



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 207 (2022). С. 120–143
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-207-120-143

УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

© 2022 г. М. И. СУМИН

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством, а также с распределенным, начальным и граничным управлениями. Получение регуляризованных ПЛ и ПМП основано на использовании двух параметров регуляризации. Регуляризованные ПЛ и ПМП формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений, состоящих из минималей ее регулярной функции Лагранжа.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, параболическое уравнение, операторное ограничение, граничное управление, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация.

ON REGULARIZATION OF CLASSICAL OPTIMALITY CONDITIONS IN CONVEX OPTIMAL CONTROL

© 2022 M. I. SUMIN

ABSTRACT. We discuss regularization of two classical optimality conditions—the Lagrange principle (PL) and the Pontryagin maximum principle (PMP)—in a convex optimal control problem for a parabolic equation with an operator equality constraint and distributed initial and boundary controls. The regularized Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle are based on two regularization parameters. These regularized principles are formulated as existence theorems for the original problem of minimizing approximate solutions.

Keywords and phrases: convex optimal control, parabolic equation, operator constraint, boundary control, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization.

AMS Subject Classification: 49K20, 49N15, 47A52

1. Введение. Принцип Лагранжа (ПЛ) и принцип максимума Понтрягина (ПМП), в их различных вариантах, представляют собою классические условия оптимальности (КУО), вопросам формулировки и обоснования которых в теории оптимального управления посвящено большое число публикаций. Хорошо известно, что как ПЛ, так и ПМП были открыты благодаря, прежде всего, необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач (см., например, [1, глава 1], [5]). Однако возможности непосредственного применения ПЛ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00199_а).

и ПМП для практического решения многих важных оптимизационных задач сильно ограничивают присущие этим КУО «от природы» свойства некорректности. Это, прежде всего, связано с тем, что различные проявления некорректности свойственны самим задачам оптимизации в целом [4]. Здесь, говоря о некорректности КУО, мы имеем в виду такие ее проявления, как неустойчивость и невыполнимость [11–13]. Напомним, что мы говорим о неустойчивости КУО, если выделяемые ими в задачах, «близких» к исходной (невозмущенной) задаче элементы, формально удовлетворяющие КУО в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи, то есть, при сколь угодно малых возмущениях оптимизационных задач эти удовлетворяющие «возмущенным» КУО элементы могут сколь угодно сильно отличаться, как по аргументу, так и по функции, от оптимальных элементов невозмущенных задач. В свою очередь, невыполнимость КУО в той или иной конкретной задаче условной оптимизации мы понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Простейший пример невыполнимости принципа Лагранжа в задаче выпуклого, а точнее говоря, линейного программирования с ограничением-равенством в бесконечномерном пространстве, можно найти в [1, с. 260]. Приведем другой характерный пример невыполнимости принципа Лагранжа [9–11, 13], показывающий, что существуют важные с точки зрения многих приложений задачи условной оптимизации, в которых формальное применение фундаментального результата совершенно «бессмысленно» по той причине, что его в этих задачах просто «невозможно записать».

Пример 1. Рассмотрим «простейшую» задачу условной оптимизации

$$\|z\|^2 \rightarrow \min, \quad Az = h \quad (1)$$

с таким инъективным и самосопряженным оператором $A: Z \rightarrow Z$ (Z — гильбертово пространство), что $R(A) \neq Z$ (например, A может быть интегральным оператором Фредгольма с замкнутым симметрическим ядром). Покажем, что в задаче 1 при выбранных определенным образом h принцип Лагранжа [1] не выполняется. Пусть $z^0 \in Z$, но $z^0 \notin R(A)$. Тогда рассматриваем задачу 1 с $h = Az^0$. В ней классический принцип Лагранжа в дифференциальной форме [1, п. 3.2.2] (см. также параметрические принципы Лагранжа в [9–11]), а, как следствие, и в недифференциальной форме, не выполняется. Действительно, если бы это было не так, то существовала бы такая невырожденная пара множителей $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^1 \times Z$, что $2\lambda_0 z^0 + A\lambda = 0$. В этом случае при $\lambda_0 = 0$ получаем $\lambda = 0$ в силу инъективности A , а при $\lambda_0 = 1$, соответственно, противоречивое равенство $z^0 = -1/2A\lambda$, что и доказывает невыполнимость классического принципа Лагранжа в задаче 1 с выбранным h^1 . Наконец, можно также утверждать, что хорошо известным классическим фактом является то, что задача 1 для всех h , для которых она разрешима, а вместе с этим и классические принцип Лагранжа, теорема Куна—Таккера для нее, в случае их применимости, неустойчивы по отношению к ошибкам исходных данных [15].

Подробное описание указанных понятий некорректности, применительно к задачам условной оптимизации и оптимального управления, связанную с ними историю вопроса, соответствующие комментарии можно найти в [9–13], иллюстративные примеры неустойчивости и невыполнимости КУО — в [9–11].

Анализ различных примеров задач условной оптимизации, оптимального управления приводит к естественному выводу о том, что свойства их некорректности, а также некорректности соответствующих КУО заложены в самой природе этих задач. Одновременно, проверка на корректность конкретных задач условной оптимизации и оптимального управления, их систем оптимальности представляет собою, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу. Поэтому, если мы хотим «привлекать» КУО непосредственно к решению сложных оптимизационных задач, то и «относиться» к ним необходимо как к математическим объектам с выраженными свойствами некорректности [4, 15]. В этом случае естественно вести речь о регуляризации КУО [9–13].

¹Можно заметить, что указанное обстоятельство имеет место на плотном подмножестве множества всех тех h , для которых задача 1 разрешима. При этом в каждой точке из этого плотного множества неразрешимой является соответствующая двойственная задача.

В пользу такого подхода к задачам условной оптимизации и оптимального управления говорит обширный класс подобных задач, возникающих в современном естествознании, приближенное задание исходных данных в которых неразрывно связано с физической сутью постановок таких задач.

Конечно, можно не принимать во внимание свойства некорректности и заниматься развитием теории КУО на основе традиционного подхода, опирающегося на предположение точного задания исходных данных оптимизационных задач, являющееся одним из основных предположений при получении любых КУО. Можно, наоборот, пытаться создать «некие аналоги» КУО в задачах на условный экстремум без предположения точного задания их исходных данных, «преодолевающие» указанные свойства некорректности. В данной работе мы придерживаемся второго подхода в теории условной оптимизации и оптимального управления, предполагающего регуляризацию КУО и естественным образом объединяющего два направления математической теории: КУО в задачах на условный экстремум (математическое программирование, оптимальное управление) и теорию некорректных задач. По нашему мнению, регуляризованные КУО должны:

- (1) «преодолевать» возможные неустойчивость и невыполнимость классических аналогов, являясь регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач;
- (2) формулироваться как утверждения о существовании в исходной (невозмущенной) задаче минимизирующих последовательностей в некотором обобщенном (не классическом) смысле и быть «структурно устроенными» так же, как и КУО;
- (3) приводить к КУО «в пределе»;
- (4) служить теоретической базой для конструирования новых алгоритмов решения различных актуальных задач оптимального управления и сводящихся к ним обратных задач современного естествознания.

Настоящая работа посвящена регуляризации КУО в задаче оптимального управления для параболического уравнения с выпуклым функционалом цели, распределенным, начальным и граничным управлениями (тройка управлений), а также с операторным ограничением-равенством. В ней продолжается линия работы [12], в которой также рассматривалась регуляризация КУО в задаче оптимального управления с операторным ограничением-равенством, но в случае сосредоточенной управляемой системы. Получение регуляризованных КУО для задач оптимального управления распределенными системами, по сравнению с аналогичными задачами для систем сосредоточенных, сопряжено с рядом существенных трудностей технического характера. Эти трудности вызваны «более сложным устройством» уравнений в частных производных, необходимостью применения «подходящих» априорных оценок для их решений, свойств регулярности этих решений, влекущих их «нужные компактные» свойства. Все эти отмеченные обстоятельства являются существенными при получении регуляризованных КУО в рассматриваемой в данной работе задаче, при этом особое внимание мы уделяем здесь описанию процесса получения регуляризованных ПМП. Мы доказываем в работе два варианта регуляризованных ПМП (теоремы 3, 4). Они разнятся «своим устройством» относительно граничного управления: в первом случае регуляризованный ПМП носит интегральный характер по граничной компоненте тройки управлений; во втором же — поточечный. Главную роль при их доказательстве играет вывод обычного ПМП в «простейшей» задаче минимизации регулярной функции Лагранжа исходной задачи (см. леммы 4, 7 и их доказательства).

Подчеркнем, наконец, что, как и в [11–13], центральными понятиями здесь являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3] (в теории математического программирования подобные обобщенные (минимизирующие) последовательности, удовлетворяющие ограничениям задачи «в пределе», известны также под названием обобщенных (оптимальных) планов [6]) и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма [12, 13]. Последнее, так же, как и в [12, 13], «встраивается» в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП, превращая их в соответствующие регуляризирующие алгоритмы. Такая трансформация КУО основана, по аналогии с [12, 13], на использовании двух параметров регуляризации, один из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем

добавке к целевому функционалу исходной задачи, который не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Естественно, в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр является излишним и его следует считать равным нулю. Отметим также, что применяемое здесь понятие МПР-образующего алгоритма [12, 13] можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между понятиями регуляризирующих алгоритмов первого (сходимость нижних граней, см. [4, гл. 9, § 2, с. 802, определение 1]) и второго типа (сходимость по аргументу, см. [4, гл. 9, § 6, с. 837, 838, определение 1]), применяемых в [4, гл. 9] (подробности см. в [12, 13]).

Отметим, наконец, что интерес к проблемам, связанным с вопросами регуляризации КУО, наблюдается на протяжении нескольких последних десятилетий. В частности, укажем здесь на работы самого последнего времени [16, 17] (см. также библиографию этих работ) по обоснованию так называемого SQH метода (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) для решения задач оптимального управления, представляющего собою основанную на ПМП итерационную схему, предполагающую использование числовых регуляризирующих добавок к гамильтониану задачи. Подчеркнем, в то же время, что указанный SQH метод [16, 17] предназначен для решения лишь задач оптимального управления с геометрическими ограничениями.

2. Постановка задачи оптимального управления. Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $V \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$,

$$\mathcal{D}_1 \equiv \left\{ u \in L_2(Q_T) : u(x, t) \in U \text{ п.в. на } Q_T \right\},$$

$$\mathcal{D}_2 \equiv \left\{ v \in L_2(\Omega) : v(x) \in V \text{ п.в. на } \Omega \right\},$$

$$\mathcal{D}_3 \equiv \left\{ w \in L_2(S_T) : w(x, t) \in W \text{ п.в. на } S_T \right\},$$

$\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, u, v, w — управляющие функции. Норму в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами $\pi \equiv (u, v, w)$ обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации не сильно выпуклого (вообще говоря) функционала с фазовым в финальный момент времени (полуфазовым) ограничением-равенством

$$f(\pi) \rightarrow \min, \quad g(\pi)(x) \equiv G_1(x)z[\pi](x, T) + G_2(x) = 0 \text{ при п.в. } x \in \Omega, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad (\text{OC})$$

где выпуклый функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ задается равенством¹

$$\begin{aligned} f(\pi) \equiv & \left\langle A_1(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \right\rangle_{L_2(Q_T)} + \\ & + \left\langle A_2(\cdot)z[\pi](\cdot, T), z[\pi](\cdot, T) \right\rangle_{L_2(\Omega)} + \left\langle A_3(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \right\rangle_{L_2(S_T)} + \\ & + \int_{Q_T} B_1(x, t, u(x, t))dxdt + \int_{\Omega} B_2(x, v(x))dx + \int_{S_T} B_3(s, t, w(s, t))dsdt. \end{aligned}$$

Здесь и ниже $z[\pi]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [7, гл. III]) третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида:

$$\begin{aligned} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x, t)z_{x_j}) + a(x, t)z + u(x, t) &= 0, \\ z(x, 0) &= v(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t)z &= w(x, t), \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2), как и в [7],

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial N} \equiv a_{i,j}(x, t)z_{x_j}(x, t) \cos \alpha_i(x, t),$$

¹Здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

$\alpha_i(x, t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i . Решения задачи (ОС⁰) в случае их существования будем обозначать через π^0 , а всю совокупность таких решений — через Π^0 .

Замечание 1. Первые три слагаемых целевого функционала задачи (ОС) имеют «квадратичный вид» по фазовой переменной. Это позволяет заметно сократить выкладки при доказательстве ПМП в задаче минимизации регулярной функции Лагранжа (см. леммы 4, 7). Излагаемый ниже подход может быть применен и к задачам с целевыми функционалами более «общего выпуклого» вида.

Ниже нам потребуются следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (ОС):

- (а) функции $A_1: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A_3: S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_1: Q_T \times W \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_2: \Omega \times V \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_3: S_T \times W \rightarrow \mathbb{R}^1$, $G_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $G_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ измеримы по Лебегу; кроме того, функция $B_1(x, t, \cdot): U \rightarrow \mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$ при п.в. $(x, t) \in Q_T$, функция $B_2(x, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$ при п.в. $x \in \Omega$, функция $B_3(s, t, \cdot): W \rightarrow \mathbb{R}^1$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$ при п.в. $(s, t) \in S_T$;
- (а') функция $B_3(s, t, \cdot)$ определена и непрерывно дифференцируема в окрестности сегмента W при п.в. $(s, t) \in S_T^1$;
- (б) выполняются условия

$$\begin{aligned} 0 \leq A_1(x, t) \leq L & \quad \text{при п.в. } (x, t) \in Q_T, \\ 0 \leq A_2(x) \leq L & \quad \text{при п.в. } x \in \Omega, \\ 0 \leq A_3(x, t) \leq L & \quad \text{при п.в. } (x, t) \in S_T, \\ |B_1(x, t, u)| \leq L & \quad \text{при п.в. } (x, t) \in Q_T \text{ и при всех } u \in U, \\ |B_2(x, v)| \leq L & \quad \text{при п.в. } x \in \Omega \text{ и при всех } v \in V, \\ |B_3(s, t, w)| \leq L & \quad \text{при п.в. } (s, t) \in Q_T \text{ и при всех } w \in W, G_i \in L_\infty(\Omega), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где L — некоторая положительная постоянная;

- (с) функции $a_{i,j}, a: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, \dots, n$, $\sigma: S \times [0, T]$ измеримы по Лебегу;
- (д) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{i,j}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0;$$

- (е) справедливы оценки

$$|a(x, t)| \leq K \quad \text{при п.в. } (x, t) \in Q_T, \quad |\sigma(x, t)| \leq K \quad \text{при п.в. } (x, t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная;

- (ф) граница S является кусочно гладкой.

Замечание 2. Задача оптимального управления (ОС) формально записывается в компактной форме задачи ВП

$$f(\pi) \rightarrow \min, \quad g(\pi) = 0, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}.$$

Если мы определим, в какое пространство вкладываются элементы $g(\pi)$, то получим «полноценную» задачу ВП. В качестве пространства образов оператора $g(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C(\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ и еще некоторые другие. То, какое из них «более нужное», зависит от свойств регулярности решений $z[\pi]$ задачи (2) и «целей регуляризации» КУО. Фазовое ограничение-равенство $g(\pi) \equiv g(\pi)(\cdot) \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot, T) + G_2(\cdot) = 0$ понимается как равенство почти всюду в Ω : $G_1(x)z[\pi](x, T) + G_2(x)$ при п.в. $x \in \Omega$. В силу включений $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и $G_1, G_2 \in L_\infty(\Omega)$ оно, очевидно, эквивалентно равенству в $L_2(\Omega)$. Поэтому в качестве пространства образов ниже выбрано пространство $L_2(\Omega)$. Рассмотренный выше пример 1 характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (ОС) в случае такого выбора пространства образов.

¹Условие (а') потребуется лишь при доказательстве леммы 4 для вычисления первой вариации функционала Лагранжа при классическом варьировании по компоненте w минимизирующей его тройки управлений.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных

$$f \equiv \left\{ A_i, B_i, i = 1, 2, 3, G_i, i = 1, 2, a_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, a, \sigma \right\},$$

для каждого из которых выполняются либо условия (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f) (то, какая группа условий выполняется, будет каждый раз оговариваться) с независимыми от набора постоянными L, K . Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных, соответственно:

$$\begin{aligned} f^0 &\equiv \left\{ A_i^0, B_i^0, i = 1, 2, 3, G_i^0, i = 1, 2, a_{i,j}^0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, a^0, \sigma^0 \right\}, \\ f^\delta &\equiv \left\{ A_i^\delta, B_i^\delta, i = 1, 2, 3, G_i^\delta, i = 1, 2, a_{i,j}^\delta, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, a^\delta, \sigma^\delta \right\}, \end{aligned}$$

$\delta \in (0, \delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|A_1^\delta - A_1^0\|_{\infty, Q_T} &\leq \delta, \quad \|A_2^\delta - A_2^0\|_{\infty, \Omega} \leq \delta, \quad \|A_3^\delta - A_3^0\|_{\infty, S_T} \leq \delta, \\ \sup_{u \in U} \|B_1^\delta(\cdot, \cdot, u) - B_1^0(\cdot, \cdot, u)\|_{\infty, Q_T} &\leq \delta, \\ \sup_{v \in V} \|B_2^\delta(\cdot, v) - B_2^0(\cdot, v)\|_{\infty, \Omega} &\leq \delta, \\ \sup_{w \in W} \|B_3^\delta(\cdot, \cdot, w) - B_3^0(\cdot, \cdot, w)\|_{\infty, S_T} &\leq \delta, \\ \|G_i^\delta - G_i^0\|_{\infty, \Omega} &\leq \delta, \quad i = 1, 2, \\ \|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty, Q_T} &\leq \delta, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \|a^\delta - a^0\|_{\infty, Q_T} \leq \delta, \quad \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty, S_T} \leq \delta. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим задачу (ОС), решение $z[\pi]$, функционал f , оператор g и т. п., соответствующие набору исходных данных f^δ , $\delta \in [0, \delta_0]$, через (ОС $^\delta$), $z^\delta[\pi]$, f^δ , g^δ , соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\|g^\delta(\pi)\| \equiv \|g^\delta(\pi)\|_{2, \Omega}, \quad \mathcal{D}^{\delta, \epsilon} \equiv \left\{ \pi \in \mathcal{D} : \|g^\delta(\pi)\| \leq \epsilon \right\}, \quad \epsilon \geq 0, \quad \mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0.$$

Определим обобщенное значение $\beta: L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (ОС 0):

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^{0, \epsilon}} f^0(\pi), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0, \epsilon} = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \leq \beta_0$, где

$$\beta_0 \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^0} f^0(\pi)$$

— классическое значение задачи. Однако в условиях данной работы, ввиду ограниченности $\mathcal{D}$, имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Центральным для нас будет понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [3, гл. III] в задаче (ОС 0), т.е. такой последовательности элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, что

$$f^0(\pi^i) \leq \beta + \delta^i, \quad \pi^i \in \mathcal{D}^{0, \epsilon^i}$$

для некоторых последовательностей, сходящихся к нулю неотрицательных чисел $\delta^i, \epsilon^i, i = 1, 2, \dots$

Введем важное для всех последующих построений понятие.

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (3) при $\delta = \delta^k$, элемент $\pi^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (ОС 0), если последовательность π^{δ^k} , $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задаче оптимального управления. Перепишем задачу (ОС⁰) и возмущенные задачи (ОС^δ) в форме задачи выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. С этой целью сформулируем, прежде всего, необходимые утверждения, связанные с существованием обобщенных решений класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи 2 и сопряженной с ней задачи, а также с оценками их устойчивости по возмущению коэффициентов задачи и управлений.

3.1. Необходимые вспомогательные результаты. В силу условий (с), (d), (e), (f) теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью [8, с. 34] (см. также [7, гл. III, § 5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (2) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $(u, v, w) \in \mathcal{H}$ и любого $T > 0$, а также необходимые априорные оценки.

Лемма 1. *Если выполняются условия (a), (d), (e), (f), то для любой тройки $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ существует единственное решение $z[\pi]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи 2 и имеет место априорная оценка¹*

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{2,S_T} \leq C_T (\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}), \quad (4)$$

где постоянная C_T не зависит от $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ и набора исходных данных $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$. Более того, если U, V, W — компакты и выполняются условия (a), (d), (e), (f), то справедлива оценка

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{\infty,Q_T} + \|z[\pi]\|_{\infty,S_T} \leq C_T \quad \forall \pi \in \mathcal{D}, \quad (5)$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных $\mathbf{f}$ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$.

Кроме того, пусть $\mathbf{f}, \mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ — два произвольных набора исходных данных, $z[\cdot], z^*[\cdot]$ — соответствующие им решения задачи 2. Если выполняются условия (с), (d), (e), (f), то для любых двух троек $\pi^1, \pi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} & |z^*[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + \|z^*[\pi^1] - z[\pi]\|_{2,S_T} \leq \\ & \leq C_T \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|z_{x_j}[\pi]\|_{2,Q_T} \|a_{i,j}^*(\cdot, \cdot) - a_{i,j}(\cdot, \cdot)\|_{\infty,Q_T} + \|z[\pi]\|_{2,Q_T} \|a^*(\cdot, \cdot) - a(\cdot, \cdot)\|_{\infty,Q_T} + \right. \\ & \quad \left. + \|u^1 - u\|_{2,Q_T} + \|v^1 - v\|_{2,\Omega} + \|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|z[\pi]\|_{2,S_T} \|\sigma^* - \sigma\|_{\infty,S_T} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

в которой постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathbf{f}, \mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ и троек управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w), \pi^1 \equiv (u^1, v^1, w^1) \in \mathcal{H}$. Если же выполняются условия (с), (d), (e), (f), а U, V, W — компакты, то для любых двух троек $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |z^*[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + \|z^*[\pi^1] - z[\pi]\|_{2,S_T} \leq C_T \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|z_{x_j}[\pi]\|_{2,Q_T} \|a_{i,j}^*(\cdot, \cdot) - a_{i,j}(\cdot, \cdot)\|_{\infty,Q_T} + \right. \\ & \quad \left. + \|a^*(\cdot, \cdot) - a(\cdot, \cdot)\|_{\infty,Q_T} + \|u^1 - u\|_{2,Q_T} + \|v^1 - v\|_{2,\Omega} + \|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|\sigma^* - \sigma\|_{\infty,S_T} \right), \quad (7) \end{aligned}$$

в которой постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathbf{f}, \mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ и троек управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w), \pi^1 \equiv (u^1, v^1, w^1) \in \mathcal{D}$.

¹Напомним, что, как и в [7],

$$|z[\pi]|_{Q_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|z(\cdot, t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$$

— норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Помимо прямой задачи 2 ниже при получении регуляризованного принципа максимума существенную роль будет играть и сопряженная с ней задача

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i} + a(x, t) \eta + \chi(x, t) &= 0, \\ \eta(x, T) &= \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t) \eta &= \omega(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$; решение этой задачи обозначим через $\eta[\chi, \psi, \omega]$.

Так как сопряженная краевая задача (8) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи 2 (с начальным условием при $T = 0$), то можно считать, что следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (с), (d), (е), (f). Тогда имеет место однозначная разрешимость в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ сопряженной (к (2)) задачи (8).

Для ее решений так же, как в случае прямой задачи, справедлива априорная оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi, \psi, \omega]\|_{2, S_T} \leq C_T^1 (\|\chi\|_{2, Q_T} + \|\psi\|_{2, \Omega} + \|\omega\|_{2, S_T}), \quad (9)$$

в которой постоянная C_T^1 также не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi, \psi, \omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

Доказательство. С учетом сделанного выше замечания, в соответствии с которым сопряженная краевая задача (8) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи 2, можно заключить, что утверждение леммы с оценкой (9) является следствием первого утверждения леммы 1. $\square$

Далее сформулируем лемму о так называемом интегральном представлении линейного непрерывного функционала на пространстве решений третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения. Эта лемма имеет важнейшее значение при вычислении первых вариаций функционалов в задачах оптимального управления, связанных с указанной начально-краевой задачей. Доказательство леммы см. в [14, лемма 3].

Лемма 3. Пусть задана третья краевая задача

$$\begin{aligned} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x, t) z_{x_j}) + a(x, t) z + f(x, t) &= 0, \\ z(0, x) &= \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t) z &= \chi(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \end{aligned} \quad (10)$$

с коэффициентами $a_{i,j}$, a , σ , удовлетворяющими условиям (с), (d), (е), (f), в которой

$$f \in L_2(Q_T), \quad \psi \in L_2(\Omega), \quad \chi \in L_2(S_T).$$

Если функция $z \in V_2^{1,0}(Q_T)$ является решением задачи (10), то для любых $d \in L_2(\Omega)$, $c \in L_2(Q_T)$, $g \in L_2(S_T)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} c(x, t) z(x, t) dx dt - \int_{\Omega} d(x) z(x, T) dx - \int_{S_T} g(s, t) z(s, t) ds dt = \\ = \int_{Q_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt - \int_{\Omega} \psi(x) \eta(x, 0) dx - \int_{S_T} \chi(s, t) \eta(s, t) ds dt, \end{aligned}$$

где функция $\eta \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — единственное обобщенное решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i} + a(x, t) \eta + c(x, t) &= 0, \\ \eta(x, T) &= d(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x, t) \eta &= g(x, t), \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned}$$

3.2. *Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством.* Пусть выполняются либо условия (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f). При любом наборе исходных данных f значение оператора $g: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\Omega)$ на каждом элементе π является суммой элементов $A[\pi] \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot, T)$ и $G_2(\cdot)$, где оператор $A: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\Omega)$, задаваемый равенством $A[\pi] \equiv A\pi \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot, T)$, в силу линейности начально-краевой задачи (2) и априорной оценки (4) является линейным и ограниченным. Так как одновременно функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ является непрерывным и выпуклым, то мы с формальной точки зрения можем переписать задачу (OC⁰) в форме невозмущенной задачи выпуклого программирования

$$f^0(\pi) \rightarrow \min, \quad A^0 \pi = -G_2^0(\cdot) \equiv h^0, \quad \pi \in \mathcal{D} \in \mathcal{H}. \quad (\tilde{P}^0)$$

С учетом приближенного задания исходных данных имеем формально вместо задачи ($\tilde{P}^0$) семейство задач, зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ

$$f^\delta(\pi) \rightarrow \inf, \quad A^\delta \pi = -G_2^\delta(\cdot) \equiv h^\delta, \quad \pi \in \mathcal{D}. \quad (\tilde{P}^\delta)$$

Получим в силу оценок (3) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, A^\delta, h^\delta\}$ от невозмущенных исходных данных $\{f^0, A^0, h^0\}$ задачи ($\tilde{P}^0$). С этой целью нам потребуются оценки леммы 1 отклонения решений начально-краевой задачи (2) при возмущении ее коэффициентов и управлений.

В силу оценок (3) и оценок (4), (6) леммы 1 можем записать

$$\left\| z^\delta[\pi](\cdot, T) - z^0[\pi](\cdot, T) \right\|_{2, \Omega} \leq \tilde{C}_T \delta \|\pi\|_{\mathcal{H}}, \quad (11)$$

где, как и выше, постоянная $\tilde{C}_T$ не зависит от набора исходных данных f^δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{H}$.

Из оценок (4), (6), (11), в свою очередь, следуют оценки для отклонения функционалов (как в случае условий (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), так и (a), (b), (c), (d), (e), (f))

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \leq C\delta(1 + \|\pi\|^2) \quad \forall \pi \in \mathcal{D}$$

и линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $L_2(\Omega)$, а также элементов h^δ, h^0

$$\|A^\delta \pi - A^0 \pi\| \leq C\delta(1 + \|\pi\|) \quad \forall \pi \in \mathcal{H}, \quad \|h^\delta - h^0\| \leq C\delta,$$

в которых постоянную $C > 0$ следует считать не зависящей от δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w)$. Заметим одновременно, что особый интерес представляет важный частный случай задачи ($\tilde{P}^0$) с функционалом $f^0(\cdot)$ в виде $f^0(\pi) \equiv \|\pi\|^2$, так как такие функционалы возникают прежде всего при рассмотрении обратных задач.

Одновременно выполняется и неравенство

$$|f^\delta(\pi_1) - f^\delta(\pi_2)| \leq \tilde{L} \|\pi_1 - \pi_2\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D},$$

где $\tilde{L} > 0$ — некоторая не зависящая от $\delta \in [0, \delta_0]$ и $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D}$ постоянная.

Поставленная в предыдущем разделе задача (OC⁰) (задача ($\tilde{P}^\delta$), $\delta \in [0, \delta_0]$) была переписана нами как задача выпуклого программирования ($\tilde{P}^0$) (задача ($\tilde{P}^\delta$)), $\delta \in [0, \delta_0]$, для которой были выписаны также оценки отклонения возмущенных исходных данных от точных.

3.3. *Регуляризованные классические условия оптимальности в задаче оптимального управления.* Вернемся к задаче оптимального управления (OC^0) , которая выше была сведена к задаче выпуклого программирования $(\tilde{P}^0)$.

Задача $(\tilde{P}^\delta)$ представляет собою частный случай задачи выпуклого программирования (P^δ) работы [12] (см. с. 256 раздела 2 указанной работы). Здесь в качестве гильбертова пространства Z выступает пространство $\mathcal{H}$ и отсутствуют ограничения-неравенства. По этой причине для получения анонсированных регуляризованных условий оптимальности в задаче (OC^0) необходимо далее «расшифровать» утверждения теорем 2, 3 из [12] в терминах исходной задачи (OC^0) . С этой целью определим функцию Лагранжа в задаче оптимального управления. Определим функционал Лагранжа задачи (OC^δ)

$$\begin{aligned} L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda) &\equiv f^\delta(\pi) + \varepsilon \|\pi\|^2 + \langle \lambda, A^\delta \pi - h^\delta - p \rangle = \\ &= \int_{Q_T} A_1^\delta(x, t) (z^\delta[\pi](x, t))^2 dx dt + \int_{\Omega} A_2^\delta(x) (z^\delta[\pi](x, T))^2 dx + \int_{S_T} A_3^\delta(s, t) (z^\delta[\pi](s, t))^2 ds dt + \\ &+ \int_{Q_T} B_1^\delta(x, t, u(x, t)) dx dt + \int_{\Omega} B_2^\delta(x, v(x)) dx + \int_{S_T} B_3^\delta(s, t, w(s, t)) ds dt + \varepsilon \|\pi\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda(x) \left(G_1^\delta(x) z^\delta[\pi](x, T) + G_2^\delta(x) \right) dx, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \quad L^0(\pi, \lambda) \equiv L^{0,0}(\pi, \lambda). \end{aligned}$$

Введем также обозначение $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] = \operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda) : \pi \in \mathcal{D}\}$. Определим далее двойственную задачу

$$\begin{aligned} V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) &\equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \\ V^\delta(\lambda) &\equiv V^{\delta,0}(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L^{\delta,0}(\pi, \lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Пусть $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta \in (0, \delta_0]$ и выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (12)$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon} \in L_2(\Omega)$ решение регуляризованной двойственной задачи

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) - \alpha(\delta) \|\lambda\|^2 \rightarrow \max, \quad \lambda \in L_2(\Omega)$$

с условием согласования (12). «Расшифровка» теорем 2, 3 из [12] в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC^0) в случае ограниченного множества $\mathcal{D}$. Следующие два утверждения выполняются как в случае условий (а), (а'), (b), (с), (d), (е), (f), так и (а), (b), (с), (d), (е), (f).

Теорема 1 (регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления). Пусть выполняется условие согласования (12), $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, — произвольная фиксированная последовательность, ε^k , $k = 1, 2, \dots$, — произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Тогда оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (3) при $\delta = \delta^k$, тройку $R(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}]$, является МПР-образующим в задаче (OC^0) (см. определение 1).

Теорема 2 (регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления для ограниченного $\mathcal{D}$). Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, — произвольная фиксированная последовательность. Пусть также выполняется условие согласования (12), ε^k , $k = 1, 2, \dots$, — произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел. Для того чтобы в задаче (OC^0) существовало МПР (и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству Π^0),

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность двойственной переменной $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$, что $\delta^k \|\lambda^k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и выполняются включения

$$\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \quad \gamma^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (13)$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\tilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \dots$ (она играет роль последовательности ε^k , $k = 1, 2, \dots$ из определения МПР)¹ и предельное соотношение

$$\left\langle \lambda^k, G_1^{\delta^k}(\cdot) z^{\delta^k}[\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]](\cdot, T) + G_2^{\delta^k}(\cdot) \right\rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Более того, последовательность $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым МПР. Другими словами, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие набору исходных данных $\mathbf{f}^{\delta^k}$, удовлетворяющих оценкам (3) при $\delta = \delta^k$, управление $R(\mathbf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = \pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$ является МПР-образующим (см. определение 1), причем каждая слабая предельная точка последовательности $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, есть решение задачи (ОС⁰). Одновременно с предельным соотношением $\delta^k \|\lambda^k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, и соотношениями (13), (14), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in L_2(\Omega)} V^0(\lambda) = f^0(\pi^0).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$ может быть взята, например, последовательность $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}$, $k = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в теореме 1.

Замечание 3. Следует отметить, что в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр ε естественно становится излишним. В этом случае в теоремах 1, 2 следует положить $\varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, и вести речь о сильной сходимости конструируемых в них МПР к единственному в такой ситуации решению w^0 задачи (ОС⁰) (см., например, [12, теорема 1]).

Переходим к формулировке и обоснованию регуляризованного принципа максимума Понтрягина. Центральную роль здесь играет задача минимизации функции Лагранжа

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda) \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (15)$$

единственным решением которой является тройка $\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda] \in \mathcal{D}$. Запишем ПМП для тройки $\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$ в этой простейшей задаче оптимального управления в предположении компактности выпуклых множеств управляющих параметров U , V , W и выполнимости либо условий (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), либо (a), (b), (c), (d), (e), (f). Условие компактности U , V , W играет существенную роль при вычислении первой вариации функционала Лагранжа в задаче минимизации (15) в процессе получения в ней принципа максимума. При этом вычислении возникает потребность иметь дело с ограниченными решениями как прямой начально-краевой задачи (2), так и сопряженной с ней.

Введем стандартные обозначения:

$$\begin{aligned} H_u^{\delta, \varepsilon}(x, t, u, \eta) &\equiv -u\eta - B_1^\delta(x, t, u) - \varepsilon u^2, \\ H_v^{\delta, \varepsilon}(x, u, \eta) &\equiv v\eta - B_2^\delta(x, v) - \varepsilon v^2, \\ H_w^{\delta, \varepsilon}(s, t, w, \eta) &\equiv w\eta - B_3^\delta(s, t, w) - \varepsilon w^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда выполняются условия (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f).

Лемма 4. Пусть выполняются условия (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), а множества U , V , W — выпуклые компакты. Тогда тройка $\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$ при $\lambda \in H = L_2(\Omega)$, доставляющая минимальное

¹В силу ограниченности $\mathcal{D}$ условие (13) со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел δ^k , γ^k , $k = 1, 2, \dots$, имеет место тогда и только тогда, когда $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{0, \tilde{\gamma}^k}$, $k = 1, 2, \dots$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\tilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \dots$.

значение в задаче (15), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, т.е. удовлетворяет при $\pi \equiv (u, v, w) = \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda] \equiv (u^{\delta, \varepsilon}[\lambda], v^{\delta, \varepsilon}[\lambda], w^{\delta, \varepsilon}[\lambda])$ соотношениям максимума

$$\begin{aligned} \max_{r \in U} H_u^{\delta, \varepsilon}(x, t, r, \eta^\delta[\pi](x, t)) &= H_u^{\delta, \varepsilon}(x, t, u(x, t), \eta^\delta[\pi](x, t)) \quad \text{при н.в. } (x, t) \in Q_T, \\ \max_{r \in V} H_v^{\delta, \varepsilon}(x, r, \eta^\delta[\pi](x, 0)) &= H_v^{\delta, \varepsilon}(x, v(x), \eta^\delta[\pi](x, 0)) \quad \text{при н.в. } x \in \Omega, \\ \max_{r \in \mathcal{D}_3} \int_{S_T} \nabla_w H_w^{\delta, \varepsilon}(s, t, w(s, t), \eta^\delta[\pi](s, t)) r(s, t) ds dt &= \\ &= \int_{S_T} \nabla_w H_w^{\delta, \varepsilon}(s, t, w(s, t), \eta^\delta[\pi](s, t)) w(s, t) ds dt, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\eta^\delta[\pi] \equiv \eta^\delta[\pi, \lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи (см. лемму 2)

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}^\delta(x, t) \eta_{x_i} + a^\delta(x, t) \eta &= 2A_1^\delta(x, t) z^\delta[\pi](x, t), \\ \eta(x, T) &= -2A_2^\delta(x) z^\delta[\pi](x, T) - \lambda(x) G_1^\delta(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma^\delta(x, t) \eta &= -2A_3^\delta(x, t) z^\delta[\pi](x, t), \quad (x, t) \in S_T \end{aligned} \quad (17)$$

при $\pi = \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$. Обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторой $\lambda \in H = L_2(\Omega)$ соотношениям (16), (17) доставляет минимум в задаче (15).

Замечание 4. В силу выпуклости и дифференцируемости по w функции $w\eta - B_3(s, t, w) - \varepsilon w^2$ последнее неравенство в (16) можно переписать как обычное поточечное соотношение максимума.

Доказательство. Доказываем сначала необходимость. Пусть $\lambda^i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots$, — такая последовательность ограниченных функций, $\lambda^i \in L_\infty(Q_T)$, что $\|\lambda^i - \lambda\|_{2, \Omega} \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Рассмотрим семейство зависящих от $i = 1, 2, \dots$ вспомогательных задач минимизации

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda^i) \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}. \quad (18)$$

Можем записать оценку

$$\left| L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda^i) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda) \right| = \left| \left\langle \lambda^i - \lambda, A^\delta \pi - h^\delta \right\rangle \right| \leq \|\lambda^i - \lambda\|_{2, \Omega} (\|A^\delta \pi\|_{2, \Omega} + \|h^\delta\|_{2, \Omega}),$$

из которой в силу оценки (4) леммы 1 следует, что

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda^i) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\pi \in \mathcal{D}$. Так как каждый функционал $L^{\delta, \varepsilon}(\cdot, \lambda^i)$, $i = 1, 2, \dots$, является непрерывным (в силу оценок леммы 1) и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$, то задача (15) при каждом i является разрешимой единственным образом, и решение ее может быть записано, в соответствии с используемыми обозначениями, в виде $\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i]$. Так как в силу указанной выше равномерной сходимости имеет место сходимость минимумов

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda], \lambda) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

то с учетом сходимости

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i], \lambda) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty \quad (\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i] \in \mathcal{D}),$$

получаем, что

$$L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i], \lambda) \rightarrow L^{\delta, \varepsilon}(\pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda], \lambda), \quad i \rightarrow \infty,$$

откуда, благодаря сильной выпуклости $L^{\delta, \varepsilon}(\cdot, \lambda)$, получаем сходимость (см. [4, гл. 8, § 2, теорема 10])

$$\left\| \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda^i] - \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda] \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Получим ПМП в задаче (15) при $\lambda = \lambda^i$. С этой целью применим формулу леммы 3 для интегрального представления приращения функционала $L^{\delta,\varepsilon}(\cdot, \lambda^i)$ для пары управляющих троек $\pi = (u, v, w)$ и $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] = (u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i])$. Можем записать

$$\begin{aligned} & \left(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right)_t - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}^\delta(x, t) (z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])_{x_j} \right) + \\ & \quad + a^\delta(x, t) \left(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right) + u(x, t) - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t) = 0, \\ & \left(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right)(x, 0) = v(x) - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x), \quad x \in \Omega, \\ & \frac{\partial(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]])}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s, t) \left(z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right) = w(s, t) - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t), \quad (s, t) \in S_T. \end{aligned}$$

Кроме того, можем записать также

$$\begin{aligned} L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda^i) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i) &= \int_{Q_T} A_1^\delta(x, t) \left[\left(z^\delta[\pi](x, t) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t) \right)^2 \right] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} A_2^\delta(x) \left[\left(z^\delta[\pi](x, T) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) \right)^2 \right] dx + \\ &+ \int_{S_T} A_3^\delta(s, t) \left[\left(z^\delta[\pi](s, t) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t) \right)^2 \right] ds dt + \\ &+ \int_{Q_T} \left[B_1^\delta(x, t, u(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t)) \right] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \left[B_2^\delta(x, v(x)) - B_2^\delta(x, v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)) \right] dx + \\ &+ \int_{S_T} \left[B_3^\delta(s, t, w(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t)) \right] ds dt + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda^i(x) G_1^\delta(x) \left(z^\delta[\pi](x, T) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) \right) dx = \\ &= \int_{Q_T} A_1^\delta(x, t) \left[z^\delta[\pi](x, t) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t) \right] \left[z^\delta[\pi](x, t) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t) \right] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} A_2^\delta(x) \left[z^\delta[\pi](x, T) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) \right] \left[z^\delta[\pi](x, T) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) \right] dx + \\ &+ \int_{S_T} A_3^\delta(s, t) \left[z^\delta[\pi](s, t) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t) \right] \left[z^\delta[\pi](s, t) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t) \right] ds dt + \\ &+ \int_{Q_T} \left[B_1^\delta(x, t, u(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t)) \right] dx dt + \int_{\Omega} \left[B_2^\delta(x, v(x)) - B_2^\delta(x, v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)) \right] dx + \\ &+ \int_{S_T} \left[B_3^\delta(s, t, w(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t)) \right] ds dt + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda^i(x) G_1^\delta(x) \left(z^\delta[\pi](x, T) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) \right) dx. \end{aligned}$$

Тогда, применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda^i) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i) &= \int_{Q_T} (u(x, t) - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t)) \eta^\delta[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t) dx dt - \\
&- \int_{\Omega} (v(x) - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)) \eta^\delta[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, 0) dx - \int_{S_T} (w(s, t) - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t)) \eta^\delta[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t) ds dt + \\
&+ \int_{Q_T} [B_1^\delta(x, t, u(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t))] dx dt + \int_{\Omega} [B_2^\delta(x, v(x)) - B_2^\delta(x, v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x))] dx + \\
&+ \int_{S_T} [B_3^\delta(s, t, w(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t))] ds dt, \quad (20)
\end{aligned}$$

где

$$\eta^\delta[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[\pi, \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i] \in V_2^{1,0}(Q_T)$$

— обобщенное решение вспомогательной (промежуточной) сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i,j}^\delta(x, t) \eta_{x_i}) + a^\delta(x, t) \eta - A_1^\delta(x, t) [z^\delta[\pi](x, t) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t)] &= 0, \\
\eta(x, T) &= -[A_2^\delta(x) [z^\delta[\pi](x, T) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T)] + \lambda^i(x) G_1^\delta(x), \quad x \in \Omega, \\
\frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma^\delta(s, t) \eta &= -A_3^\delta(s, t) [z^\delta[\pi](s, t) + z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t)], \quad (s, t) \in S_T.
\end{aligned} \quad (21)$$

Далее определим вариацию

$$\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \equiv (u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i])$$

оптимального управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ и подсчитаем соответствующую первую вариацию для функционала Лагранжа. Пусть $U^* \subset \mathbb{R}^1$, $V^* \subset \mathbb{R}^1$ — счетные всюду плотные подмножества множеств U, V . Определим вариацию $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \in \mathcal{D}$, $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \leq 1$, тройки $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$

$$\begin{aligned}
u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t) &\equiv \begin{cases} u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t), & (x, t) \in Q_T \setminus Q^\epsilon, \\ \bar{u} \in U^*, & (x, t) \in Q^\epsilon, \end{cases} \quad v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x) \equiv \begin{cases} v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x), & x \in \Omega \setminus \Omega^\epsilon, \\ \bar{v} \in V^*, & x \in \Omega^\epsilon, \end{cases} \\
w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t) &\equiv w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t) + \epsilon^{n+1}(w(s, t) - w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t)),
\end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{x}, \bar{t}}^\epsilon &\equiv \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x}_i - \epsilon < x_i \leq \bar{x}_i, i = 1, \dots, n, \bar{t} - \epsilon < t \leq \bar{t}\}, \\
\Omega_{\bar{y}}^\epsilon &\equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{y}_i - \epsilon^{(n+1)/n} < x_i \leq \bar{y}_i - \epsilon^{(n+1)/n}, i = 1, \dots, n\},
\end{aligned}$$

$w(\cdot, \cdot)$ — произвольное управление из $\mathcal{D}_3$, $\bar{x} \equiv (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $\bar{y} \equiv (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия на точки $(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y}$, участвующие в определении вариации $\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$:

(i) точка $(\bar{x}, \bar{t})$ является точкой Лебега¹ функций

$$(u' - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t)) \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t), \quad [B_1^\delta(x, t, u') - B_1^\delta(x, t, u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x, t))], \quad (x, t) \in Q_T, \quad u' \in U^*;$$

(ii) точка $\bar{y}$ является точкой Лебега функций

$$(v' - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x)) \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, 0) + [B_2^\delta(x, v') - B_2^\delta(x, v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](x))], \quad x \in \Omega, \quad v' \in V^*,$$

¹Здесь и ниже используется классическое понятие точки Лебега или правильной точки суммируемой функции, см., например, [2, гл. I, § 1, п. 1.7].

где $\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение предельной краевой сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j}^\delta(x, t) \eta_{x_i} \right) + a^\delta(x, t) \eta - 2A_1^\delta(x, t) z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, t) &= 0, \\ \eta(x, T) &= - \left[2A_2^\delta(x) z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](x, T) + \lambda^i(x) G_1^\delta(x) \right], \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma^\delta(s, t) \eta &= -2A_3^\delta(s, t) z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t), \quad (s, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (23)$$

Очевидно, в силу классической теоремы о точках Лебега, такой выбор точек $(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y}$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar{x}, \bar{t}), \bar{y}$ совпадает соответственно с лебеговой мерой цилиндра Q_T и лебеговой мерой области Ω . Подсчитаем первую вариацию функционала Лагранжа:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \left(L^{\delta,\varepsilon} \left(\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) - L^{\delta,\varepsilon} \left(\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) \right).$$

Так как

$$\left\| \pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то благодаря оценке (7) леммы 1 можем записать

$$\left| z^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right|_{Q_T} + \left\| z^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right\|_{2,S_T} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (24)$$

причем, так как выполняются условия (a), (b), (c), (d), (e), (f), в силу оценки (5) той же леммы 1, функции

$$z^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, \cdot), \quad z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, \cdot): Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$$

равномерно по $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ ограничены в $L_\infty(Q_T)$, функции

$$z^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, T), \quad z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, T): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$$

равномерно по $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ ограничены в $L_\infty(\Omega)$ (напомним, что функции класса $V_2^{1,0}(Q_T)$, как функции x , непрерывны по t в норме $L_2(\Omega)$), функции

$$z^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, \cdot), \quad z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, \cdot): S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$$

равномерно по $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ ограничены в $L_\infty(S_T)$. При этом, одновременно, является существенно ограниченной и функция $\lambda^i(x) G_1^\delta(x)$, $x \in \Omega$. В свою очередь, последние обстоятельства, а также предельное соотношение (24) в силу оценки (9) леммы 2 приводят к предельному соотношению

$$\left| \eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right|_{Q_T} + \left\| \eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right\|_{2,S_T} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (25)$$

причем важно то, что все функции

$$\eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i], \quad \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \lambda^i]$$

равномерно по $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ ограничены в $L_\infty(Q_T)$. По этой причине, в силу [7, теорема 10.1], имеет место следующее свойство «равномерной» гильдеровости сопряженных функций $\eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]$: существует такое число $\alpha > 0$, что

$$\eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \in H^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$$

для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и норма $\left| \eta^\delta[\pi_\varepsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] \right|_{Q'}^{(\alpha)}$ для любой подобласти $Q' \subset Q_T$, отстоящей от верхнего основания $\{(x, t) : x \in \Omega, t = T\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ , равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ограничена некоторой постоянной, зависящей лишь от этого расстояния ρ . Последнее свойство можно переписать как свойство компактности в $C(Q')$.

Лемма 5. *Множество решений сопряженной задачи*

$$\left\{ \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] : \epsilon \in [0, \epsilon_0] \right\} \subset V_2^{1,0}(Q_T)$$

является множеством равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций в $C(Q')$ для любой подобласти $Q' \subset Q_T$, отстоящей от верхнего основания $\{(x, t) : x \in \Omega, t = T\}$ и боковой поверхности S_T цилиндра Q_T на положительное расстояние ρ .

На основании сформулированного в лемме 5 свойства компактности и сходимости (25) мы, в свою очередь, можем утверждать без ограничения общности, что имеет место следующая равномерная сходимость для любой подобласти Q' цилиндра Q_T , о которой идет речь в этой лемме:

$$\left| \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] \right|_{Q'}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Последняя равномерная сходимость позволяет вычислить первую вариацию функционала Лагранжа. Можем записать в силу равенства (20) и организации вариации $\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \left(L^{\delta, \epsilon} \left(\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) - L^{\delta, \epsilon} \left(\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{Q_T} \left(u_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t) - u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](x, t) dx dt - \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{\Omega} \left(v_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x) - v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](x, 0) dx - \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{S_T} \left(w_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](s, t) ds dt + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{Q_T} \left[B_1^\delta \left(x, t, u_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t) \right) - B_1^\delta \left(x, t, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t) \right) \right] dx dt + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{\Omega} \left[B_2^\delta \left(x, v_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x) \right) - B_2^\delta \left(x, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x) \right) \right] dx + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{S_T} \left[B_3^\delta \left(s, t, w_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) - B_3^\delta \left(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) \right] ds dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{Q_{\bar{x}, \bar{t}}^\epsilon} \left(\bar{u} - u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](x, t) dx dt - \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{\Omega_{\bar{y}}^\epsilon} \left(\bar{v} - v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](x, 0) dx - \\ & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{S_T} \epsilon^{n+1} \left(w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right](s, t) ds dt + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{Q_{\bar{x}, \bar{t}}^\epsilon} \left[B_1^\delta(x, t, \bar{u}) - B_1^\delta(x, t, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t)) \right] dx dt + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{\Omega_{\bar{y}}^\epsilon} \left[B_2^\delta(x, \bar{v}) - B_2^\delta(x, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x)) \right] dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^{n+1}} \int_{S_T} \int_0^1 \nabla_w B_3^\delta(s, t, \Theta^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t, \gamma)) d\gamma \left[\left(\epsilon^{n+1} (w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t)) \right) \right] ds dt = \\
& = \left(\bar{u} - u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{x}, \bar{t}) - \left(\bar{v} - v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{y}, 0) - \\
& \quad - \int_{S_T} \left(w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) ds dt + \\
& \quad + B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) - B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t})) + B_2^\delta(\bar{y}, \bar{v}) - B_2^\delta(\bar{y}, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y})) + \\
& \quad + \int_{S_T} \nabla_w B_3^\delta(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t)) \left(w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) ds dt \geq 0
\end{aligned}$$

для всех $\bar{u} \in U^*$ при п.в. $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T$, всех $\bar{v} \in V^*$ при п.в. $\bar{y} \in \Omega$ и всех $w \in \mathcal{D}_3$, где

$$\Theta^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t, \gamma) \equiv w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) + \gamma \left(w_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right).$$

Последнее неравенство, а также непрерывность по $\bar{u}$ функций

$$\left(\bar{u} - u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{x}, \bar{t}), \quad B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) - B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t}))$$

и по $\bar{v}$ функций

$$-\left(\bar{v} - v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{y}, 0), \quad B_2^\delta(\bar{y}, \bar{v}) - B_2^\delta(\bar{y}, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y}))$$

и, кроме того, классические свойства точек Лебега измеримых функций приводят нас к трем неравенствам:

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{u} - u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{x}, \bar{t}) + B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) - B_1^\delta(\bar{x}, \bar{t}, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{x}, \bar{t})) \geq 0 \\
& \quad \text{при п.в. } (\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T \quad \forall \bar{u} \in U, \\
& -\left(\bar{v} - v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{y}, 0) + B_2^\delta(\bar{y}, \bar{v}) - B_2^\delta(\bar{y}, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](\bar{y})) \geq 0 \quad \text{при п.в. } \bar{y} \in \Omega \quad \forall \bar{v} \in V, \\
& - \int_{S_T} \left(w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) ds dt + \\
& \quad + \int_{S_T} \nabla_w B_3^\delta(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t)) \left(w(s, t) - w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) \right) ds dt \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{D}_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, используя введенные выше обозначения, приходим к состоящему из трех соотношений (два из них носят поточечный характер, по компонентам u и v , одно — интегральный, по компоненте w) принципу максимума Понтрягина для тройки управлений $\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$:

$$\begin{aligned}
& H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, t) \right) = \\
& \quad = \max_{u \in U} H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, t) \right) \text{ при п.в. } (x, t) \in Q_T, \\
& H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, 0) \right) = \max_{v \in V} H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, 0) \right) \text{ при п.в. } x \in \Omega, \\
& \int_{S_T} \left(H_w^{\delta, \epsilon} \right)'_w \left(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) \right) w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t) ds dt = \\
& \quad = \max_{w \in \mathcal{D}_3} \int_{S_T} \left(H_w^{\delta, \epsilon} \right)'_w \left(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) \right) w(s, t) ds dt.
\end{aligned} \tag{26}$$

Наконец, предельный переход при $i \rightarrow \infty$ в трех соотношениях (26) приводят к принципу максимума Понтрягина для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Для обоснования этого предельного перехода надо выписать предельное соотношение

$$\left\| z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right] - z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right] \right\|_{Q_T} + \left\| z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right] - z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right] \right\|_{2,S_T} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty,$$

являющееся следствием предельного соотношения (19) и априорной оценки (4) леммы 1, а затем заметить, что его следствием являются, в свою очередь, предельные соотношения при $i \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \left\| A_1^\delta(\cdot, \cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right](\cdot, \cdot) - A_1^\delta(\cdot, \cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right](\cdot, \cdot) \right\|_{2,Q_T} \rightarrow 0, \\ & \left\| A_2^\delta(\cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right](\cdot, T) + \lambda^i(\cdot) G_1^\delta(\cdot) - A_2^\delta(\cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right](\cdot, T) - \lambda(\cdot) G_1^\delta(\cdot) \right\|_{2,\Omega} \rightarrow 0, \\ & \left\| A_3^\delta(\cdot, \cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right](\cdot, \cdot) - A_3^\delta(\cdot, \cdot) z^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right](\cdot, \cdot) \right\|_{2,S_T} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

которые в силу априорной оценки (9) леммы 2 позволяют записать

$$\left\| \eta^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right] \right\|_{Q_T} + \left\| \eta^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \right] \right\|_{2,S_T} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Предельные соотношения (19) и (27) обеспечивают предельный переход при $i \rightarrow \infty$ в трех соотношениях (26). Как результат этого предельного перехода, получаем сформулированный в лемме ПМП для управления $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda]$. Необходимость доказана.

Доказываем достаточность. Предположим, что соотношения (16) выполняются для некоторой тройки $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$ и некоторого $\lambda \in H = L_2(\Omega)$. Тогда можем записать для произвольного $\pi' \equiv (u', v', w') \in \mathcal{D}$ с учетом выпуклости функций $A^1(x, t)z^2$, $A^2(x)z^2$, $A^3(s, t)z^2$ по $z \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} & L^{\delta,\varepsilon}(\pi', \lambda) - L^{\delta,\varepsilon}(\pi, \lambda) = \\ & = \int_{Q_T} A_1^\delta(x, t) \left[\left(z^\delta[\pi'](x, t) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi](x, t) \right)^2 \right] dxdt + \int_{\Omega} A_2^\delta(x) \left[\left(z^\delta[\pi'](x, T) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi](x, T) \right)^2 \right] dx + \\ & \quad + \int_{S_T} A_3^\delta(s, t) \left[\left(z^\delta[\pi'](s, t) \right)^2 - \left(z^\delta[\pi](s, t) \right)^2 \right] dsdt + \\ & \quad + \int_{Q_T} \left[B_1^\delta(x, t, u'(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u(x, t)) \right] dxdt + \int_{\Omega} \left[B_2^\delta(x, v'(x)) - B_2^\delta(x, v(x)) \right] dx + \\ & \quad + \int_{S_T} \left[B_3^\delta(s, t, w'(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w(s, t)) \right] dsdt + \int_{\Omega} \lambda(x) G_1^\delta(x) \left(z^\delta[\pi'](x, T) - z^\delta[\pi](x, T) \right) dx \geq \\ & \geq \int_{Q_T} A_1^\delta(x, t) \left[2z^\delta[\pi](x, t) \right] \left[z^\delta[\pi'](x, t) - z^\delta[\pi](x, t) \right] dxdt + \\ & \quad + \int_{\Omega} A_2^\delta(x) \left[2z^\delta[\pi](x, T) \right] \left[z^\delta[\pi'](x, T) - z^\delta[\pi](x, T) \right] dx + \\ & \quad + \int_{S_T} A_3^\delta(s, t) \left[2z^\delta[\pi](s, t) \right] \left[z^\delta[\pi'](s, t) - z^\delta[\pi](s, t) \right] dsdt + \\ & \quad + \int_{Q_T} \left[B_1^\delta(x, t, u'(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u(x, t)) \right] dxdt + \int_{\Omega} \left[B_2^\delta(x, v'(x)) - B_2^\delta(x, v(x)) \right] dx + \\ & \quad + \int_{S_T} \left[B_3^\delta(s, t, w'(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w(s, t)) \right] dsdt + \int_{\Omega} \lambda(x) G_1^\delta(x) \left(z^\delta[\pi'](x, T) - z^\delta[\pi](x, T) \right) dx. \end{aligned}$$

Можем также записать

$$\begin{aligned} \left(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi] \right)_t - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}^\delta(x, t) (z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi])_{x_j} \right) + a^\delta(x, t) \left(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi] \right) + u'(x, t) - u(x, t) &= 0, \\ \left(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi] \right)(x, 0) &= v'(x) - v(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi])}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s, t) \left(z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi] \right) &= w'(s, t) - w(s, t), \quad (s, t) \in S_T. \end{aligned}$$

Тогда, применяя, как и выше при доказательстве необходимости, лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} L^{\delta, \varepsilon}(\pi', \lambda) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda) &\geq \int_{Q_T} (u'(x, t) - u(x, t)) \eta^\delta[\pi](x, t) dx dt - \int_{\Omega} (v'(x) - v(x)) \eta^\delta[\pi](x, 0) dx - \\ &- \int_{S_T} (w'(s, t) - w(s, t)) \eta^\delta[\pi](s, t) ds dt + \int_{Q_T} \left[B_1^\delta(x, t, u'(x, t)) - B_1^\delta(x, t, u(x, t)) \right] dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \left[B_2^\delta(x, v'(x)) - B_2^\delta(x, v(x)) \right] dx + \int_{S_T} \left[B_3^\delta(s, t, w'(s, t)) - B_3^\delta(s, t, w(s, t)) \right] ds dt, \quad (28) \end{aligned}$$

где $\eta^\delta[\pi] \equiv \eta^\delta[\pi, \lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}^\delta(x, t) \eta_{x_i} + a^\delta(x, t) \eta - 2A_1^\delta(x, t) z^\delta[\pi](x, t) &= 0, \\ \eta(x, T) &= -2A_2^\delta(x) z^\delta[\pi](x, T) - \lambda(x) G_1^\delta(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s, t) \eta &= -2A_3^\delta(s, t) z^\delta[\pi](s, t), \quad (s, t) \in S_T. \end{aligned}$$

Замечая теперь, что в силу соотношений принципа максимума (16) выражение в правой части неравенства (28) неотрицательно при всех $\pi' \in \mathcal{D}$, получаем неравенство $L^{\delta, \varepsilon}(\pi', \lambda) - L^{\delta, \varepsilon}(\pi, \lambda) \geq 0$ для всех $\pi' \in \mathcal{D}$, т.е. управление $\pi \in \mathcal{D}$ есть решение задачи (15) и, стало быть, $\pi = \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$. Лемма 4 доказана. $\square$

Итак, полученный принцип максимума носит поточечный характер по компонентам u , v и интегральный — по компоненте w . Это связано с тем, что на границе S_T мы не применяли «нужных» свойств решений z , η как прямой задачи, так и сопряженной. Также мы не применяли здесь и C , L_∞ оценок для решений прямой и сопряженной задач. Эти оценки можно получить при некоторых дополнительных предположениях об исходных данных задачи. Получим далее поточечный принцип максимума по всем трем компонентам u , v , w в задаче минимизации функции Лагранжа (15) с использованием «нужных» дополнительных свойств решений z , η как прямой задачи, так и сопряженной, и соответствующих C , L_∞ оценок для этих решений. В случае применения таких оценок поточечный принцип максимума может быть получен для функционала качества общего вида, однако при условиях несколько более жестких по сравнению с условиями (a), (b), (c), (d), (e), (f). В этом случае условие (a') становится излишним. Получению различных вариантов C , L_∞ оценок для решений начально-краевых задач через нормы управлений в лебеговых пространствах с конечными показателями суммируемости и их применению в теории оптимального управления посвящено за последние десятилетия большое число публикаций. В случае оценок для параболических уравнений укажем, например, на важные, хотя и относительно давние работы [18, 19] (см. также обширную библиографию этих работ). Воспользуемся здесь их результатами и, в первую очередь, C и L_∞ оценками работы [19]. С целью получения поточечного принципа максимума по всем трем компонентам u , v , w напомним предварительно, что понимается под точкой Лебега суммируемой функции, заданной на поверхности S_T . Так как в соответствии с условием (f) граница S области Ω является липшицевой (она является кусочно-гладкой), то можно утверждать, что существует конечный набор измеримых в смысле $(n-1)$ -мерной меры, индуцированной на S , множеств S_r , $r = 1, 2, \dots, e$, и таких функций ω_r , $r = 1, 2, \dots, e$,

что, во-первых,

$$\bigcup_{r=1}^e S_r = S, \quad \int S_k \cap \int S_l = \emptyset,$$

если $k \neq l$, и, во-вторых, функции

$$\omega_r: \overbrace{(-P, P) \times \dots \times (-P, P)}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^1$$

являются липшицевыми и для некоторой координатной системы $(x'_r, x_{r,n}) \equiv (x_{r,1}, \dots, x_{r,n-1}, x_{r,n})$ имеет место равенство

$$\int S_r = \left\{ (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in \overbrace{(-P, P) \times \dots \times (-P, P)}^{n-1} \right\}.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \int S_r$ для некоторого $1 \leq r \leq e$ и организуем для данного достаточно малого $\epsilon > 0$ множество

$$S_\epsilon(x_0) \equiv \left\{ x = (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in B_\epsilon(x'_{0r}) \subset \overbrace{(0, 1) \times \dots \times (0, 1)}^{n-1} \right\}, \quad (29)$$

где $B_\epsilon(x'_{0r})$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x'_{0r} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Определим также множество $S_T^\epsilon(x_0, t_0) \equiv \{S_\epsilon(x_0) \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [18].

Лемма 6. Пусть задана функция $f \in L_1(S_T)$. Тогда существует такое измеримое (в смысле n -мерной меры μ_T , индуцированной на S_T) множество L , $\mu_T(L) = \mu_T(S_T)$, что для каждой точки $(x_0, t_0) \in L$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(x_0, t_0))} \int_{S_T^\epsilon(x_0, t_0)} |f(x, t) - f(x_0, t_0)| \mu_T(ds dt) = 0.$$

Указанные в сформулированной лемме точки (x_0, t_0) из множества L мы и называем точками Лебега функций из $L_1(S_T)$. Итак, пусть в дополнение к условиям (а), (b), (c), (d), (e), (f) исходные данные задачи (OC⁰) таковы, что

$$a_{i,j}^\delta \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}), \quad \gamma > 0, \quad a_{i,j}^\delta(x) = a_{j,i}^\delta(x), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (30)$$

Ω — область класса $C^{2,\gamma}$,

т.е. граница S области Ω является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0, 1]$. Последнее означает, что S — такая $(n-1)$ -мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$, что область Ω лежит локально по одну сторону от S . При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гильбертовскому классу H^γ . Считаем также, что вместо оценки $\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty, Q_T} \leq \delta$, входящей в определение отклонения возмущенных исходных данных f^δ от невозмущенных f^0 выполняется оценка

$$\|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{C^{1,\gamma}(\Omega)} \leq \delta. \quad (31)$$

В этом случае, так как выполняются условия (а), (b), (c), (d), (e), (f), то в силу леммы 1 решение $z^\delta[\pi]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ (этот класс традиционно еще обозначается как $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)) \equiv C([0, T]; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_1(\Omega))$) существует для любого $\pi \in \mathcal{D}$ (точнее, для любого $\pi \in \mathcal{H}$) при любом $\delta \in [0, \delta_0]$. В предположении, что U, V, W — компакты, аппроксимируем задачу минимизации функционала Лагранжа (15), как и выше, последовательностью аналогичных задач (18) с $\lambda^i \in L_\infty(\Omega)$. Как следствие, получаем опять интегральное представление (20) для приращения функционала Лагранжа, в записи которого используется вспомогательная сопряженная функция

$$\eta^\delta[\pi, \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]] \equiv \eta^\delta[\pi, \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \lambda^i] \in V_2^{1,0}(Q_T)$$

— решение вспомогательного сопряженного уравнения (21). Применяем далее игольчатое варьирование всех трех управлений $(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i])$: варьирование управлений $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ задается формулой (22), а $w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ варьируется по формуле

$$w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t) \equiv \begin{cases} w \in W, & \text{если } (s, t) \in S_T^\varepsilon(\bar{s}, \bar{t}); \\ w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t), & \text{если } (s, t) \in S_T \setminus S_T^\varepsilon(\bar{s}, \bar{t}). \end{cases} \quad (32)$$

где $(\bar{s}, \bar{t})$ — точка Лебега функций (множество $S_T^\varepsilon(\bar{s}, \bar{t})$ определяется равенством (29)),

$$(w' - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t))\eta^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](s, t), \quad B_3^\delta(s, t, w') - B_3^\delta(s, t, w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i](s, t)), \quad (s, t) \in S_T, \quad w' \in W^*,$$

а W^* — счетное всюду плотное множество в W . Благодаря лемме 6 такой выбор точек $(\bar{s}, \bar{t})$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar{s}, \bar{t})$ совпадает соответственно с лебеговой мерой боковой поверхности S_T . Далее замечаем, что, так как U, V, W — компакты, а значит все управления $u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ равномерно ограничены, то, благодаря сформулированным выше условиям (см. дополнительные условия (30), (31)), можно, в силу [19, предложения 3.3, 3.4], записать оценки с произвольными $q > (n+2)/2, r > n+1$

$$\|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\infty, Q_T} + \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\infty, S_T} \leq C_1 \left(\|u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{q, Q_T} + \|v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{\infty, \Omega} + \|w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{q_1, S_T} \right),$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит лишь от $\epsilon, n, q, r, \Omega, T, K$, и

$$\|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\overline{Q}_{\iota, T}}^{(0)} \leq C_2 \left(\|u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{q, Q_T} + \|v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2, \Omega} + \|w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{r, S_T} \right), \quad (33)$$

где постоянная $C_2 > 0$ зависит лишь от $\epsilon, \iota, n, q, r, \Omega, T, K$ ($K > 0$ — постоянная из условия (е)). Одновременно с (33) можем записать

$$\begin{aligned} & \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{\overline{Q}_{\iota, T}}^{(0)} \leq \\ & \leq C_2 \left(\|u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{q, Q_T} + \|v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2, \Omega} + \|w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{r, S_T} \right) \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Естественно, одновременно мы можем записать и более «грубую» оценку (4) леммы 1

$$\begin{aligned} & \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2, Q_T} + \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2, S_T} \leq \\ & \leq C \left(\|u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - u^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2, Q_T} + \|v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - v^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2, \Omega} + \|w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i] - w^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]\|_{2, S_T} \right), \end{aligned}$$

из которой получаем сходимость

$$\|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2, Q_T} + \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{2, S_T} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (35)$$

Таким образом, в силу предельных соотношений (34), (35) и равномерной ограниченности управлений $u_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], v_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i], w_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]$ можно утверждать, что выполняется и предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{q, Q_T} + \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, T) - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]](\cdot, T)\|_{\infty, \Omega} + \\ & + \|z^\delta[\pi_\epsilon^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]] - z^\delta[\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda^i]]\|_{r, S_T} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Полученное предельное соотношение (36) дает возможность применить оценки предложений 3.3, 3.4 в [19] еще раз, но теперь уже применительно к разности решений вспомогательной (21) (при

$\pi = \pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$) и предельной (23) сопряженных задач. По этой причине можем записать предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \left\| \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon} \left[\lambda^i, \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] \right\|_{\infty, Q_T} + \left\| \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\cdot, 0) - \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\cdot, 0) \right\|_{\infty, \Omega} + \\ & + \left\| \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] \right\|_{\infty, S_T} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Последнее предельное соотношение позволяет вычислить первую вариацию в случае $\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] = (u_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], v_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], w_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i])$ и получить первые два соотношения максимума леммы 4 (варьирование управлений $u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$ задается формулой (22)), а затем вычислить также первую вариацию, но уже в случае $\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] = (u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], w_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i])$ ($w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$ варьируется по формуле (32)). В последнем случае имеем предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_T(S_T(\bar{x}, \bar{t}))} \left(L^{\delta, \epsilon} \left(\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) - L^{\delta, \epsilon} \left(\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \lambda^i \right) \right) = \\ & = \left(w - w^{\delta, \epsilon}[\lambda](\bar{s}, \bar{t}) \right) \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (\bar{s}, \bar{t}) ds dt + B_3^\delta(\bar{s}, \bar{t}, w) - B_3^\delta(\bar{s}, \bar{t}, w^{\delta, \epsilon}[\lambda](\bar{s}, \bar{t})), \end{aligned}$$

основанное на полученном выше представлении (20) для приращения функционала Лагранжа и равномерной сходимости (см. (37))

$$\left\| \eta^\delta \left[\pi_\epsilon^{\delta, \epsilon}[\lambda^i], \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] - \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] \right\|_{\infty, S_T} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Как результат, получаем поточечный по всем трем компонентам u, v, w ПМП для управления $\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i]$:

$$\begin{aligned} H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, t) \right) &= \max_{u \in U} H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, t) \right) \text{ при п.в. } (x, t) \in Q_T, \\ H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](x), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, 0) \right) &= \max_{v \in V} H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (x, 0) \right) \text{ при п.в. } x \in \Omega, \\ H_w^{\delta, \epsilon} \left(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda^i](s, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) \right) &= \max_{w \in W} H_w^{\delta, \epsilon} \left(s, t, w, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda^i] \right] (s, t) \right) \text{ при п.в. } (s, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (38)$$

Предельные соотношения (19) и (27), как и выше, обеспечивают предельный переход при $i \rightarrow \infty$ в трех соотношениях (38). Как результат этого предельного перехода, получаем следующий (второй) ПМП для управления $\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda]$.

Лемма 7. *Управление $\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda]$, являющееся решением задачи (15) при условиях (а), (b), (c), (d), (e), (f) с компактными множествами U, V, W и при дополнительных условиях (30), (31) удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u^{\delta, \epsilon}[\lambda](x, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (x, t) \right) &= \max_{u \in U} H_u^{\delta, \epsilon} \left(x, t, u, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (x, t) \right) \text{ при п.в. } (x, t) \in Q_T, \\ H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v^{\delta, \epsilon}[\lambda](x), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (x, 0) \right) &= \max_{v \in V} H_v^{\delta, \epsilon} \left(x, v, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (x, 0) \right) \text{ при п.в. } x \in \Omega, \\ H_w^{\delta, \epsilon} \left(s, t, w^{\delta, \epsilon}[\lambda](s, t), \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (s, t) \right) &= \max_{w \in W} H_w^{\delta, \epsilon} \left(s, t, w, \eta^\delta \left[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda] \right] (s, t) \right) \text{ при п.в. } (s, t) \in S_T, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\eta^\delta[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda]] \equiv \eta^\delta[\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda], \lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи (17) при $\pi = \pi^{\delta, \epsilon}[\lambda]$ И, наоборот, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi \in \mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторой $\lambda \in H = L_2(\Omega)$ соотношению максимума (39) и уравнению (17), в которых $\pi^{\delta, \epsilon}[\lambda]$ надо заменить на π , доставляет минимум в задаче (15).

После доказательства двух вариантов принципа максимума Понтрягина (см. леммы 4, 7) для простейшей задачи оптимального управления (15) можем переформулировать полученный выше регуляризованный принцип Лагранжа теоремы 2 для задачи (ОС⁰) в форме регуляризованных принципов максимума. Для этой цели можно использовать оба варианта принципа максимума лемм 4, 7.

С целью указанных переформулировок, прежде всего, обозначим через $\Pi_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 4 в задаче (15), а через $\tilde{\Pi}_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$ — множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих принципу максимума леммы 7. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot) + \varepsilon \|\cdot\|^2$, каждое из этих множеств состоит из одного элемента: $\Pi_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda] \equiv \pi_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$, $\tilde{\Pi}_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda] \equiv \tilde{\pi}_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$ и справедливы равенства (каждое при соответствующих оговоренных выше условиях) $\pi_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda] = \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$, $\tilde{\pi}_m^{\delta, \varepsilon}[\lambda] = \pi^{\delta, \varepsilon}[\lambda]$. Тогда непосредственными следствиями теоремы 2 и лемм 4, 7 являются следующие регуляризованные ПМП в задаче оптимального управления $(\tilde{P}^0)$, для которой в этом случае справедливо равенство $\beta = \beta_0$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (а), (а'), (b), (c), (d), (e), (f), а множества U , V , W — выпуклые компакты. Тогда все утверждения теоремы 2 остаются справедливыми и в том случае, если в них $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$ заменяется везде на $\pi_m^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (а), (b), (c), (d), (e), (f) и дополнительные условия (30), (31), а множества U , V , W — выпуклые компакты. Тогда все утверждения теоремы 2 остаются справедливыми и в том случае, если в них $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$ заменяется везде на $\tilde{\pi}_m^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — Наука, 1977.
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. — М.: МЦНМО, 2011.
5. Гамкрелидзе Р. В. Математические работы Л. С. Понтрягина // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1998. — 60. — С. 5–23.
6. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. Плотников В. И. Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. — 1965. — 165, № 1. — С. 33–35.
9. Сумин М. И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — 51, № 9. — С. 1594–1615.
10. Сумин М. И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 1. — С. 25–49.
11. Сумин М. И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2019. — 25, № 1. — С. 279–296.
12. Сумин М. И. О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2020. — 26, № 2. — С. 252–269.
13. Сумин М. И. О регуляризации принципа Лагранжа и построении обобщенных минимизирующих последовательностей в выпуклых задачах условной оптимизации // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2020. — 30, № 3. — С. 410–428.
14. Сумин М. И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2004. — 44, № 11. — С. 2001–2019.
15. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
16. Breitenbach T., Borzi A. A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals // J. Dynam. Control Syst. — 2019. — 25, № 3. — P. 403–435.
17. Breitenbach T., Borzi A. On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems // Num. Funct. Anal. Optim. — 2019. — 40, № 13. — С. 1489–1531.
18. Casas E. Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. — 1997. — 35. — P. 1297–1327.

19. *Raymond J.-P., Zidani H.* Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations// Appl. Math. Optim. — 1999. — 39, № 2. — P. 143–177.

Сумин Михаил Иосифович

Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина;

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

E-mail: m.sumin@mail.ru