



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 124–132
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-124-132

УДК 514.763.23

О ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2022 г. А. С. ШАРИПОВ, Г. М. АБДИШУКУРОВА

Аннотация. В работе исследуется группа изометрий $\text{Iso}_F(M)$ слоеного многообразия с F -компактно-открытой топологией. Эта топология зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью. Доказаны некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$.

Ключевые слова: многообразие, слоение, изометрия слоений, топологическая группа, F -компактно-открытая топология.

ON THE ISOMETRY GROUPS OF FOLIATED MANIFOLDS

© 2022 A. S. SHARIPOV, G. M. ABDISHUKUROVA

ABSTRACT. In this paper, we study the isometry group $\text{Iso}_F(M)$ of a foliated manifold with an F -compact-open topology. This topology depends on the foliation F and coincides with the compact-open topology if F is an n -dimensional foliation. If the codimension of the foliation is equal to n , then the convergence in this topology coincides with the pointwise convergence. Some properties of the group $\text{Iso}_F(M)$ are proved.

Keywords and phrases: manifold, foliation, isometry of foliations, topological group, F -compact-open topology.

AMS Subject Classification: 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Множество $\text{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия на себя является группой относительно композиции и обратного отображения. Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследования В. И. Арнольда, Н. Омоги, А. М. Лукацкого (см. [5, 6, 15, 26, 27]).

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В. И. Арнольда [15], в которой доказано, что движения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

Н. Омоги определил дифференциальную структуру на группе диффеоморфизмов компактных многообразий, которая слабее, чем структура группы Ли в классическом смысле. Эта дифференциальная структура называется структурой ILH (Inverse limit of Hilbert) групп Ли. Н. Омоги доказал, что ILH-группа Ли диффеоморфизмов может действовать на компактном многообразии транзитивно и неприводимо только в случаях, когда она является полной группой диффеоморфизмов, группой сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов, группой симплектических диффеоморфизмов или группой контактных диффеоморфизмов (см. [26, 27]). Вопросы конечной

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований (грант Ф3-2020092531 «Геометрия векторных полей и сингулярные слоения»).

порожденности группы диффеоморфизмов и свойства кривизны Π -групп Ли диффеоморфизмов исследованы А. М. Лукацким (см. [5, 6]).

Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно, этот факт доказан в [13]. Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказан в [24].

Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой g . Вопрос о группе изометрий риманова многообразия (M, g) является основной классической задачей римановой геометрии. Обозначим через $I(M)$ группу всех изометрий риманова многообразия (M, g) размерности n с римановой метрикой g . Структура группы $I(M)$ зависит от фиксированной римановой метрики g . Известно, что для «плохих» римановых метрик группа $I(M)$ может быть очень бедной. Известны примеры, когда группа $I(M)$ состоит из одного элемента.

Многообразие M с некоторым фиксированным слоением F на нем называется слоеным многообразием и обозначается через (M, F) . Слоеные римановы многообразия изучаются в рамках теории слоений, которая является относительно новым направлением математики. Она возникла на стыке дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии во второй половине XX в.

В формировании и развитии теории слоения большой вклад внесли французские математики С. Ehresmann [16], G. Reeb [28], H. Lawson [21], P. Molino [23], A. Haefliger [17], R. Langevin и H. Rosenberg [20], G. Lamoureaux [19]. Основные работы Ж. Риб (G. Reeb), одного из основоположников теории слоений, посвящены задачам качественной теории слоений. Ж. Риб доказал (см. [28]), что если компактный слой имеет конечную фундаментальную группу, то существует окрестность этого слоя, состоящая из слоев, диффеоморфных данному слою. В работах Ш. Эресмана (С. Ehresmann) показано, что римановы и геодезические слоения на полных римановых многообразиях обладают связностью Эресмана.

В настоящее время теория слоений интенсивно развивается, она имеет широкие приложения в различных областях математики: теории оптимального управления, теории динамических полисистем, теории динамических систем. По теории слоений имеются многочисленные исследования. Американский математик Р. Tondeur составил обзор последних научных работ по теории слоений, содержащий более 2500 наименований.

С геометрической точки зрения важными классами слоений являются римановы (метрические) слоения. Р. Tondeur рассматривал функцию без критических точек на римановом многообразии (см. [30]), длина градиента которой постоянна на каждой поверхности уровня. Для таких функций он доказал, что слоение, порожденное поверхностями уровня такой функции, является римановым (метрическим) слоением. В [25] доказано, что если слоение порождено римановой субмерсией, то слои этого слоения являются многообразиями постоянной гауссовой кривизны. Римановы слоения, порожденные метрическими функциями, изучены в работах А. Я. Нарманова [7], Г. Х. Каипназаровой [8], А. М. Байтураева [2]. В [8] изучена геометрия слоений, порожденных поверхностями уровней метрических функций, и получена полная классификация в следующем виде.

Теорема 1. Пусть f — метрическая функция, определенная в $\mathbb{R}^n$. Тогда поверхности уровня функции f образуют слоение F , которое имеет один из следующих n типов:

- (1) слоение F состоит из параллельных гиперплоскостей;
- (2) слоение F состоит из концентрических гипербол и точки (центр гипербол);
- (3) слоение F состоит из концентрических цилиндров вида $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^k$ и сингулярного слоя $\mathbb{R}^k$, который возникает при вырождении сфер в точку; здесь k — минимальная размерность поверхностей критического уровня и $1 \leq k \leq n - 2$.

В работе А. М. Байтураева [2] изучена геометрия метрических субмерсий на римановом многообразии; в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть M — гладкое полное связное риманово многообразие постоянной неотрицательной секционной кривизны, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — метрическая функция без критических точек.

Тогда поверхности уровня функции f порождают вполне геодезическое слоение F на M , слои которого являются взаимно изометричными.

Исследование группы изометрий слоения является новой задачей в теории слоеных многообразий. Понятие изометрии слоения было введено А. Я. Нармановым в [10]. Группа изометрий слоения является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Группа диффеоморфизмов слоеного многообразия изучена в работах С. Х. Арансона (см. [1]). Им получено необходимое и достаточное условие топологической сопряженности таких диффеоморфизмов. Для компактных многообразий различные подгруппы группы диффеоморфизмов изучали P. L. Antonelli, D. Burghlea, P. J. Kahn (см. [14]). В [11] исследованы свойства некоторых подгрупп группы диффеоморфизмов. В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 4. Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , где $0 < k < n$.

1. Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нём является полным римановым многообразием.
2. Пусть $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m , что $\gamma_m(s_0) \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_i} последовательности γ_m , которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p)$ слоя $L(p)$, выходящая из точки p при $s = s_0$.

Теорема 5. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где M — гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Diff}_F^0(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 6. Пусть M — полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k , $f_m \in G_F^r(M)$, $r \geq 0$, $m = 1, 2, \dots$. Предположим, что для каждого слоя L_α существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_i} последовательности f_m , сходящаяся в F -компактно-открытой топологии.

В этой работе рассмотрим слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$ изометрий слоеного многообразия, с F -компактно-открытой топологией. Эта топология зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью. Доказаны некоторые свойства группы $\text{Iso}_F(M)$. Всюду в работе слово «гладкость» означает гладкость класса C^∞ .

2. Основные результаты. Изометрии n -мерного риманова многообразия M на себя образуют подгруппу группы $\text{Diff } M$ всех диффеоморфизмов M на себя. Как показали S. B. Myers, N. Steenrod (см. [22]), группа изометрий $I(M)$ с компактно-открытой топологией имеет естественную структуру группы Ли.

Пусть M — риманово многообразие и $I(M)$ — множество всех изометрий многообразия M . Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in I(M)$. Композиция отображений $\varphi_1 \circ \varphi_2$ снова является изометрией. Если положить $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$, то $I(M)$ станет группой. Мы здесь рассматриваем $I(M)$ с компактно-открытой топологией, которая определяется следующим образом.

Пусть C и U — компактное и открытое подмножества в M соответственно и пусть

$$W(C, U) = \{\varphi \in I(M) \mid \varphi(C) \subset U\}.$$

Компактно-открытая топология в $I(M)$ определяется как самая слабая топология в $I(M)$, для которой все множества $W(C, U)$ открыты. Известно, что $I(M)$ — хаусдорфово пространство со счетной базой.

Объект, состоящий из дифференцируемого многообразия и заданной на нем групповой структуры, называется группой Ли, если групповая операция совместима с дифференциальной структурой, т.е. отображение $\mu: I \times I \rightarrow I$, заданное формулой $\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$, дифференцируемо. Иными словами, групповая операция

$$\mu(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 \circ \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in I,$$

и взятие обратного

$$i: I \rightarrow I, \quad i(\varphi) = \varphi^{-1}, \quad \varphi \in I,$$

являются гладкими отображениями многообразий.

Пусть M — гладкое связное риманова многообразие размерности n , $0 < k < n$.

Определение 1 (см. [29]). Слоением F размерности k (слоением коразмерности $n - k$) называется разбиение M на линейно связные подмножества $L_\alpha \subset M$, обладающее следующими свойствами:

(F₁) справедливо соотношение

$$\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M;$$

(F₂) для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta$, то $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$;

(F₃) для всякой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U и карта $(x^1, x^2, \dots, x^k, y^1, y^2, \dots, y^{n-k})$, что для каждого слоя L_α компоненты линейной связности множества $U_p \cap L_\alpha$ задаются уравнениями $y^1 = \text{const}, y^2 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$.

Эта карта называется отмеченной картой. Компоненты связности множеств $y^1 = \text{const}, y^2 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}$ в отмеченных картах называются локальными слоями слоения F . При фиксированном y отображение $x \rightarrow (x, y)$ является гладким вложением. Следовательно, локальные слои являются связными k -мерными подмногообразиями многообразия M , каждый слой L_α как объединение локальных слоев является k -мерным связным подмногообразием M . Заметим, что естественная топология на многообразии L_α не является топологией, индуцированной из M . Простой пример слоения задается гладкой субмерсией $f: M \rightarrow B$, где B является $n - k$ -мерным многообразием. Компоненты связности полного прообраза точки $y \in B$ определяют k -мерное слоение на M (см. [30]).

Через (M, F) обозначим гладкое многообразие M размерности n , на котором задано гладкое k -мерное слоения F , $0 < k < n$. Пусть $L(p)$ — слой слоения F , проходящий через точку p , $T_p F$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p . Имеем подрасслоение (гладкое распределение) $TF = \{T_p F : p \in M\}$ касательного расслоения TM многообразия M . Обозначим через $V(M)$, $V(F)$ множество гладких сечений расслоений TM , TF соответственно.

Определение 2. Если при диффеоморфизме $f: M \rightarrow M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F , то отображение $f: M \rightarrow M$ называется C^r -диффеоморфизмом слоеного многообразия; обозначение $f: (M, F) \rightarrow (M, F)$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слои L_α слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда диффеоморфизм плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = (x, y + \lambda f(x, y)),$$

является диффеоморфизмом слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, где $f(x, y) = x^2 - y$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{(1-\lambda)\alpha}$.

Пример 2. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где F — гладкое слоение размерности k , $0 < k < n$. Напомним, что векторное поле X называется слоеным полем, если для каждого векторного поля Y , касательного к слоению F , скобка Ли $[X, Y]$ также является касательным к F . Известно, что поток каждого слоеного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) .

Для слоеной плоскости из примера 1 векторное поле

$$X = (x^2 - y) \frac{\partial}{\partial y}$$

является слоеным полем, а его поток состоит из диффеоморфизмов

$$\phi^t: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi^t: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2$$

слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$. Каждый такой диффеоморфизм отображает каждый слой L_α на слой $L_{e^{-t}\alpha}$.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = \text{const}$. Тогда гомеоморфизм плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = (x + y, y^{1/3}),$$

является диффеоморфизмом на каждом слое слоения F , но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $\text{Diff}_F(M)$ множество всех C^r -диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) , $r \geq 0$. Множество $\text{Diff}^r(M)$ является группой по отношению к суперпозиции и обратного отображения. Группа $\text{Diff}_F(M)$ является подгруппой $\text{Diff}(M)$ — топологической группой в компактно-открытой топологии.

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение 3. Изометрия $\phi: M \rightarrow M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F) , если она является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F) .

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Пусть слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Тогда изометрия плоскости

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda),$$

является изометрией слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Оно отображает каждый слой L_α на слой $L_{\alpha-\lambda}$. Семейство изометрий ϕ_λ является потоком векторного поля Киллинга $X = \partial/\partial y$. Нетрудно проверить, что диффеоморфизм слоеной плоскости из примера 1 является изометрией слоеной плоскости, но не является потоком векторного поля.

Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g) , т.е. $L_X g = 0$, где g — риманова метрика, а $L_X g$ — производная Ли метрики по направлению X . Геометрия орбит семейства векторных полей Киллинга изучена в [6]. Если X является слоеным векторным полем Киллинга, то его поток состоит из изометрий слоеного многообразия (M, F) .

Обозначим через $\text{Iso}_F(M)$ множество всех C^r -изометрий слоеного многообразия (M, F) , $r \geq 0$. Имеем

$$\text{Iso}_F(M) = \text{Diff}_F(M) \cap I(M).$$

Исследование группы изометрий слоения является новой задачей в теории слоеных многообразий. Группа изометрий слоения является подгруппой группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Исследуем некоторую топологию на группе $\text{Iso}_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n -мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n , то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому-либо слою слоения F , и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на M .

Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in \text{Iso}_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать

$$[K_\lambda, U_\beta] = \left\{ f: M \rightarrow M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta \right\}.$$

Пусть $\sigma_1 = \{[K_\lambda, U_\beta]\}$. Рассмотрим семейство

$$\sigma_2 = \left\{ \bigcap_{i=1}^k [K_{\lambda_i}, U_{\beta_i}] \right\} \cup \emptyset.$$

Согласно известному критерию в $\text{Iso}_F(M)$ существует топология, для которой семейство σ_2 является базой, причем эта топология единственна. Эту топологию будем называть послойной компактно-открытой топологией или F -компактно-открытой топологией.

В [11] доказано, что группа изометрий конечномерного слоеного многообразия является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 7. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\text{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 8. Множество $\text{Iso}_F(M)$ с F -компактно-открытой топологией является хаусдорфовым пространством со счетной базой.

Доказательство. Возьмем произвольные $f_1 \in \text{Iso}_F(M)$ и $f_2 \in \text{Iso}_F(M)$, $f_1 \neq f_2$. Это означает, что существует такая точка $x \in M$, образы которой при отображениях f_1 и f_2 различны: если $x_1 = f_1(x)$, $x_2 = f_2(x)$, то $x_1 \neq x_2$. Так как M — хаусдорфово пространство, существуют не пересекающиеся окрестности U_1 и U_2 , которые содержат соответственно точки $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$. Положим $K_\lambda = \{x\}$. Тогда по определению F -компактно-открытой топологии множества $[K_\lambda, U_1]$ и $[K_\lambda, U_2]$ открыты и не пересекаются:

$$[K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2] = \emptyset.$$

Действительно, если предполагать, что $[K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2] \neq \emptyset$, то существует $f \in \text{Iso}_F(M)$, которое содержится в $f \in [K_\lambda, U_1] \cap [K_\lambda, U_2]$. Следовательно, $f(C) \subset U_1$, $f(C) \subset U_2$. Отсюда $f(C) \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Это противоречие доказывает хаусдорфовость пространства $\text{Iso}_F(M)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Известно, что каждое риманово многообразие сепарабельно. Следовательно, существует счетная база $U_1, \dots, U_i, \dots$ для открытых подмножеств в M . Поскольку M локально компактно, можно предположить, что замыкание $\overline{U_i}$ компактно для каждого i . Пусть $K_\lambda \subset L_\alpha$ — компакт, лежащий на некотором слое L_α , $U_\beta \subset M$ — открытое множество и f — элемент из $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Для каждого $p \in K_\lambda$ существуют такие индексы i и j , что $p \in U_i$, $f(U_i) \subset U_j \subset U_\beta$. Найдутся такие покрытия $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ множества K_λ и $U_{j_1}, \dots, U_{j_N}$ множества $f(K_\lambda)$, что

$$f(\overline{U_{i_k}}) \subset U_{j_k} \subset U_\beta, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Отсюда следует, что

$$f \in \bigcap_{k=1}^N [\overline{U_{i_k}}, U_{j_k}] \subset [K_\lambda, U_\beta].$$

Значит, множество Ω всех конечных пересечений множеств вида $[\overline{U_{i_k}}, U_{j_k}]$ образует базу открытых множеств в пространстве $\text{Iso}_F(M)$. Поскольку Ω счетно, получаем счётность базы топологии пространства. $\square$

Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , $0 < k < n$. Тогда каждый слой является римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой. Следующая теорема показывает, что если M является полным римановым многообразием, то каждый слой является полным римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой.

Теорема 9. Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k , $0 < k < n$.

1. Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нём является полным римановым многообразием.
2. Пусть $\gamma_m: \mathbb{R}^1 \rightarrow L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m , что $\gamma_m(s_0) \rightarrow p$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_l} последовательности γ_m , которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p)$ слоя $L(p)$, выходящей из точки p при $s = s_0$.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Предположим, что $\{f_m\} \in \text{Iso}_F(M)$ — последовательность, которая поточечно сходится на множестве $A \subset L_\alpha$, где L_α — некоторый слой слоения F . Тогда $\{f_m\}$ также поточечно сходится на $\overline{A}$, где $\overline{A}$ — замыкание множества A в L_α .*

Доказательство. Пусть $p \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$. Выберем сначала такую точку $p_1 \in A$, что $d_\alpha(p, p_1) < \varepsilon/3$, и такое N , что $d(f_l(p_1), f_m(p_1)) < \varepsilon/3$ для $l, m \geq N$, где $d_\alpha(p, p_1)$ — расстояние между точками p и p_1 на слое L_α . Тогда

$$d(f_l(p), f_m(p)) \leq d(f_l(p), f_l(p_1)) + d(f_l(p_1), f_m(p_1)) + d(f_m(p_1), f_m(p)) < \varepsilon$$

для всех $m, n \geq N$. Следовательно, последовательность $\{f_m(p)\}$ фундаментальна, и из полноты многообразия M следует, что $\{f_m(p)\}$ сходится. $\square$

Лемма 2. *Пусть A — такое множество точек на многообразии M , что для каждой точки $p \in A$ существует сходящаяся подпоследовательность $f_{m_l}(p)$ последовательности $f_m(p)$. Если множество A непусто, то $A = M$.*

Доказательство. Пусть $p \in L_\alpha$, $p^* \in A$, $r = d_\alpha(p, p^*)$, где $d_\alpha(p, p^*)$ — расстояние между точками p и p^* на L_α . Пусть подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$ такова, что $\{f_{m_l}(p^*)\}$ сходится. Так как f_{m_l} — изометрия слоения, то расстояние $d_\alpha(p, p^*)$ между точками p и p^* на слое L_α сохраняется и $d_{f_l(\alpha)}(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p^*)) = d_\alpha(p, p^*)$, где $d_{f_l(\alpha)}$ — расстояние на слое $f_{m_l}(L_\alpha)$. Пусть

$$q^* = \lim_{l \rightarrow \infty} (f_{m_l}(p^*)).$$

Тогда

$$d(q^*, f_{m_l}(p)) \leq d(q^*, f_{m_l}(p^*)) + d(f_{m_l}(p^*), f_{m_l}(p)) \leq \varepsilon + r.$$

Следовательно, множество $\{f_{m_l}(p)\}$ имеет компактное замыкание. Отсюда следует, что $p \in A$. $\square$

Следующая теорема показывает некоторое свойство группы $\text{Iso}_F(M)$ с F -компактно-открытой топологией.

Теорема 10. *Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k и f_m — последовательность в $\text{Iso}_F(M)$. Предположим, что существует такая точка $O \in M$, что последовательность $f_m(O)$ сходится. Тогда существует элемент $\varphi \in \text{Iso}_F(M)$ и подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m , сходящаяся к φ в F -компактно-открытой топологии.*

Доказательство. По условиям теоремы существует такая точка $O \in M$, что последовательность $\{f_m(O)\}$ сходится. По лемме 2 для каждой точки $p \in M$ последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Отсюда следует, что последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность для всех $p \in M$.

Риманово многообразие M является сепарабельным метрическим пространством. Поэтому оно содержит всюду плотное счетное подмножество $A = \{p_i\}$. Для каждой точки p_i существует сходящаяся подпоследовательность $\{f_{m_l}^i(p_i)\}$ последовательности $\{f_m(p_i)\}$. Используя диагональный процесс, можем найти подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$, которая сходится во всех точках множества A . Так как существует точка $O \in M$, в которой последовательность $\{f_{m_l}\}$ сходится, то по лемме 2 она сходится во всех точках многообразия M . Отсюда получим, что последовательность сходится поточечно в каждой точке M .

Пусть L_α — произвольный слой. Полагая

$$\varphi(p) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_{m_l},$$

получим отображение $\varphi: M \rightarrow M$. Пусть $p \in L_\alpha$, $\gamma: [0, l] \rightarrow L_\alpha$ — геодезическая, которая реализует расстояние $d_0 = d_\alpha(o_\alpha, p)$ на слое L_α , и параметризованная длиной дуги, $\gamma(0) = o_\alpha$, $\gamma(l) = p$. Если рассмотрим $\gamma_l = f_{m_l}(\gamma)$, то они являются геодезическими на $f_{m_l}(L_\alpha)$. По условиям теоремы $\gamma_l(0) \rightarrow p_0$ при $l \rightarrow \infty$, где p_0 — некоторая точка из M . Тогда по теореме 3 из последовательности $\{\gamma_l(s)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая поточечно сходится к некоторой

геодезической $\gamma(0): \mathbb{R}^1 \rightarrow L(p_0)$ слоя $L(p_0)$, выходящей из точки p_0 при $s = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{\gamma_l(s)\}$ сходится к $\{\gamma_0(s)\}$ для каждого $s \in [0; l]$. Отсюда следует, что $\varphi(\gamma) = \gamma_0$, т.е. отображение φ изометрично переводит L_α на $L(p_0)$.

Теперь покажем, что f_{m_l} сходится к f равномерно на каждом компакте, лежащем на слое слоения F . Пусть K — компактное множество на слое L и $\varepsilon > 0$. Так как K — компакт, то существует $(\varepsilon/3)$ -сеть, состоящая из конечного числа точек $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, где $p_i \in L$. Для каждой точки p_i существует такой номер N_i , что $d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) < \varepsilon/3$ для произвольного $m_l \geq N_i$. Кроме того, для каждой точки $p \in K$ существует такое p_i , что $d_L(p, p_i) < \varepsilon/3$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} d(f_{m_l}(p), \varphi(p)) &\leq d(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \\ &\leq d_{m_l}(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)) + d(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)) + d_l(\varphi(p_i), \varphi(p)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

для

$$m_l > N = \max_{1 \leq i \leq m} \{N_i\},$$

где $1 \leq i \leq m$. Следовательно, получаем, что последовательность f_{m_l} сходится к φ в F -компактно-открытой топологии.

Теперь докажем, что отображение φ отображением «на», или гомеоморфизмом многообразия M на себя. Если предельное отображение является гомеоморфизмом, то оно является изометрией слоения в смысле определения, приведенного выше.

Пусть $q \in \varphi(M)$. Определим $q' \in \varphi(M)$ равенством $\varphi(q') = q$. Тогда

$$0 = \lim d(q, f_\nu(q')) = \lim d(f_\nu^{-1}(q), q').$$

Таким образом, последовательность $f_\nu^{-1}(q)$ сходится к q' . Из доказанного мы знаем, что существует такая подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m , что $f_{m_l}(p)$ сходится для каждой точки $p \in M$. Пусть $p' = \lim f_{m_l}^{-1}(p)$. Тогда

$$d(\lim f_{m_l}(p)', p) = \lim d(p', f_{m_l}^{-1}(p)) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$p = \lim f_{m_l}(p)' = \varphi(p').$$

Поскольку точка $p \in M$ произвольна, заключаем отсюда, что $f(M) = M$.

Известно, что если отображение «на» сохраняет расстояние, то это отображение является изометрией. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арансон С. Х. Топология векторных полей, слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1992. — 193. — С. 15–21.
2. Байтураев А. М. О геометрии слоений коразмерности 1 // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 144. — С. 109–116.
3. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В. О топологической классификации структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами // Мат. заметки. — 2015. — 97, № 2. — С. 318–320.
4. Гринес В. З., Починка О. В. Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях // Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 1 (409). — С. 129–188.
5. Лукацкий А. М. Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов // Усп. мат. наук. — 1978. — 33, № 1 (199). — С. 219–220.
6. Лукацкий А. М. Исследование геодезического потока на бесконечномерной группе Ли с использованием оператора коприсоединенного действия // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — 267. — С. 204–213.
7. Нарманов А. Я. О геометрии вполне геодезических римановых слоений // Изв. вузов. Мат. — 1999. — № 9. — С. 26–31.
8. Нарманов А. Я., Каипназарова Г. Х. Метрические функции на римановых многообразиях // Узбек. мат. ж. — 2010. — № 1. — С. 11–20.

9. Нарманов А. Я., Саитова С. С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — 50, № 12. — С. 1582–1589.
10. Нарманов А. Я., Скоробогатов Д. А. Изометрические отображения слоений// Докл. АН РУз. — 2004. — № 4. — С. 12–16.
11. Нарманов А. Я., Шаринов А. С. О группе диффеоморфизмов слоеных многообразий// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 181. — С. 74–83.
12. Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях// Докл. РАН. — 2011. — № 6. — С. 34–37.
13. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
14. Antonelli P. L., Burgelea D., Kahn P. J. The non-finite type of some diffeomorphism groups// Topology. — 1972. — 11. — P. 1–49.
15. Arnold V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — 16, № 1. — P. 319–361.
16. Ehresmann C. Structures feuilletées// in: Proc. 5th Can. Math. Congr., 1961. — P. 109–172.
17. Haefliger A. Variétés feuilletées// Ann. Scu. Norm. Super. Pisa. — 1962. — 16. — P. 367–397.
18. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. — Toronto: Academic Press, 1978.
19. Lamoureux G. Variétés feuilletées. Transversales fermées// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1970. — 270. — P. 1659–1662.
20. Langevin R., Rosenberg H. Feuilletages de codimension 1// Topology. — 1977. — 16. — P. 107–111.
21. Lawson H. Foliations// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — 80. — P. 369–418.
22. Myers S., Steenrod N. The group of isometries of a Riemannian manifold// Ann. Math. (2). — 1939. — 40, № 2. — P. 400–416.
23. Molino P. Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
24. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries// Meth. Funct. Anal. Topology. — 2009. — 15, № 2. — P. 195–200.
25. Narmanov A., Sharipov A. On the geometry of submersions// Int. J. Geom. — 2014. — 3, № 2. — P. 51–56.
26. Omori H. On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — 15. — P. 167–183.
27. Omori H. Groups of diffeomorphisms and their subgroups// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — 79, № 1. — P. 85–122.
28. Reeb G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. — Paris: Hermann, 1952.
29. Tamura I. Topology of Foliations: An Introduction. — Am. Math. Soc., 2006.
30. Tondeur P. Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Шаринов Анваржон Солиевич

Ташкентский филиал

Национального исследовательского ядерного университета МИФИ

E-mail: asharipov@inbox.ru

Абдишукурова Гузал Максуд кизи

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улутбека, Ташкент

E-mail: Abdishukurova93@yandex.ru