ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 116–123
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-116-123

УДК 517.126+514.7

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. **Б. М. СУЛТАНОВ**

Аннотация. Доказано существование циклической поверхности, натянутой на два заданные кривые пространства. Доказаны существование полной циклической поверхности с заданной полной кривизной на всей плоскости, а также существование поверхности по заданным коэффициентам первой квадратичной формы и дефекту кривизны.

Ключевые слова: галилеево пространство, циклическая поверхность, восстановление, геометрические характеристики, дефект кривизны, изометрия.

EXISTENCE OF A SURFACE WITH PRESCRIBED GEOMETRIC CHARACTERISTICS IN THE GALILEAN SPACE

© 2022 **B. M. SULTANOV**

Abstract. In this paper, we prove the existence of a cyclic surface spanned by two given curved spaces, the existence of a complete cyclic surface with a given total curvature on the whole plane, and the existence of a surface with given coefficients of the first quadratic form and the curvature defect.

Keywords and phrases: Galilean space, cyclic surface, reconstruction, geometric characteristics, curvature defect, isometry.

AMS Subject Classification: 53A35, 53B30

1. Введение. Под задачей восстановления в геометрии «в целом» понимается решение задачи существования и единственности поверхности с заданными геометрическими характеристиками. Геометрическими характеристиками могут быть площадь поверхности, гауссова кривизна, полная кривизна, средняя кривизна, коэффициенты деривационных формул, первая или вторая квадратичная форма поверхности. Часто эти геометрические величины связаны дифференциальными формулами и являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений. В этой статье будет доказана теорема о существовании циклической поверхности в галилеевом пространстве $\mathbb{R}_3^1$, а также существование поверхности с данной полной кривизной и дефектом кривизны.

2. Галилеевы пространства. Основные понятия геометрии галилеева пространства приведены в [1]. В этой монографии изучена дифференциальная геометрия «в малом», определены первая и вторая квадратичная форма поверхностей и геометрические характеристики поверхностей, вычислены деривационные уравнения поверхностей, получены аналоги формул Петерсона—Кодацци и Гаусса.

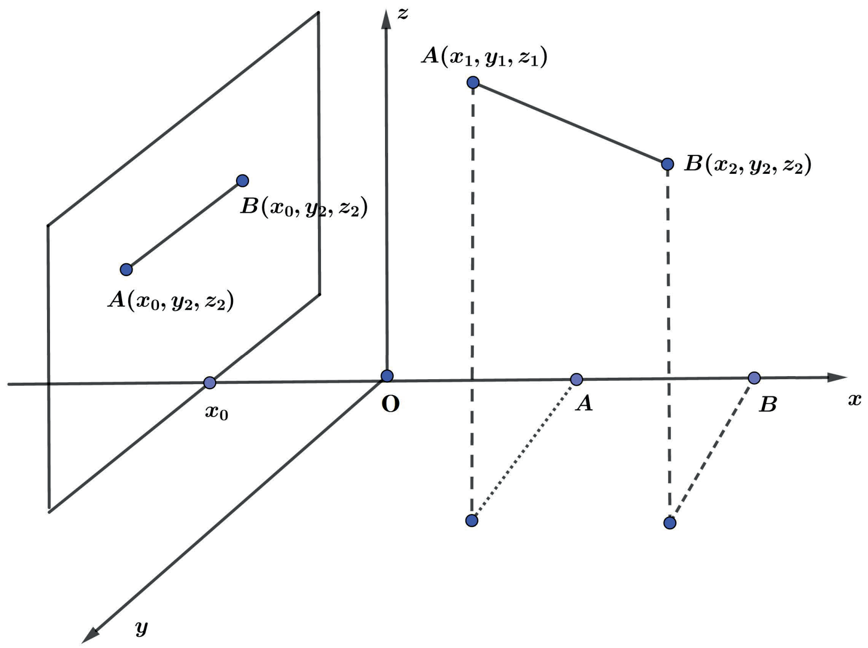

Рис. 1

Пусть задано трехмерное аффинное пространство A_3, $Oxyz$ — система аффинных координат с началом в точке $O(0,0,0)$ и $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ — базисные векторы в этом пространстве. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\boldsymbol{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ определяется по формуле

$$(\boldsymbol{XY}) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{если } x_1x_2 \neq 0,\\ y_1y_2 + z_1z_2, & \text{если } x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Определение 1 (см. [1])**.** Аффинное пространство, в котором скалярное произведение векторов $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ определено по формуле (1), называется галилеевым пространством и обозначается через $\mathbb{R}^1_3$ или Γ_3.

Скалярное произведение (1) называется вырожденным скалярным произведением. Вырожденное скалярное произведение векторов появляется в псевдоевклидовых пространствах (см. [8]) вследствие изотропности векторов.

Выясним геометрический смысл расстояния между двумя точками галилеева пространства $\mathbb{R}^1_3$, определяемого как норма соединяющего эти точки вектора. Пусть точки $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ — точки галилеева пространства $\mathbb{R}^1_3$, причем $x_1 \neq x_2$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\},$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})} = \begin{cases} |x_2-x_1|, & \text{если } x_2 \neq x_1,\\ \sqrt{(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, & \text{если } x_2 = x_1. \end{cases}$$

Если $x_1 \neq x_2$, то расстояние AB равно длине проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox (см. рис. 1). Если $x_1 = x_2 = x_0$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости Oyz, и расстояние между точками $A(x_0,y_1,z_1)$ и $B(x_0,y_2,z_2)$ определяется как евклидово расстояние между точками. Очевидно, что точки A и B лежат на плоскости $x=x_0$, и расстояние будет евклидовым расстоянием между соответствующими точками. Поэтому геометрия на плоскости $x=x_0$ галилеева пространства будет евклидовой. Отметим, что такие плоскости, задаваемые уравнениями $x=\mathrm{const}$, называются особыми плоскостями галилеева пространства (см. [1]).

3. Теория поверхностей в $\mathbb{R}_3^1$. Рассмотрим основные понятия поверхностей в $\mathbb{R}_3^1$, связанные с первой квадратичной формой.

Пусть F — поверхность пространства $\mathbb{R}_3^1$, не имеющая особых касательных плоскостей. Введем специальную систему криволинейных координат. Для этого рассмотрим всевозможные пересечения F с особыми плоскостями $x = \mathrm{const}$.

Выберем в качестве криволинейных координат $u = u_0$ семейство кривых, образованных пересечениями поверхности особыми плоскостями, а в качестве координатных линий $v = v_0$ — произвольные линии, образующие сеть на поверхности F. При таком выборе криволинейных координат уравнения поверхности имеют вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + y(u, v)\boldsymbol{j} + z(u, v)\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

При этом векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ образуют базис в касательной плоскости поверхности, которая является галилеевой. Направление вектора $\boldsymbol{r}_v$ соответствует выделенному направлению галилеевой плоскости.

Векторное уравнение линии в галилеевом пространстве имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = s\boldsymbol{i} + y(s)\boldsymbol{j} + z(s)\boldsymbol{k}.$$

Пусть на поверхности F кривая задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$. Рассмотрим длину кривой на поверхности. Вычисляя длину дуги отрезка кривой с концами в точках $A(u_0)$ и $B(u_1)$, где $u_1 \neq u_0$, получаем, что дифференциал длины дуги $ds = |\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv|$. Следовательно, квадрат дифференциала дуги кривой на поверхности равен квадрату приращения координаты:

$$ds^2 = du^2.$$

Полученную форму назовем первой квадратичной формой поверхности.

Если $du = 0$, то $u = \mathrm{const}$. В этом случае кривая лежит на особой плоскости. Дифференциал длины дуги кривой вычисляется по формуле

$$ds_2^2 = (y_v^2 + z_v^2)dv^2 = G(u, v)dv^2,$$

где ds_2^2 — первая дополнительная квадратичная форма поверхности. Следовательно, при выбранной криволинейной координате коэффициенты первой квадратичной формы имеют вид $E_1 = 1$, $G = y_v^2 + z_v^2$.

Деривационное уравнение поверхности (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^2 \boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n}, & \qquad \boldsymbol{n}_u &= -\frac{M}{G}\boldsymbol{r}_v, \\ \boldsymbol{r}_{uv} &= \Gamma_{21}^2 \boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n}, & & \\ \boldsymbol{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^2 \boldsymbol{r}_v + N\boldsymbol{n}, & \qquad \boldsymbol{n}_v &= -\frac{N}{G}\boldsymbol{r}_v, \end{aligned}$$

где Γ_{ij}^2 — аналоги символов Кристоффеля, $G(u, v)$ — коэффициент первой квадратичной формы, L, N, M — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (2), $\boldsymbol{n}$ — нормаль поверхности. Символы Кристоффеля определяются формулами

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{G}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Выражение $D(u, v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$ называется дефектом кривизны поверхности; здесь

$$F = y_u y_v + z_u z_v, \quad E = y_u^2 + z_u^2.$$

Тогда

$$D(u, v) = \boldsymbol{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{r}_v = |\boldsymbol{r}_{uu}| \cdot |\boldsymbol{r}_v| \cos\varphi, \quad |\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{G(u, v)},$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{r}_{uu}$ и $\boldsymbol{r}_v$ на особой плоскости (см. [1, 2]). Аналог формулы Гаусса в галилеевом пространстве $\mathbb{R}_3^1$ имеет вид

$$K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}}\right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2}. \tag{3}$$

Условием интегрируемости деривационных формул являются аналоги уравнений Петерсона—Кодацци:

$$L_v - M_u = \Gamma_{12}^2 M - \Gamma_{11}^2 N, \quad N_u - M_v = \Gamma_{12}^2 N - \Gamma_{22}^2 M.$$

В формуле Гаусса кроме коэффициента первой квадратичной формы участвует дефект кривизны $D(u, v)$. Это показывает, что гауссова кривизна (3) поверхности галилеева пространства полностью не выражается через коэффициент первой квадратичной формы и их производные.

Известно (см. [9]), что гауссова кривизна поверхности евклидова пространства является объектом внутренней геометрии, т.е. выражается только через коэффициент первой квадратичной формы и его производные. В галилеевом пространстве этот факт не имеет места.

4. Изометрия поверхностей в $\mathbb{R}_3^1$. Пусть F — ограниченная поверхность галилеева пространства, заданная уравнением (2). Из общей ограниченности поверхности следует ее ограниченность и по оси Ox. Следовательно, особые плоскости, заданные уравнением $x = x_i = \mathrm{const}$, пересекающие поверхность F, также ограничены, т.е .существуют такие числа a и b, что $a \leqslant x_i \leqslant b$. При этом плоскость $x = a$ ограничивает поверхность F слева по оси Ox, а плоскость $x = b$ — справа.

Определение 2. Назовем интервал $[a, b]$ шириной поверхности F в галилеевом пространстве.

Определение 3. Назовем полуизометричными поверхности, имеющие равные ширины.

Очевидно, существует достаточно широкий класс полуизометричных поверхностей. Кроме того, между полуизометричными поверхностями всегда можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что расстояние между соответствующими особыми плоскостями, пересекающими поверхность F, равны.

Определение 4. Полуизометричные поверхности называются изометричными, если в соответствующих сечениях отображение изометрично.

Если поверхности полуизометричны, т.е. их ширины равны, то в уравнении (2) параметры можно выбрать одинаковыми для обеих поверхностей. Изометричность сечения означает, что в случае $u = u_0$ выполняется равенство

$$\int_{v_0}^{v} \sqrt{G_1(u_0, v)}dv = \int_{v_0}^{v} \sqrt{G_2(u_0, v)}dv.$$

Из этого равенства следует, что $G_1(u_0, v) = G_2(u_0, v)$, т.е. коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей равны.

Следовательно, можно сделать вывод, что можно выбрать координатные линии изометричных поверхностей так, чтобы они имели одинаковые первые квадратичные формы.

Приведем пример изометричных поверхностей. Рассмотрим поверхности, заданные уравнениями

$$F_1: \; z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad F_2: \; z = \frac{1}{2}(2x + y^2).$$

Вычислим коэффициенты первых квадратичных форм, а также дефект кривизны поверхностей F_1 и F_2. Коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей $G_1(x, y) = G_2(x, y) = 1 + y^2$ равны. Дефекты кривизны поверхностей $D_1(x, y) = x$ и $D_2(x, y) = 0$ не равны. Следовательно, существуют поверхности с различными дефектами кривизны.

Определение 5. Изометричные поверхности называются вполне изометричными, если у них в соответствующих точках равны дефекты кривизны.

Поверхность F_1 из предыдущего примера и поверхность F_3, заданная уравнением

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + y^2 + 8),$$

вполне изометричны.

5. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы.

В галилеевом пространстве существует введенная в [1] «циклическая поверхность», основные свойства которой изучены в [3, 4]. Докажем теорему существования циклической поверхности.

Пусть l_1 и l_2 — две непересекающиеся линии в галилеевом пространстве $\mathbb{R}_3^1$, заданные векторными уравнениями

$$l_1 : \boldsymbol{r}_1(u) = u\boldsymbol{i} + y_1(u)\boldsymbol{j} + z_1(u)\boldsymbol{k}, \quad l_2 : \boldsymbol{r}_2(u) = u\boldsymbol{i} + y_2(u)\boldsymbol{j} + z_2(u)\boldsymbol{k}.$$

Теорема 1. *В галилеевом пространстве $\mathbb{R}_3^1$ существует единственная циклическая поверхность, образующие которой проходят через точки кривых l_1 и l_2.*

Доказательство. Рассмотрим особую плоскость $x = u_1$, пересекающую кривые l_1 и l_2 в точках $M(u_1, y_1(u), z_1(u))$ и $N(u_1, y_2(u), z_2(u))$. На особой плоскости $x = u_1$ через точки M и N проходит единственная прямая $l(u_1)$. Когда координата x меняется, соответственно меняется прямая $l(u)$, проходящая через соответствующие точки M и N. Изменение прямой $l(u)$ описывает некоторую линейчатую поверхность, которая являются циклической поверхностью. Единственность этой циклической поверхности следует из единственности ее образующей $l(u)$. □

В циклических точках поверхности полную кривизну определим по формуле $K = -M^2$, где M — коэффициент второй квадратичной формы (см. [1, 3]).

Пусть в галилеевом пространстве $\mathbb{R}_3^1$ уравнением

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{4}$$

задана циклическая поверхность F, однозначно проектирующаяся на область D плоскости $O(x, y)$, Областью D может быть вся плоскость $O(x, y)$. Полная кривизна поверхности F вычисляется по формуле

$$K = -M^2 = -\left(\frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}}\right)^2.$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x, y) \in C(D)$ — произвольная положительная функция. В галилеевом пространстве всегда существует циклическая поверхность с полной кривизной*

$$K = -\varphi^2(x, y).$$

Доказательство. Из уравнений полной кривизны циклической поверхности галилеева пространства для поверхности, заданной уравнением (4), имеем

$$K = -M^2 = -\varphi^2(x, y). \tag{5}$$

Учитывая, что $M = \dfrac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}}$, отсюда находим

$$-\left(\frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_y^2}}\right)^2 = -\varphi^2(x, y).$$

Следовательно, $z_{xy} = \varphi(x, y)\sqrt{1 + z_y^2}$. Производя в этом гиперболическом дифференциальном уравнении замену $z_y = T$, получим уравнение

$$\frac{T_x}{\sqrt{1 + T^2}} = \varphi(x, y),$$

решение которого имеет вид

$$\ln|T + \sqrt{1 + T^2}| = \int \varphi(x, y)dx + c_1(y) \quad \Longleftrightarrow \quad z_y + \sqrt{1 + z_y^2} = \pm e^{\int \varphi(x,y)dx + c_1(y)}.$$

После несложных преобразований получим

$$z_y = \pm\left(\frac{1}{2}e^{\int \varphi(x,y)dx + c_1(y)} - \frac{1}{2e^{\int \varphi(x,y)dx + c_1(y)}}\right).$$

Следовательно,

$$z(x,y)=\pm\int\left(\frac{1}{2}e^{\int\varphi(x,y)dx+c_1(y)}-\frac{1}{2e^{\int\varphi(x,y)dx+c_1(y)}}\right)dy+c_2(x). \tag{6}$$

Формула (6) дает общее решение уравнения (5). Если заданы начальные условия, то из общего решения можно выделить частное решение. □

Рассмотрим задачу существования поверхности в галилеевом пространстве с заданными первой квадратичной формой и дефектом кривизны.

Задание первой квадратичной формы и положительность полной кривизны достаточны для определения выпуклой поверхности евклидова пространства. Но задание первой квадратичной формы в галилеевом пространстве определяет его с точностью до изометрии этого пространства. Кроме этого, в галилеевом пространстве существует вполне изометричность. Оказывается, условие вполне изометричности является достаточным для однозначной определенности поверхностей. Это вытекает из следующей теоремы 3.

Рассмотрим класс выпуклых поверхностей $W(\pi)$ из $C^2(\pi)$, однозначно проектирующихся на всю плоскость Oxy, которые задаются уравнением $z=z(x,y)$.

Теорема 3. *Если заданы функции $\varphi(x,y)>1$ и $\mu(x,y)$, определенные на всей плоскости, то существует поверхность с коэффициентом первой квадратичной формы $\varphi(x,y)\in W(\pi)$ и дефектом кривизны $\mu(x,y)\in W(\pi)$.*

Доказательство. Для поверхностей галилеева пространства $\mathbb{R}_3^1$ первая квадратичная форма имеет вид

$$ds_1^2=du^2 \text{и} ds_2^2=G(u,v)dv^2,$$

где $G(u,v)$ — коэффициент первой квадратичной формы, а аналог уравнения Гаусса — вид

$$K=\frac{LN-M^2}{G}=\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{D}{\sqrt{G}}\right)_v-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2},$$

где D — дефект кривизны поверхности. Если поверхность принадлежит классу $W(\pi)$, то ее коэффициент первой квадратичной формы и дефект кривизны соответственно вычисляются по следующим формулам:

$$G(x,y)=1+z_y^2(x,y);\quad D(x,y)=z_{xx}(x,y)\cdot z_y(x,y).$$

Согласно условиям теоремы даны коэффициент первой квадратичной формы $G(x,y)=\varphi(x,y)$ и дефект кривизны $D(x,y)=\mu(x,y)$ на всей плоскости Oxy. Следовательно,

$$z_y^2(x,y)=\varphi(x,y)-1,\quad z_{xx}(x,y)\cdot z_y(x,y)=\mu(x,y).$$

Выразив их первого равенства системы

$$z_y(x,y)=\pm\sqrt{\varphi(x,y)-1}$$

и подставляя это выражение во второе равенство системы, получим

$$z_{xx}(x,y)=\pm\frac{\mu(x,y)}{\sqrt{\varphi(x,y)-1}}.$$

Положим

$$\psi(x,y)=\pm\frac{\mu(x,y)}{\sqrt{\varphi(x,y)-1}}.$$

Часть с отрицательным знаком не рассматриваем, так как это решение является зеркальным отображением положительной части относительно плоскости Oxy. Имеем

$$z(x,y)=\int\left(\int\psi(x,y)dx\right)dx+C_1(y)\cdot x+C_2(y).$$

Итак, доказано существование решения на всей плоскости Oxy. В случае, когда задача рассматривается на ограниченной части плоскости, следует решить задачу Дирихле. □

Аналогично теореме 3 можно сформулировать и доказать теорему, когда искомая поверхность имеет уравнения вида (2). В этом случае задача связана с решением системы дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_v^2(x,v)+z_v^2(x,v)=\varphi(x,v),\\ y_{xx}(x,v)y_v(x,v)+z_{xx}(x,v)z_v(x,v)=\mu(x,v). \end{cases}$$

Для этой системы дифференциальных уравнений не существует метода нахождения общего решения. Аналогом теоремы Бонне для евклидова пространства является следующая теорема в $\mathbb{R}_3^1$.

Теорема 4. *Если на односвязной области Q плоскости заданы функции*

$$G=G(u,v)\geqslant 0,\quad D=D(u,v)\geqslant 0,\quad L=L(u,v),\quad M=M(u,v),\quad N=N(u,v)$$

из класса C^1, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} L_v-M_u=\Gamma_{12}^2M-\Gamma_{11}^2N,\\ N_u-M_v=\Gamma_{12}^2N-\Gamma_{22}^2M, \end{cases}\qquad K=\frac{LN-M^2}{G}=\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{D}{\sqrt{G}}\right)_v-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2},$$

то существует единственная в области Q функция $r(u,v)=(u,y(u,v),z(u,v))$, являющаяся решением системы дифференциальных уравнений

$$y_v^2+z_v^2=G,$$

$$\begin{cases} y_{uu}=Dy_v-\dfrac{L}{\sqrt{G}}z_v, & z_{uu}=Dz_v+\dfrac{L}{\sqrt{G}}y_v,\\ y_{uv}=\dfrac{G_u}{2G}y_v-\dfrac{M}{\sqrt{G}}z_v, & z_{uv}=\dfrac{G_u}{2G}z_v+\dfrac{M}{\sqrt{G}}y_v,\\ y_{vv}=\dfrac{G_v}{2G}y_v-\dfrac{N}{\sqrt{G}}z_v, & z_{vv}=\dfrac{G_v}{2G}z_v+\dfrac{N}{\sqrt{G}}y_v. \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{r}(u_0,v_0)=\boldsymbol{a}(a_1,a_2),\quad \boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)=\boldsymbol{b}(b_1,b_2),\quad \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)=\boldsymbol{c}(c_1,c_2),\quad \|\boldsymbol{c}\|=\sqrt{G(u_0,v_0)}.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся методом наложенного пространства, т.е. галилееву систему координат будем считать декартовой системой координат евклидова пространства $\mathbb{R}_3$. Тогда из условий теоремы получаем систему дифференциальных уравнений, являющуюся частным случаем системы дифференциальных уравнений из теоремы Бонне (см. [6, 7]). Существование решения следует из существования решения соответствующей задачи Бонне.

Также эту систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений, приведенной в доказательстве существования и единственности решения задач нахождения поверхности с заданной первой и второй квадратичной формой в книге А. Я. Нарманова [5]. Следует отметить, что коэффициенты первой квадратичной формы $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ в нашем варианте будут $E(u,v)=1$, $F(u,v)=D(u,v)$, а $G(u,v)$ остается неизменной. Здесь $D(u,v)$ — дефект кривизны поверхности.

Изложение доказательства теоремы является почти дословным повторением доказательства, приведенного в [5], так как является его частным случаем, поэтому мы его не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артикбаев А., Соколов Д. Д.* Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. — Ташкент: Фан, 1991.
2. *Курбонов Э. К.* О дефекте кривизны поверхности галилеева пространства// Узбек. мат. ж. — 2000. — № 4. — С. 26–29.
3. *Курбонов Э. К.* О поверхности галилеева пространства// Узбек. мат. ж. — 2005. — № 1. — С. 51–56.
4. *Курбонов Э. К.* Циклические поверхности галилеева пространства/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Ташкент, 2006.
5. *Нарманов А. Я.* Дифференциальная геометрия. — Ташкент: Турон Икбол, 2018.
6. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.
7. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

8. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
9. *Toponogov V. A., Rovenski V. Y.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. — Boston: Birkhäuser, 2006.

Султанов Бекзод Максуд угли
Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан
E-mail: bek_4747@bk.ru