



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 88–96
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-88-96

УДК 517.925.51

СКРЫТАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ЗАПАЗДЫВАНИИ

© 2022 г. С. С. МАМОНОВ, И. В. ИОНОВА, А. О. ХАРЛАМОВА

Аннотация. Рассматривается математическая модель системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании, в случае дробно-рационального интегрирующего фильтра второго порядка. Получены условия существования нескольких квазисинхронных режимов системы, определяющих режимы фазовой синхронизации. Проведён анализ влияния нелинейности запаздывания на фазовую мультистабильность. Целью работы является разработка численно-аналитического подхода для определения условий существования скрытой синхронизации фазовых систем, разработка алгоритма определения влияния нелинейности запаздывания на режимы синхронизации.

Ключевые слова: фазовая система, фазовая автоподстройка частоты, динамический режим, автомодуляционные колебания, синхронизация.

HIDDEN SYNCHRONIZATION OF PHASE-LOCKED LOOPS WITH NONLINEAR DELAY

© 2022 S. S. MAMONOV, I. V. IONOVA, A. O. KHARLAMOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a mathematical model of a phase locked loop system taking into account nonlinearity in the delay in the case of a fractional rational second-order integrating filter. We obtain conditions for the existence of several quasi-synchronous modes of the system, which determine the phase synchronization modes, and analyze the influence of the nonlinear delay on the phase multistability. We develop numerical and analytical conditions for the existence of hidden synchronization of phase systems and construct an algorithm for determining the influence of nonlinear delays on synchronization modes.

Keywords and phrases: phase system, phase locked loop, dynamic mode, self-modulation oscillations, synchronization.

AMS Subject Classification: 34K05, 34K13, 34K60

1. Введение. В работе рассматривается система фазовой автоподстройки с запаздыванием. Системы с запаздыванием отличаются от обычных фазовых систем тем, что в одном или нескольких из своих звеньев имеют запаздывание во времени на величину τ , называемую временем запаздывания выходного сигнала относительно входного, причём это время запаздывания остаётся постоянным и во всём последующем ходе процесса [1]. Передаточная функция звена чистого запаздывания имеет вид

$$K_{\tau}(p) = 1 - \tau p + \frac{1}{2!} \tau^2 p^2 + \dots + \frac{1}{n!} \tau^n p^n = e^{-\tau p}.$$

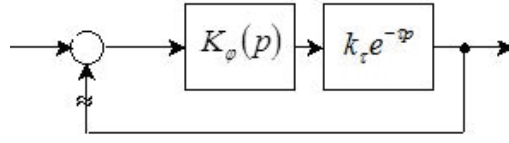


Рис. 1. Схема цепи при последовательном включении звена с запаздыванием.

При последовательном включении звена с запаздыванием передаточная функция системы будет определяться соотношением $K_\tau(p) = K_\varphi(p)e^{-\tau p}$, где $K_\varphi(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы без учета запаздывания. На рисунке 1 изображена схема звена с запаздыванием, включенного в прямую цепь при размыкании главной обратной связи. В этом случае $K_\tau(p) = K_\varphi(p)k_\tau e^{-\tau p}$, где k_τ — коэффициент передачи звена с запаздыванием [1].

Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H \quad (1)$$

(см. [2, 4, 12]), где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_y — полоса удержания фазового кольца, $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p}$ — операторный коэффициент запаздывания [2, 9], τ — время запаздывания, $F(\sigma)$ — характеристика фазового детектора, $F(\sigma) — \Delta$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция, $\Omega_H = \text{const}$ — начальная расстройка. В работе [7] проведены исследования системы синхронизации в случае, когда операторный коэффициент запаздывания определяется линейной зависимостью от оператора дифференцирования $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx 1 - \tau p$. В настоящей работе предлагается в коэффициенте запаздывания учитывать нелинейную зависимость от оператора дифференцирования

$$K_\tau(p) = 1 - \tau p + \frac{1}{2!}\tau^2 p^2.$$

2. Основные результаты. Построим математическую модель системы фазовой автоподстройки с нелинейностью в запаздывании. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [5, 6, 8–11]

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma), \quad (2)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$\varphi(\sigma) = (AF(\sigma) - \gamma) — \Delta$ -периодическая функция,

$$\begin{aligned} \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0, \quad \nu = -\nu_1 < 0, \quad \Gamma > 0, \quad \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \quad \rho_0 = \rho - \rho_1, \\ l^T b = -\nu_1 < 0, \quad c^T b = -\Gamma < 0, \quad c^T A = l^T, \quad l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T. \end{aligned}$$

Для системы (2) определим операторное уравнение (1), описывающее динамику системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Систему (2) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 + \nu\varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = x_2 + \rho\varphi(\sigma). \end{cases} \quad (3)$$

С учетом (2) найдем значения $\ddot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$

$$\ddot{\sigma} = \dot{x}_2 + \rho\dot{\varphi}(\sigma) = \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\dot{\varphi}(\sigma), \quad \ddot{\sigma} = \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\ddot{\varphi}(\sigma). \quad (4)$$

Из соотношений (4), (3) определим x_1 , x_2 , $\dot{x}_1$

$$x_1 = \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma), \quad x_2 = \dot{\sigma} - \rho\varphi(\sigma), \quad \dot{x}_1 = \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\ddot{\varphi}(\sigma). \quad (5)$$

Равенства (5) позволяют представить первое уравнение системы (3) в виде

$$\ddot{\sigma} + \Gamma \dot{\varphi}(\sigma) - \rho \ddot{\varphi}(\sigma) = -\alpha_1(\ddot{\sigma} + \Gamma \dot{\varphi}(\sigma) - \rho \ddot{\varphi}(\sigma)) - \beta_1(\dot{\sigma} - \rho \dot{\varphi}(\sigma)) + \nu \varphi(\sigma). \quad (6)$$

Используя (5), получим соотношение

$$\ddot{\sigma} + \alpha_1 \ddot{\sigma} + \beta_1 \dot{\sigma} + (\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu) \varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1 \rho) \dot{\varphi}(\sigma) - \rho \ddot{\varphi}(\sigma) = 0. \quad (7)$$

Пусть $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, тогда (7) примет вид

$$(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)(p\sigma) + (\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu) \varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1 \rho)(p\varphi(\sigma)) - \rho(p^2 \varphi(\sigma)) = 0. \quad (8)$$

С учетом (8) получим операторное уравнение

$$(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)(p\sigma) + (-\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1 \rho)p + (\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu)) \varphi(\sigma) = 0. \quad (9)$$

Обозначим

$$M(p) = -\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1 \rho)p + (\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu). \quad (10)$$

Представим оператор $M(p)$ в виде

$$M(p) = (A_1 p + A_2)(1 - \tau p), \quad A_1, A_2, \tau \in \mathbb{R}_0^+.$$

Используя (10), получим равенство

$$-\tau A_1 p^2 + (A_1 - \tau A_2)p + A_2 = -\rho p^2 + (\Gamma - \alpha_1 \rho)p + (\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu). \quad (11)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях оператора p , найдем A_1, A_2, τ :

$$A_1 = \frac{\rho}{\tau}, \quad A_2 = \alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\rho}{\tau} - \tau(\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu) = (\Gamma - \alpha_1 \rho). \quad (13)$$

Уравнение (13) определяет взаимосвязь значений τ и ρ . Приведем (13) к виду

$$\tau^2(\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu) + \tau(\Gamma - \alpha_1 \rho) - \rho = 0. \quad (14)$$

Пусть для системы (2) выполнено неравенство (12); тогда

$$D = (\Gamma - \alpha_1 \rho)^2 + 4\rho(\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu) > 0, \quad -\rho < 0. \quad (15)$$

Из (15) следует, что уравнение (14) имеет единственный положительный корень

$$\tau = (-(\Gamma - \alpha_1 \rho) + \sqrt{D}) / (2(\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu)). \quad (16)$$

Используя (16), (15), (14), получим, что если $\rho = 0$, то $\tau = 0$. При $\tau = 0$ из (14) следует, что $\rho = 0$. Введем обозначение

$$N(p) = p^2 + \alpha_1 p + \beta_1. \quad (17)$$

Учитывая (10), (17), (11), (12), запишем уравнение (9) в виде

$$N(p)(p\sigma) + (A_1 p + A_2)(1 - \tau p)\varphi(\sigma) = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18) сделаем замену $\varphi(\sigma) = (F(\sigma) - \gamma)$, где

$$\gamma = \frac{\beta_1 \Omega}{\alpha_1 \Gamma - \beta_1 \rho - \nu} = \frac{\beta_1 \Omega}{A_2},$$

$\Omega = \text{const} > 0$, получим

$$N(p)(p\sigma) + (A_1 p + A_2)(1 - \tau p)F(\sigma) - A_2 \gamma = 0. \quad (19)$$

Соотношение (19) получается из операторного уравнения

$$p\sigma + \frac{(A_1 p + A_2)(1 - \tau p)}{N(p)} F(\sigma) = \Omega \quad (20)$$

умножением на оператор $N(p)$. При этом $\beta_1 \Omega = A_2 \gamma$. Для (19) введем обозначения

$$K_\varphi(p) = \frac{A_1 p + A_2}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1},$$

$K_\tau(p) = 1 - \tau p$, получим уравнение

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)F(\sigma) = \Omega. \quad (21)$$

Операторное уравнение (21) описывает динамику системы фазовой автоподстройки с линейным запаздыванием, $\sigma(t)$ — разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов,

$$\Omega = \frac{\Omega_H}{\Omega_y},$$

$\Omega_y = \text{const}$ — начальная расстройка, Ω_y — полоса удержания фазового кольца, $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p)$ — операторный коэффициент запаздывания, τ — время запаздывания, $F(\sigma)$ — характеристика фазового детектора. Таким образом, если для (2) выполняется неравенство (12), то система (2) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Время запаздывания определяется соотношением (16).

Определим систему дифференциальных уравнений для операторного уравнения (1) с учетом нелинейности запаздывания. В этом случае операторный коэффициент запаздывания удовлетворяет соотношению

$$K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx 1 - \tau p + \frac{1}{2!}\tau^2 p^2.$$

Используя $K_\tau(p)$, определим оператор $K_{\tau_1}(p) = 1 - \tau p + \tau_1 p^2$, зависящий от двух параметров τ и τ_1 . При $\tau_1 = \tau^2/2!$ получим равенство $K_{\tau_1}(p) = K_\tau(p)$.

Используя (2), рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + (b + q)\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma) - \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma), \quad (22)$$

где

$$q = \text{colon}(q_1, q_2) = \text{colon}(-\alpha_1\beta_1\rho_2; \beta_1\rho_2) = \beta_1\rho_2 \text{colon}(-\alpha_1; 1), \\ \rho_2 > 0, \quad \varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma, \quad \ddot{\varphi}(\sigma) = -\ddot{\varphi}(\sigma).$$

Систему (22) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 - \beta_1 x_2 + \nu\varphi(\sigma) - \alpha_1\beta_1\rho_2\varphi(\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1\rho_2\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = x_2 + \rho\varphi(\sigma) - \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma). \end{cases} \quad (23)$$

С учетом (23) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= \dot{x}_2 - \rho\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma) = x_1 - \Gamma\varphi(\sigma) + \beta_1\rho_2\varphi(\sigma) + \rho\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) + \rho_3\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma), \\ \ddot{\sigma} &= \dot{x}_1 - \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) + \rho\ddot{\varphi}(\sigma) + \beta_1\rho_2\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_2\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma) - \rho_3\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma). \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (24) позволяют представить первое уравнение системы (23) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} + \Gamma\dot{\varphi}(\sigma) - \rho\ddot{\varphi}(\sigma) - \beta_1\rho_2\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma) + \rho_3\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma) = \\ = -\alpha_1 \left(\ddot{\sigma} + \Gamma\varphi(\sigma) - \beta_1\rho_2\varphi(\sigma) - \rho\dot{\varphi}(\sigma) + \rho_2\ddot{\varphi}(\sigma) - \rho_3\ddot{\ddot{\varphi}}(\sigma) \right) - \\ - \beta_1 \left(\dot{\sigma} - \rho\varphi(\sigma) + \rho_2\dot{\varphi}(\sigma) - \rho_3\ddot{\varphi}(\sigma) + \nu\varphi(\sigma) - \alpha_1\beta_1\rho_2\varphi(\sigma) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (25) и оператор дифференцирования $p = d/dt$, получим соотношение

$$\begin{aligned} (p^2 + \alpha_1 p + \beta_1)(p\sigma) + (\alpha_1\Gamma - \beta_1\rho - \nu)\varphi(\sigma) + (\Gamma - \alpha_1\rho)(p\varphi(\sigma)) - \\ - \rho(p^2\varphi(\sigma)) + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)(p^2\varphi(\sigma) + (\rho_2 - \alpha_1\rho_3)(p^3\varphi(\sigma))). \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом обозначений (10), (17), уравнение (26) запишем в виде

$$N(p)(p\sigma) + M(p)\varphi(\sigma) + ((\rho_2 - \alpha_1\rho_3)p^3 + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)p^2)\varphi(\sigma) = 0. \quad (27)$$

Обозначим

$$L(p) = (\rho_2 - \alpha_1\rho_3)p^3 + (\alpha_1\rho_2 + \rho_3 - \beta_1\rho_3)p^2. \quad (28)$$

Представим оператор $L(p)$ в виде

$$L(p) = (A_1 p + A_2) \tau_1 p^2 = \tau_1 A_1 p^3 + \tau_1 A_2 p^2,$$

где A_1, A_2 определяются равенствами (12). Используя (28), получим

$$(\rho_2 - \alpha_1 \rho_3) p^3 + (\alpha_1 \rho_2 + \rho_3 - \beta_1 \rho_3) p^2 = \tau_1 A_1 p^3 + \tau_1 A_2 p^2. \quad (29)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях оператора p , найдем ρ_2, ρ_3

$$\begin{aligned} \rho_2 = \tau_1 A_1 + \alpha_1 \rho_3 &= \tau_1 A_1 + \frac{\alpha_1 \tau_1 A_2 - \alpha_1^2 \tau_1 A_1}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1} = \frac{\tau_1 A_1 - \beta_1 \tau_1 A_1 + \alpha_1 \tau_1 A_2}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}, \\ \alpha_1 \tau_1 A_1 + \alpha_1^2 \rho_3 + \rho_3 - \beta_1 \rho_3 &= \tau_1 A_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\rho_2 = \frac{\tau_1 A_1 - \beta_1 \tau_1 A_1 + \alpha_1 \tau_1 A_2}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}, \quad (30)$$

$$\rho_3 = \frac{\tau_1 A_2 - \alpha_1 \tau_1 A_1}{\alpha_1^2 - \beta_1 + 1}. \quad (31)$$

Если $\tau_1 = \tau^2/2!$, то соотношения (30), (31) примут вид

$$\rho_2 = \frac{(A_1 - \beta_1 A_1 + \alpha_1 A_2) \tau^2}{4(\alpha_1^2 - \beta_1 + 1)}, \quad \rho_3 = \frac{(A_2 - \alpha_1 A_1) \tau^2}{4(\alpha_1^2 - \beta_1 + 1)}. \quad (32)$$

В силу (30), (31), (29), уравнение (27) определит равенство

$$N(p)(p\sigma) + M(p)\varphi(\sigma) + ((A_1 p + A_2) \tau_1 p^2) \varphi(\sigma) = 0, \quad (33)$$

где $M(p) = (A_1 p + A_2)(1 - \tau p)$. В уравнении (33) сделаем замену

$$\varphi(\sigma) = (F(\sigma) - \gamma),$$

где $\gamma = \beta_1 \Omega / A_2$, $\Omega = \text{const} > 0$, получим

$$N(p)(p\sigma) + (A_1 p + A_2) (1 - \tau p + \tau_1 p^2) F(\sigma) - A_2 \gamma = 0. \quad (34)$$

Соотношение (34) получается из операторного уравнения

$$p(\sigma) + \frac{(A_1 p + A_2)(1 - \tau p + \tau_1 p^2)}{N(p)} F(\sigma) = \Omega \quad (35)$$

умножением на оператор $N(p)$. Для (35) обозначим

$$K_\varphi(p) = \frac{A_1 p + A_2}{p^2 + \alpha_1 p + \beta_1}, \quad K_{\tau_1}(p) = 1 - \tau p + \tau_1 p^2,$$

получим уравнение

$$p\sigma + K_\varphi(p) K_{\tau_1}(p) F(\sigma) = \Omega. \quad (36)$$

Уравнение (36) описывает динамику системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании. Таким образом, если в системе (22) значения ρ_2, ρ_3 , определяются соотношениями (30), (31) или соотношением (32) при $\tau_1 = \tau^2/2!$, то (22) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с учетом нелинейности в запаздывании.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2), где

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0;$$

тогда

$$\begin{aligned} c^T b &= -\Gamma, \quad c^T A = l^T, \quad l^T b = -\nu_1 < 0, \quad \text{rang } \|c, l\| = 2, \\ l^T A &= -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, \quad c^T A^{-1} b \neq 0, \quad \rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\alpha = 0,02, \quad \beta = 2,11, \quad \Gamma = 4, \quad \nu_1 = 1,24, \quad \gamma = 0,12, \quad \rho_1 = 0,588, \quad \rho_0 = 0,032,$$

$\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma)$ — периодическая функция с периодом $\Delta = 2\pi$, $\varphi(0) = 0$.

Численно-аналитическими методами [5, 6, 8–11] можно показать, что система (2) имеет устойчивый предельный цикл первого рода

$$z_1(t) = \text{colon} (x_1(t), x_2(t), \sigma_1(t))$$

с начальными условиями

$$x_1 = 1,89025, \quad x_2 = 8,74307, \quad \sigma_1 = 0, \quad T_{z_1} = 4,45675,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = 0,0008931,$$

где

$$\langle \dot{\sigma}_1 \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0.$$

Используя (16), определим запаздывание

$$\tau = 0,0777052548, \quad \tau_1 = \frac{\tau^2}{4} = 0,0015095266.$$

С учетом нелинейности запаздывания динамика системы фазовой автоподстройки описывается системой (23). Значение ρ_2 определяется равенством (32):

$$\rho_2 = 0,00089.$$

Численно-аналитическими методами [5, 6, 8–11] можно показать, что система (23) имеет устойчивый предельный цикл первого рода

$$\tilde{z}_1(t) = \text{colon} (\tilde{x}_{11}(t), \tilde{x}_{21}(t), \tilde{\sigma}_1(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_1 = 1,91077, \quad \tilde{x}_2 = 8,78266, \quad \tilde{\sigma}_1 = 0, \quad T_{\tilde{z}_1} = 4,45772,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_1 \rangle = 0,0008972.$$

Учет нелинейности в запаздывании приводит к увеличению среднего значения $\langle \dot{\tilde{\sigma}}_1 \rangle$ на 0,46%, что говорит об ухудшении характеристики режима синхронизации.

У системы (2) помимо цикла $z_1(t)$ существует еще один устойчивый предельный цикл $z_2(t)$ с начальными условиями

$$x_1 = 2,36543, \quad x_2 = 12,13685, \quad \sigma_2 = 0, \quad T_{z_2} = 4,29085,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma}_2 \rangle = 0,0012304.$$

Существование в системе (2) разночастотных предельных циклов первого рода позволяет сделать вывод о наличии фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (2) определяют режимы фазовой синхронизации.

У системы (23) также существует устойчивый предельный цикл первого рода

$$\tilde{z}_2(t) = \text{colon} (\tilde{x}_{12}(t), \tilde{x}_{22}(t), \tilde{\sigma}_2(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_{12} = 2,36334, \quad \tilde{x}_{22} = 12,13765, \quad \tilde{\sigma}_2 = 0, \quad T_{\tilde{z}_2} = 4,29073,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_2 \rangle = 0,0012401.$$

Для выбора наилучшего режима скрытой синхронизации системы (2) возникает необходимость проведения сравнительного анализа зависимости кривизны циклов системы (2) от ее координат. Для этого рассматривается расширенная система вида [10]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x), \end{cases} \quad (37)$$

где

$$\dot{K}(t) = \frac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$$

— производная кривизны цикла системы (1), а функции $g(x; \sigma)$, $g'(x; \sigma)$, $f(x; \sigma)$ и $f'(x; \sigma)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g(x; \sigma) &= (x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x'_1)^2, \\ g'(x; \sigma) &= 2(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)(x'_1 x'''_2 - x'''_1 x'_2) + 2(x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')(x'_2 \sigma''' - x'''_2 \sigma') + \\ &\quad + 2(x'_1 \sigma' - x'_1 \sigma'')(x'''_1 \sigma' - x'_1 \sigma'''), \\ f(x; \sigma) &= x_1'^2 + x_2'^2 + \sigma'^2, \quad f'(x; \sigma) = 2x'_1 x''_1 + 2x'_2 x''_2 + 2\sigma' \sigma''. \end{aligned}$$

В работах [6, 10] для циклов $z_1(t)$, $z_2(t)$ системы (37) проведен сравнительный анализ зависимости кривизны от фазовых координат этой системы.

Для выяснения вопроса о существовании нулей кривизны цикла системы (2) воспользуемся теоремой.

Теорема 1. Пусть для кривизны $K(t)$ цикла системы (2) существуют такие t^* , $r > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, что оператор

$$U \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K(t)^{\theta_1}}{(t - t^*)^{\theta_2}} + t + y \\ 2y \end{pmatrix},$$

на границе $\partial\omega$ множества

$$\omega = \{(t, y) : (t - t^*)^2 + y^2 \leq r^2\}$$

определяет векторное поле

$$Q \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} - U \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix},$$

для которого вращение на $\partial\omega$ не равно нулю $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$. Тогда существует такое t_0 , что $K(t_0) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы [3] оператор U имеет неподвижную точку на множестве ω ,

$$U \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K(t_0)^{\theta_1}}{(t_0 - t^*)^{\theta_2}} + t_0 + y_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K(t_0)^{\theta_1} \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

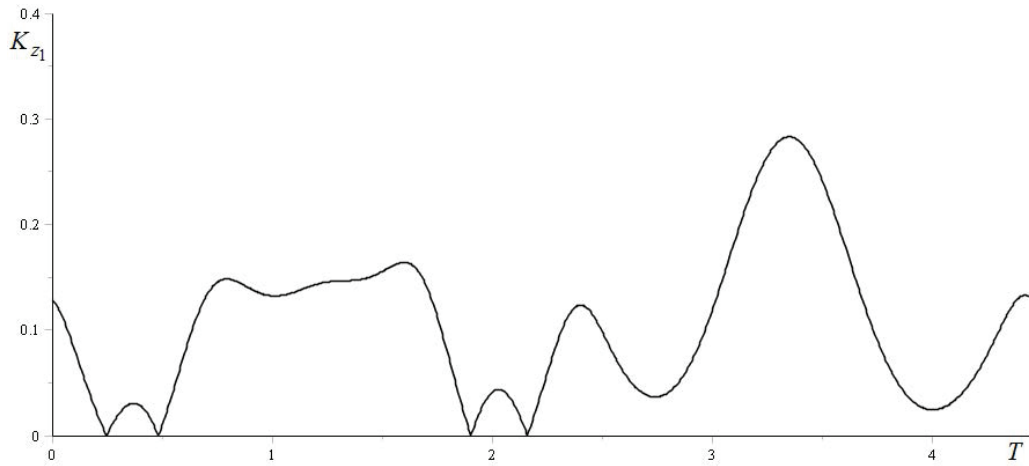
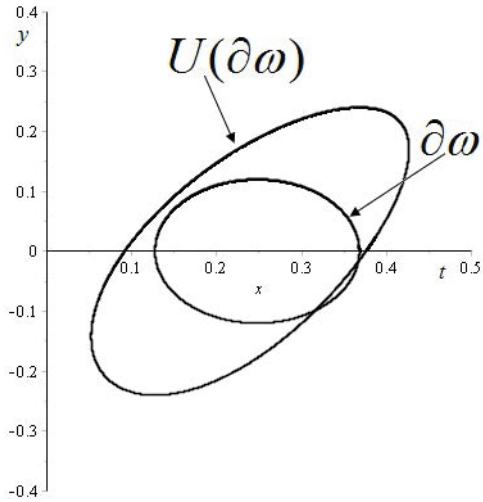
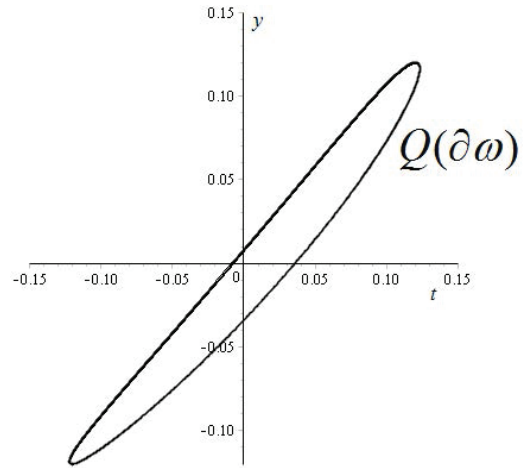
так что $K(t_0) = 0$. □

Теорема позволяет выяснять вопрос о существовании нулей у неотрицательно определенных функций. Рассмотрим кривизну $K_{z_1}(t)$ цикла $z_1(t)$ фазовой системы (2). На рис. 2 представлена зависимость кривизны этого цикла от времени на его периоде.

Для условий теоремы возьмем $r = 0,12$, $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 1$, в качестве значения $t^* = 0,2476$ выберем приближенное значения нуля производной $\dot{K}(t)$. На рис. 3 представлены множества $\partial\omega$ и $U(\partial\omega)$, а на рис. 4 изображено векторное поле $Q(\partial\omega)$, для которого $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$. В силу теоремы функция $K(t)$ имеет ноль на промежутке $[t^* - r; t^* + r]$.

Рассмотрим систему (2) в случае увеличения запаздывания. Пусть

$$\alpha_1 = 0,02, \quad \beta_1 = 2,11, \quad \Gamma = 4, \quad \nu_1 = 1,24, \quad \gamma = 0,12, \quad \rho = 0,9;$$

Рис. 2. Кривизна цикла $z_1(t)$ фазовой системы (2).Рис. 3. Множества $\partial\omega$ и $U(\partial\omega)$.Рис. 4. Векторное поле $Q(\partial\omega)$, для которого $\gamma(Q, \partial\omega) \neq 0$.

тогда увеличение значения ρ приводит к увеличению

$$\tau = 0,11699, \quad \tau_1 = \frac{\tau^2}{4} = 0,003421585770.$$

Система (2) имеет цикл $z_3(t)$ с начальными условиями

$$x_1 = 5,01069, \quad x_2 = 10,32156, \quad \sigma_3 = 0, \quad T_{z_3} = 4,40252,$$

для которого

$$\langle \dot{\sigma}_3 \rangle = 0,0010535.$$

В свою очередь, система (23) также имеет устойчивый предельный цикл с начальными условиями

$$\tilde{z}_3(t) = \text{colon}(\tilde{x}_{13}(t), \tilde{x}_{23}(t), \tilde{\sigma}_3(t))$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}_{13} = 4,20745, \quad \tilde{x}_{23} = 10,53717, \quad \tilde{\sigma}_3 = 0, \quad T_{\tilde{z}_3} = 4,43369,$$

для которого

$$\langle \dot{\tilde{\sigma}}_3 \rangle = 0,0010828.$$

Таким образом, увеличение времени запаздывания в системе фазовой автоподстройки приводит к увеличению характеристики синхронных режимов на 2,78%, что приводит к необходимости учитывать нелинейности в запаздывании при исследовании систем фазовой автоподстройки.

3. Заключение. В работе проведено исследование системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Для этой системы определены условия существования нескольких режимов фазовой синхронизации. Проведён анализ влияния запаздывания на фазовую мультистабильность. Рассмотрен пример электрической цепи фильтра нижних частот и найдены условия, определяющие значения коэффициентов фильтра нижних и запаздывания для вынужденной фазовой синхронизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
2. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
4. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка// Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Мат. мех. информ. — 2011. — 11, № 1. — С. 70–81.
5. Мамонов С. С., Ионов И. В., Харламова А. О. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации// Чебышевский сб. — 2019. — 20, № 2. — С. 244–258.
6. Мамонов С. С., Ионов И. В., Харламова А. О. Пространственные характеристики циклов систем дифференциальных уравнений// в кн.: Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Вып. 1. — Рязань: РГУ им. С. А. Есенина, 2020. — С. 39–45.
7. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием// Вестн. Рязан. гос. радиотехн. ун-та. — 2017. — № 62. — С. 26–35.
8. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 148. — С. 83–92.
9. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионов И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений// Вестн. РАЕН. — 2018. — 18, № 4. — С. 51–57.
10. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионов И. В. Кривизна колебательных циклов фазовых систем// Вестн. РАЕН. — 2019. — 19, № 2. — С. 105–110.
11. Харламова А. О. Асинхронные режимы фазовых систем// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 148. — С. 101–108.
12. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. — М.: Связь, 1972.

Мамонов Сергей Станиславович

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионов Ирина Викторовна

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина

E-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru