ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 66–75
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-66-75

УДК 517.929

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ СЛАБО ДИССИПАТИВНОГО ВАРИАНТА УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ

© 2022 г. **А. Н. КУЛИКОВ**

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для слабо диссипативного варианта комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау в случае, когда период (длина волны) мал. Показана возможность существования конечномерных инвариантных торов. Для решений, принадлежащих таким торам, получены асимптотические формулы. Изучен вопрос об устойчивости инвариантных торов. При этом оказалось, что все инвариантные торы, кроме торов размерности один, т.е. предельных циклов, неустойчивы. Использованы такие методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, как метод интегральных (инвариантных) многообразий и метод нормальных форм, а также аппарат теории возмущений.

Ключевые слова: комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау, периодическая краевая задача, инвариантный тор, устойчивость, асимптотическая формула, малый параметр.

INVARIANT TORI OF THE WEAKLY DISSIPATIVE VERSION OF THE GINZBURG—LANDAU EQUATION

© 2022 **A. N. KULIKOV**

Abstract. We consider a periodic boundary value-problem for a weakly dissipative variant of the complex Ginzburg– Landau equation in the case where the period (wavelength) is small. The possibility of the existence of finite-dimensional invariant tori is proved. For solutions that belong to such tori, asymptotic formulas are obtained. We prove that all invariant tori, except for tori of dimension one (i.e., limit cycles), are unstable. We used various methods of the theory of dynamical systems with an infinite-dimensional space of initial conditions, for example, the method of integral (invariant) manifolds, the method of normal forms, and methods of perturbation theory.

Keywords and phrases: complex Ginzburg–Landau equation, periodic boundary-value problem, invariant torus, stability, asymptotic formula, small parameter.

AMS Subject Classification: 35B41, 35Q56, 37G35

1. Введение. Одним из самых известных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными считают комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау (см., например, [11,15]). Эта популярность обусловлена прежде всего широтой его приложений в физике (см. [11]), химической кинетике [15]. В случае, когда неизвестная комплекснозначная функция $u(t, y)$ зависит от одной пространственной переменной y, это уравнение, как правило, записывают в следующем виде:

$$u_\tau = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{yy}, \tag{1}$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2021-1397).

где $c, a, b \in \mathbb{R}$ и $a \geqslant 0$. Представляет интерес и вариант, когда неизвестная комплекснозначная функция $u = u(\tau, y_1, \dots, y_n)$ зависит от эволюционной переменной τ и нескольких пространственных переменных [12, 14].

С точки зрения приложений к нелинейной оптике и к гидродинамике [5, 7, 18] также представляет интерес уравнение (1), в котором $a = 0$. В таком случае дифференциальное уравнение (1) принято называть слабодиссипативным вариантом уравнения Гинзбурга—Ландау или обобщенным кубическим уравнением Шредингера.

Будем изучать периодическую краевую задачу для слабодиссипативной версии уравнения (1):

$$u_\tau = u - (1 + ic)u|u|^2 - idu_{yy}, \tag{2}$$

$$u(\tau, y + 2l) = u(\tau, y), \tag{3}$$

где $l > 0, c, d \in \mathbb{R}$ и $d \neq 0$. Для определенности будем считать, что $d > 0$. В той задаче, которую предполагается изучить, последнее ограничение не является существенным. Следует особо подчеркнуть, что при анализе ряда вопросов варианты $d > 0$ и $d < 0$ необходимо различать. У классической версии нелинейного уравнения Шредингера в зависимости от сочетания знаков d и c такое уравнение квалифицируют как фокусирующее или дефокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (см., например, [16]).

Если теперь положить

$$y = \frac{l}{\pi}x, \quad \tau = \frac{1}{d}\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 t,$$

то в новых переменных краевая задача (2), (3) перепишется в следующем виде:

$$u_t = \varepsilon[u - (1 + ic)u|u|^2] - iu_{xx}, \tag{4}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{5}$$

где $\varepsilon = (l/\pi)^2/d$. Во многих случаях при анализе задач из оптики величина l (длина полуволны) достаточно мала. В оптике диапазон длин электромагнитных волн колеблется от 10^{-1} до 10^{-6} м [2]. Поэтому вполне естественно с физической точки зрения считать ε малым положительным параметром.

Уместно подчеркнуть, что уравнение (1) дополненное периодическими краевыми условиями (3) (см., например, [11]). Отдельно заметим, что простой подстановкой можно проверить наличие у краевой задачи (1), (3) одномодовых периодических по τ решений вида

$$u_n(\tau, y) = \eta_n \exp(i\sigma_n\tau + inx + i\varphi),$$

где $\eta_n = \sqrt{1 - a(\pi n/l)^2}$, $\sigma_n = -c\eta_n^2 - b(\pi n/l)^2$, φ — произвольная действительная постоянная. Такие решения существуют, если $1 - a(\pi n/l)^2 > 0$. При $a = 0$ существует счетный набор одномодовых τ периодических решений. Вопрос о существовании многомодовых периодических или квазипериодических решений по эволюционной переменной τ (t после нормировок) существенно сложнее. В данной работе его удалось рассмотреть, но пока в частном случае, когда анализу подлежит краевая задача (4), (5).

2. Постановка задачи. Нормальная форма. В данном разделе и далее будем рассматривать краевую задачу (2), (3) уже в перенормированном виде, т.е. задачу (4), (5), в которой $u(t, x) = u_1(t, x) + iu_2(t, x)$ — комплекснозначная функция, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, т.е. ε далее интерпретируем как малый параметр. Если положить $\varepsilon = 0$, то получим вспомогательную линейную краевую задачу

$$u_t = -iu_{xx}, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \tag{6}$$

Обе краевые задачи дополним начальным условием

$$u(0, x) = f(x) = f_1(x) + if_2(x). \tag{7}$$

Далее будем считать, что $f(x) \in H_2^2$, где через H_2^2 обозначено гильбертово пространство комплекснозначных функций, которые по переменной x имеют период 2π и их обобщенные производные $f'(x), f''(x) \in L_2(-\pi, \pi)$.

Из теорем вложения Соболева [9] вытекает, что $f(x)$, $f'(x)$ — непрерывные функции. Кроме того, $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(ikx),$$

где последовательность коэффициентов $\{f_k\}\in l_2^2$ — дискретному аналогу пространства H_2^2. В частности, сходятся ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|f_k|^2,\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2|f_k|^2,\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}k^4|f_k|^2.$$

Сразу отметим, что линейная начально-краевая задача (6), (7) имеет решение вида

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k q_k(t)\exp(ikx),$$

где $q_k(t)=\exp(ik^2t)$. Решение начально-краевой задачи (6), (7) существует при всех t, если $\{f_k\}\in l_2^2$ и при любом $t=t_0$ справедливо включение $u(t_0,x)=f_{t_0}(x)\in H_2^2$.

Из результатов работ [10, 17] вытекает, что нелинейная начально-краевая задача (4), (5), (7) локально корректно разрешима, а ее решения могут быть записаны в виде ряда

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(ikx)\quad (k\in\mathbb{Z}), \tag{8}$$

где через $\mathbb{Z}$ обозначено множество целых чисел. Следовательно, коэффициенты ряда (8) удовлетворяют счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot u_k = ik^2u_k+\varepsilon(u_k-(1+ic)F_k(u)), \tag{9}$$

где теперь $u=\{u_k(t)\}$ последовательность комплекснозначных функций, принадлежащих при рассматриваемых t гильбертову пространству l_2^2. Здесь нелинейный функционал

$$F_k(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u|u|^2\exp(-ikx)dx,\quad k=0,\pm1,\ldots$$

Учет разложения (8) позволяет записать нелинейный оператор $F_k(u)$ в следующей форме:

$$F_k(u)=\sum_{\mathbb{Z}_k} u_m u_n \overline{u_p},$$

где через $\mathbb{Z}_k$ обозначено подмножество множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Числа $m,n,p\in\mathbb{Z}_k$, если $m+n-p=k$. В свою очередь, подмножество $\mathbb{Z}_k$ разделим еще на два множества $\mathbb{Z}_{k,res}$ и $\mathbb{Z}_{k,0}$. Если $(m,n,p)\in\mathbb{Z}_k$ и $m^2+n^2-p^2=k^2$, то этот набор целых чисел принадлежит $\mathbb{Z}_{k,res}$. Остальные элементы $\mathbb{Z}_k$ отнесем к $\mathbb{Z}_{k,0}$. Оба подмножества $\mathbb{Z}_{k,0}$ и $\mathbb{Z}_{k,res}$ непусты. Действительно, $\mathbb{Z}_{k,res}$ содержит, например, тройки вида (k,n,n), где $n,k\in\mathbb{Z}$. Естественно, существуют и иные тройки целых чисел, для которых $m+n-p=k$, но не принадлежащих $\mathbb{Z}_{k,res}$ и, следовательно, входящих в $\mathbb{Z}_{k,0}$ (так, например, набор $(k-1,k+1,k)\notin\mathbb{Z}_{k,res}$). Для целых чисел из $\mathbb{Z}_{k,0}$ справедливо неравенство

$$\Delta_{m,n,p}(k)=|m^2+n^2-p^2-k^2|\geqslant 2.$$

Действительно, для чисел из $\mathbb{Z}_k$ справедливо тождество

$$m^2+n^2-p^2-k^2=-2(m-k)(n-k),$$

где $m-k,n-k\in\mathbb{Z}$, но они отличны от нуля, если $m\neq k$, $n\neq k$. Следовательно, такие наборы m, n, p включаются в $\mathbb{Z}_{k,0}$.

Последние два замечания позволяют записать нелинейный функционал $F_k(u)$ в виде суммы

$$F_k(u)=G_k(u)+Q_k(u),$$

где $k \in \mathbb{Z}$,

$$G_k(u) = 2u_kV(u) - u_k|u_k|^2, \quad V(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m|^2, \quad Q_k(u) = \sum_{\mathbb{Z}_{k,0}} u_m u_n \overline{u_p},$$

т.е. к $Q_k(u)$ отнесены «нерезонансные» слагаемые кубической формы ($m + n - p = k$, но $m^2 + n^2 - p^2 \neq k^2$).

Пусть$(m, n, p) \in \mathbb{Z}_k$ — тройка целых чисел, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 — достаточно малое положительное число. Положим

$$u_k = v_k + \varepsilon W_k(v), \tag{10}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $v = \{v_k\}$, а функционал $W_k(v)$ определен равенством

$$W_k(v) = \sum_{\mathbb{Z}_{k,0}} \beta_{m,n,p}(k) v_m v_n \overline{v_p}.$$

Подчеркнем, что замену (10) можно рассматривать как нелинейный оператор, существующий из $l_2^2 \times (0, \varepsilon_0)$ в l_2^2:

$$u = \Phi(v, \varepsilon), \quad u = \{u_k\} \in l_2^2, \tag{11}$$

где в правой части равенства (11) $\Phi = \{\Phi_k\}$. При $\varepsilon = 0$ получим, что нелинейный оператор, определенный равенством (11), равен тождественному $(\Phi(v, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = E)$. Следовательно, при достаточно малых ε нелинейный оператор $\Phi(v, \varepsilon)$ имеем обратный достаточно гладкий нелинейный оператор (см. [10, § 4.4]). Пусть $\beta_{m,n,p}(k) = (1 + ic)/\Delta_{m,n,p}(k)$, если $m, n, p \in \mathbb{Z}_{0,k}$. Очевидно, что $|\beta_{m,n,p}(k)| \leqslant \sqrt{1 + c^2}/2$ $(|\Delta_{m,n,p}(k)| \geqslant 2)$.

При таком выборе $W_k(v)(\beta_{m,n,p}(k))$ можно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Замены* (10) *приводят систему дифференциальных уравнений* (9) *к следующему виду:*

$$\dot{v}_k = ik^2 v_k + \varepsilon\Big(v_k + (1 + ic)v_k\big(|v_k|^2 - 2V(v)\big)\Big) + \varepsilon^2 R(v, \varepsilon), \tag{12}$$

где $k \in \mathbb{Z}$,

$$V(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n|^2,$$

$R(v, \varepsilon)$ *— достаточно гладкий нелинейный функционал, действующий из* $l_2^2 \times (0, \varepsilon_0)$ *в* $\mathbb{C}$.

Вместе с системой (12) рассмотрим укороченный вариант данной системы, который достаточно часто называют нормальной формой. Иногда используют несколько иное название «квазинормальная» форма, если речь идет о бесконечномерной динамической системе.

На первом этапе целесообразно вместо системы (12) изучать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_k = ik^2 v_k + \varepsilon v_k\Big(1 + (1 + ic)\big(|v_k|^2 - 2V(v)\big)\Big). \tag{13}$$

Систему (13) будем анализировать в следующем разделе.

3. Анализ нормальной формы. Для анализа системы дифференциальных уравнений (13) удобно и целесообразно перейти к переменным «действие-угол» (см. [1, гл. 10]). Положим

$$v_k = r_k \exp(i\varphi_k), \quad r_k = r_k(t), \quad \varphi_k = \varphi_k(t). \tag{14}$$

Замены (14) позволяют переписать систему (13) в действительной форме:

$$\dot{r}_k = \varepsilon r_k[1 + r_k^2 - 2\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2], \tag{15}$$

$$\dot{\varphi}_k = k^2 + \varepsilon c[r_k^2 - 2\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2]. \tag{16}$$

Напомним, что по постановке задачи последовательность $\{r_k(t)\}$ при всех рассматриваемых t принадлежит гильбертову пространству l_2^2, т.е. сходятся ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 r_k^2, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 r_k^2.$$

При этом систему (15), (16) удобно переписать в следующей форме:

$$\dot{\rho}_k = 2\varepsilon\rho_k[1 + \rho_k - 2V(p)], \tag{17}$$

$$\dot{\varphi}_k = k^2 + \varepsilon c[\rho_k - 2V(\rho)], \tag{18}$$

где использовано обозначение

$$V(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m,$$

$\rho_k \geqslant 0$ и $\{\sqrt{\rho_k}\} \in l_2^2$ при всех t. В частности, ряд

$$V(\rho) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m$$

сходится. Наконец, $\rho_k = r_k^2$.

Лемма 2. *Кроме нулевого состояния равновесия S_0 ($\rho_j = 0$ при всех $j \in \mathbb{Z}$) система дифференциальных уравнений (17) имеет ненулевые состояния равновесия S_m, у каждого из которых есть m ненулевых координат, а остальные равны нулю. Подробнее, $\{\rho_k\} \in S_m$, если $\rho_{j_q} = 1/(2m-1)$ при $k = j_q$, $q = 1, \dots, m$, но $\rho_k = 0$ при $k \neq j_q$ ($q = 1, \dots, m$).*

Прежде чем приступить к доказательству леммы 2, отметим в качестве примера, что S_1 содержит «однокомпонентные» состояния равновесия $(\dots, 0, 1, 0, \dots)$, где единица находится на произвольном месте бесконечной последовательности, а остальные ее компоненты равны 0. Состояние равновесия S_2 содержит элементы вида $(\dots, 0, 0, 1/3, 0, \dots, 0, 1/3, 0, \dots)$, где $1/3$ равны две произвольные координаты бесконечной последовательности, а остальные, естественно, равны нулю.

Координаты состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (17) находим как решения системы алгебраических уравнений

$$\rho_k[1 + \rho_k - 2V(\rho)] = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Отметим, что у системы (19) есть тривиальное решение $\rho_k = 0$.

Самый простой вариант ненулевого решения у системы (19) возникает, если одно $\rho_j \neq 0$, а остальные координаты $\rho_k = 0$, если $k \neq j$. Итак, $\rho_j = 1$.

Рассмотрим более общий случай, когда по-крайней мере две координаты состояния равновесия отличны от нуля. Например, $\rho_k \neq 0$ и $\rho_n \neq 0$, где $k, n \in \mathbb{Z}$ и $k \neq n$. Следовательно, справедливы два следующих равенства:

$$1 + \rho_k - 2V(\rho) = 0, \quad 1 + \rho_n - 2V(\rho) = 0.$$

Ясно, что они могут быть выполнены тогда и только тогда, если $\rho_k = \rho_n$.

Из этих замечаний вытекает, что для любого состояния равновесия S_m характерно выполнение следующего. Пусть η_{j_q} ненулевые координаты нетривиального состояния равновесия. Тогда с необходимостью выполнено условие $\eta_{j_q} = \eta_{j_1}$ (они все равны). Очевидно, что любое нетривиальное состояние равновесия не может иметь бесконечного числа координат, отличных от нулевого, т.е. $\eta_{j_q} > 0$, где набор индексов принадлежит бесконечному подмножеству $\mathbb{Z}$ или совпадает с $\mathbb{Z}$. В этом случае $\eta_{j_q} = \eta > 0$ и такая последовательность не принадлежит даже пространству l_1. Напомним, что бесконечная последовательность $\{a_j\}$ принадлежит l_1, если сходится ряд

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|.$$

Подчеркнем еще раз, что ненулевое состояние равновесия может иметь лишь конечное число ненулевых компонент. При этом с необходимостью $\eta_{j_p} = \eta_{j_l} = \eta_m$, где m — число таких координат. Следовательно, получаем, что

$$1 + \eta_m - 2\sum_{q=1}^{m} \eta_m = 1 + \eta_m - 2m\eta_m = 0, \quad \text{т.е.} \quad \eta_m = \frac{1}{2m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Лемма 3. *Состояния равновесия S_0 и S_m ($m \geqslant 2$) неустойчивы, а все $S_1(j)$ ($j \in \mathbb{Z}$) асимптотически устойчивы.*

Через $S_1(j)$ обозначено состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (17), у которого координата с номером j равна 1, а все остальные равны нулю. Например, $(\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ — здесь $\eta_0 = 1$, а $\ldots, \eta_k = 0$, если $k \neq 0$.

Доказательство леммы 3. Покажем сначала, что S_0 неустойчиво. Напомним, что фазовым пространством системы дифференциальных уравнений (13) будет l_2^2. Поэтому сходятся ряды

$$V(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \rho_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 \rho_k.$$

Пусть

$$Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k^2$$

— также сходящийся ряд. Справедливо равенство

$$\dot{V} = 2\varepsilon[V - 2V^2 + Q],$$

полученное сложением всех компонент системы (17). Пусть в начальный момент времени мала величина $V(0)$. Например, $V(0) < \delta < 1/2$, то до тех пор, пока $V(t) < 1/2$, заведомо справедливо неравенство

$$V - 2V^2 + Q > 0$$

и, следовательно, функция $V(t) = V(p(t))$ возрастает, т.е. решения системы дифференциальных уравнений (17) с достаточно малыми начальными условиями покидают окрестность нулевого решения уже в смысле нормы гильбертова пространства l_2, а также l_2^2.

Перейдем теперь к анализу устойчивости S_m, где m число ненулевых компонент состояния равновесия, т.е. $\rho_{j_q} = \eta_m = 1/(2m-1)$, если $q = 1, \ldots, m$, а остальные координаты нулевые. Положим

$$\rho_{j_q} = \eta_m + y_{j_q}, \quad q = 1, \ldots, m, \quad \rho_k = y_k, \quad k \neq j_q.$$

В результате замены получим новую систему дифференциальных уравнений для переменных y_j. Эти уравнения следует разбить на две группы дифференциальных уравнений. В первую группу таких уравнений входят m уравнений вида

$$\dot{y}_q = 2\varepsilon(\eta_m + y_q)(y_q - 2V_1(y) - 2V_2(y)), \tag{20}$$

а во вторую — остальные

$$\dot{y}_k = 2\varepsilon y_k[-\eta_m - 2V_1(y) - 2V_2(y) + y_k]. \tag{21}$$

Здесь упрощена запись для индексов в первой группе уравнений $y_q = y_{j_q}$ и, следовательно, первая подсистема насчитывает m уравнений, а во вторую входят остальные, т.е. те, где $k \neq j_q$. В системах дифференциальных уравнений (20), (21)

$$V_1 = \sum_{q=1}^{m} y_q, \quad V_2(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} y_k.$$

При формировании систем дифференциальных уравнений (20), (21) использованы равенства

$$1 - (2m-1)\eta_m = 0, \quad 1 - 2m\eta_m = -\eta_m,$$

а через $\mathbb{Z}_*$ обозначено множество целых чисел, отличных от $1, \ldots, m$.

Система дифференциальных уравнений (20), (21) имеет инвариантное многообразие M_m размерности m, выделяемое равенствами $y_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_*$. Из результатов и построений работы [6] вытекает, что это многообразие будет инерциальным многообразием для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (20), (21). В частности, все $y_k \to 0$, если $k \in \mathbb{Z}_*$. В свою очередь, на инерциальном многообразии M_m ($\dim M_m = m$) получаем конечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту систему можно записать в следующем виде:

$$\dot{v} = Av + F(v), \tag{22}$$

где $v = \mathrm{colon}(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $A = \{a_{jn}\}$, где $j, n = 1, \dots, m$, $a_{jj} = -\eta_m = -1/(2m-1)$, $a_{jn} = -2\eta_m$, если $j \neq n$. Наконец, нелинейная вектор-функция $F(v)$ имеет m компонент $F_q(v)$. Каждая из них определена равенством

$$F_q(v) = y_q(y_q - 2V_1(y)), \quad q = 1, \dots, m, \quad V_1(y) = \sum_{q=1}^{m} y_q.$$

Система дифференциальных уравнений (22) имеет нулевое состояние равновесия, соответствующее состоянию равновесия S_m системы дифференциальных уравнений (20), (21).

Далее будем различать два случая: $m = 1$ и $m \geqslant 2$.

Если $m \geqslant 2$, то матрица A имеет собственное число $\lambda_1 = -1$, которое соответствует, как легко проверить, собственному вектору $e_1 = \mathrm{colon}(1, \dots, 1)$. Кроме того, матрица A имеет собственное значение $\lambda_2 = \eta_m > 0$ кратности $m-1$, которому отвечают собственные элементы (собственный элемент при $m = 2$) $e_q = \mathrm{colon}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, где $\beta_1 = 1$, $\beta_q = -1$ и $\beta_j = 0$, если $j \neq 1$ и q, $q = 2, \dots, m$. Следовательно, при $m \geqslant 2$ нулевое решение неустойчиво.

Если $m = 1$, то вместо системы (22) имеем скалярное дифференциальное уравнение ($q = 1$)

$$\dot{y}_1 = -y_1 - y_1^2,$$

у которого, очевидно, нулевое решение асимптотически устойчиво. Лемма 3 доказана. □

Пусть S_m — какое-либо выделенное состояния равновесия с m отличными от нуля координатами: $\eta_{j1} = 1/(2m-1), \dots, \eta_{jm} = 1/(2m-1)$. Если вернуться к нормальной форме в комплексной форме записи, т.е. к системе дифференциальных уравнений (13), то состоянию равновесия S_m соответствует инвариантный тор T_m ($\dim T_m = m$)

$$v_{j_q} = \sqrt{\frac{1}{2m-1}}\exp(i\varphi_{j_q}), \quad v_k = 0, \tag{23}$$

где $k \neq j_1, \dots, j_q$ — выбранный набор индексов. Для решений, принадлежащих T_m, справедлива формула

$$v_{j_q}(t) = \sqrt{\frac{1}{2m-1}}\exp(i\sigma_{j_q}(t + h_{j_q})), \quad v_k = 0, \tag{24}$$

если $k \neq (j_1, \dots, j_m)$, $\sigma_{j_q} = j_q^2 - c\varepsilon$. Соответствующие значения частот σ_{j_q} получаем после интегрирования уравнений (18) для угловых переменных для соответствующих компонент $\varphi_k(t)$. При этом учтено, что для координат состояний равновесия системы (19) справедливо равенство $\rho_{j_q} - 2V(\rho) = -1$, а также равенства (23).

Решения (24) формируют при $m \geqslant 2$ инвариантный тор T_m системы дифференциальных уравнений (13), размерность которого равна m. Подчеркнем, что в ситуации общего положения тор T_m нерезонансный (см. [13, гл. 4]). При $m = 1$ получаем орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл T_1. Естественно, что торы T_m ($m \geqslant 2$) седловые (неустойчивые).

4. Инвариантные торы основной краевой задачи. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (12). Ее можно трактовать как возмущенный вариант системы (12), которую называют нормальной формой. Из результатов [1,6,8] (в частности, теоремы о сохранении инвариантных торов при возмущениях) и результатов, полученных в предыдущем разделе, вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 4. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *инвариантному тору* T_m *нормальной формы* (13) *соответствует тор* $T_m(\varepsilon)$ *уже основной системы дифференциальных уравнений* (12). *При этом* $T_m(0) = T_m$ *с сохранением свойств устойчивости. Эти торы могут быть заданы уравнениями*

$$v_{j_q} = \sqrt{\eta_m}\exp(i\varphi_{j_q}) + h_{j_q}(\varphi_m, \varepsilon), \quad q = 1, \dots, m, \quad v_k = h_k(\varphi_m, \varepsilon), \quad k = j_1, \dots, j_m.$$

Подчеркнем, что эти функции $h_k, h_{j_1}, \dots, h_{j_m}$ обладают следующими свойствами:

1. Все функции $h_k, h_{j_1}, \dots, h_{j_m}$ достаточно гладко зависят от своих аргументов;
2. $h_l(\varphi_m, 0) = 0$ при всех возможных l;
3. эти функции 2π-периодические функции φ_{j_q} при всех j_q $(q = 1, \dots, m)$.

Наконец, использовано обозначение $\varphi_m = (\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_m})$, где φ_{j_q} функции переменного t при всех рассматриваемых j_q. Их хотя бы приближенно находим после интегрирования уравнения (18), но теперь, естественно, $\varphi_{j_q}(t) = \sigma_{j_q}(\varepsilon)t + h_{j_q}$, $\sigma_{j_q}(\varepsilon) = j_q^2 - \varepsilon c + o(\varepsilon)$, $h_{j_q} \in \mathbb{R}$.

Все эти построения и результаты работ [3, 4] позволяют заключить о справедливости утверждения, относящегося к краевой задаче (4), (5).

Теорема 1. *Существует такое* $\varepsilon_0(m_0) > 0$, *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *краевая задача* (4), (5) *имеет торы* $T_{*m}(\varepsilon)$ *соответствующие любому состоянию равновесия* S_m, *у которого отличны от нуля* m *координат с номерами* $j_1, \dots, j_m$, *для которых* $j_1^2 + \ldots + j_m^2 \leqslant M_0$. *Торы* $T_{*m}(\varepsilon)$ *наследуют устойчивость торов* $T_m(\varepsilon)$ *системы дифференциальных уравнений* (12) *и в итоге устойчивость состояний равновесия* S_m. *Для решений, принадлежащих тору* $T_{*m}(\varepsilon)$, *справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{\eta_m}\sum_{q=1}^{m}\exp(ij_q x + i\sigma_{j_q}(\varepsilon)(t + h_{j_q})) + O(\varepsilon). \tag{25}$$

Напомним, что $\sigma_{j_q}(\varepsilon) = j_q^2 - \varepsilon c$. *Символ* $O(\varepsilon)$ *заменяет достаточно гладкие функции* $U(\varphi_m, \varepsilon, x)$.

Равенство (25) является следствием формул (23), (24) и замен из второго раздела.

Отметим, что асимптотические формулы (25) могут быть уточнены. Например, возможно в явном виде выписать слагаемые, имеющие порядок ε.

Теорема 1 относится к вспомогательной краевой задаче (4), (5). Если возвратиться к первоначальным переменным, то для решений, принадлежащих торам, формулу (25) следует переписать в следующем виде:

$$u(\tau, y) = \sqrt{\eta_m}\sum_{q=1}^{m}\exp\left(ij_q\frac{\pi}{l}y + i\sigma_{j_q}(\varepsilon)d\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2(\tau + h_{j_q})\right) + O(\varepsilon),$$

где h_{j_q} — такие произвольные действительные постоянные. Подчеркнем, что

$$\sigma_{j_q}(\varepsilon)d\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \sigma_{j_q}(\varepsilon)/\varepsilon,$$

т.е. в первоначальных переменных получаем быстро осциллирующие решения.

В заключение этого раздела напомним, что для определенности был изучен вариант уравнения (2), в котором предполагалось, что $d > 0$. Если же $d < 0$, то результаты аналогичны. Вместо уравнения (4) в таком случае получим уравнение

$$u_t = \varepsilon[u - (1 + ic)u|u|^2] + iu_{xx},$$

которое следует анализировать вместе с периодическими краевыми условиями (5). Далее, повторяя шаг за шагом построения при анализе краевой задачи (4), (5), приходим к теореме 1. В частности, к формуле (25) для решений, принадлежащих инвариантным торам с нескольким изменением. В формуле (25) следует $\sigma_{j_q}(\varepsilon)$ заменить на $\omega_{j_q}(\varepsilon) = -j_q^2 - \varepsilon c$. Естественно, и в этом случае члены, обозначенные $O(\varepsilon)$, могут быть уточнены как в случае формулы (25), но с соответствующими и небольшими поправками.

5. Заключение. Если $m = 1$, то речь идет не о торе, а о цикле. При этом для их отыскания не обязательно использовать построения предыдущих разделов. Одномодовые t-периодические решения находятся точно и могут быть записаны в виде

$$u_n(t,x) = \exp(inx + i\sigma_n(t+h)),$$

где h — произвольная действительная постоянная, $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = n^2 - \varepsilon c$. Эти решения были найдены в более общей ситуации для слабодиссипативного варианта уравнения Гинзбурга—Ландау. В нашем случае эти периодические решения устойчивы (см., например, [14], где изучен и более общий случай об устойчивости циклов). Впрочем, в этом можно было убедиться и в данной работе, если, конечно, изучать краевую задачу (4), (5), т.е. если слабодиссипативное уравнение содержит малый параметр ε. В работе [14] использовалась иная методика для анализа устойчивости циклов.

Возвратимся к формуле (25). Если рассмотреть решение $u(t,x)$ только как функцию x, а t временно интерпретировать как малый параметр, то можно отметить следующее. Функция $u(t,x)$ такова, что ее норма в $L_2(0,2\pi)$ равна

$$\|u(t,x)\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |u(t,x)|^2 dx} = \sqrt{\frac{m}{2m-1}}$$

и близка к $1/\sqrt{2}$ при больших m.

Иная ситуация возникает, если у решений, принадлежащих $T_{*m}(\varepsilon)$, вычислить норму в фазовом пространстве, т.е. величину

$$\|u(t,x,\varepsilon)\|_{H_2^2} = \|u(t,x,\varepsilon)\|_{L_2} + \|u_x(t,x,\varepsilon)\|_{L_2} + \|u_{xx}(t,x,\varepsilon)\|_{L_2}.$$

Очевидно, что $\|u(t,x,\varepsilon)\|_{H_2^2} \geqslant \|u_{xx}(t,x,\varepsilon)\|_{L_2}$. При этом, при любом $t \in \mathbb{R}$ заведомо выполнено неравенство

$$\|u_{xx}(t,x,\varepsilon)\|_{L_2}^2 \approx \eta_m^2 \sum_{q=1}^{m} j_q^2 \geqslant \frac{m(m^2-1)}{24(2m-1)}$$

вне зависимости от выбора номеров мод, т.е. вне зависимости от выбора тора размерности m, норма решений, вычисленная как норма фазового пространства, стремится к бесконечности. Это замечание отчасти объясняет причину необходимости условия

$$j_1^2 + \ldots + j_m^2 \leqslant M_0 \tag{26}$$

в формулировке теоремы. Аналогично замечание справедливо и для $\frac{1}{2}\|u_t(t,x,\varepsilon)\|_{L_2}^2$. Последняя величина, как известно, может быть проинтерпретирована как кинетическая энергия или величина, пропорциональная ей. Иными словами, кинетическая энергия многомодовых волн возрастает и с формальной точки зрения стремится к бесконечности.

Условие (26) в полной мере содержательно для торов размерности $m \geqslant 2$. При $m = 1$ получаем точные одномодовые решения

$$u(t,x) = \exp(i\sigma_{j_1}(\varepsilon)(t+h) + ij_1x),$$

где $\sigma_{j_1} = j_1^2 - \varepsilon c$ (при $d > 0$) и, следовательно, условия на малость ε теряют смысл. Тем не менее, норма в фазовом пространстве у такого решения растет с ростом $|j_1|$ и также стремится к ∞, если $|j_1| \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
2. *Карякин Н. И., Быстров К. Н., Киреев П. С.* Краткий справочник по физике. — М.: Высшая школа, 1964.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 584–601.
4. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738—753.

5. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шрёдингера// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 1. — С. 21–29.
6. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 57–66.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс ттеоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
10. *Якубов С. Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — *23*. — С. 37–60.
11. *Aranson I. S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg–Landau equation// Rev. Modern. Phys. — 2002. — *74*. — P. 99–143.
12. *Bartuccelli M. V., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M.* On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg–Landau equation// Phys. D. — 1990. — *44*. — P. 421–444.
13. *Broer H. W., Dumortier F., van Strien S. J., Takens F.* Structures in Dynamics: Finite Dimensional Deterministic Studies. — Elsevier, 1991.
14. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations of plane running waves for the generalized cubic Schrödinger equation// Differ. Equations. — 2010. — *46*. — P. 1299–1308.
15. *Kuramoto Y., Tsusuki T.* On the formation of the dissipative structures in reaction-diffusion systems// Progr. Teor. Phys. — 2018. — *54*, № 3. — P. 687–699.
16. *Scott A.* Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures. — London: Oxford Univ. Press, 2003.
17. *Segal I.* Nonlinear semigroups// Ann. Math. — 1963. — *78*, № 2. — P. 339–364.
18. *Witham G.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

Куликов Анатолий Николаевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: `anat_kulikov@mail.ru`