М.* Условие оптимальности фильтров Мейкснера// Ж. радиоэлектрон. — 2015. — № 4. — С. 1–14.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. — М.-Л.: ГИФМЛ, 1962.
15. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979.
16. *Хороших Е. Д.* Разложение функции Грина задачи об ограниченных решениях в ряд по функциям Лагерра// Сб. тр. Межвуз. науч. конф. «Математика, информационные технологии, приложения» (Воронеж, 27 апреля 2023). — Воронеж: Научная книга, 2023. — С. 514–520.
17. *Чурсин В. Ю.* Функция Грина задачи об ограниченных решениях для дифференциального уравнения второго порядка// Вестн. ф-та прикл. мат., информ. мех. Воронеж. гос. ун-та. — 2024. — *17*. — С. 141–151.
18. *Belt H. J. W., den Brinker A. C.* Optimal parametrization of truncated generalized Laguerre series// Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (Munich, Germany, April 21-24, 1997). — Los Alamitos, California: IEEE Computer Society Press, 1997. — Vol. 5. — P. 3805-3808.
19. *Clowes G. J.* Choice of the time-scaling factor for linear system approximation using orthonormal Laguerre functions// IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — *10*. — P. 487–489.
20. *Higham N. J.* Functions of matrices: Theory and computation. — Philadelphia, PA: SIAM, 2008.
21. *Khoroshikh E. D., Kurbatov V. G.* An approximation of matrix exponential by a truncated Laguerre series/ `arXiv:2312.07291`.
22. *Moore G.* Orthogonal polynomial expansions for the matrix exponential// Linear Algebra Appl. — 2011. — *435*, № 3. — P. 537–559.
23. *Terekhov A. V.* Preconditioning for time-harmonic Maxwell's equations using the Laguerre transform/ `arXiv:2309.11023`.
24. *Wolfram S.* The Mathematica Book. — New York: Wolfram Media, 2003.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Курбатов Виталий Геннадьевич (Kurbatov Vitalii Gennadievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `kv51@inbox.ru`

Хороших Евгения Дмитриевна (Khoroshikh Evgeniya Dmitrievna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `xoroshix2002@mail.ru`

Чурсин Виктор Юрьевич (Chursin Victor Yurievich)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: `4pupil@mail.ru`