ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 14–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-14-28

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНОГО АНАЛОГА НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2022 г. **Б. Х. ТУРМЕТОВ, Б. Ж. КАДИРКУЛОВ**

Аннотация. Работа посвящена методам решения краевой задачи Дирихле и периодической краевой задачи для одного класса нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с инволютивными отображениями аргументов. Введено понятие нелокального аналога уравнения Лапласа, обобщающее классическое уравнение Лапласа. Предложен метод построения собственных функций и собственных значений спектральной задачи с помощью разделения переменных. Исследованы вопросы полноты полученной системы собственных функций. Введено понятие дробного аналога нелокального уравнения Лапласа. Для рассматриваемого уравнения рассматриваются краевые задачи с условием Дирихле и с периодическими условиями. Обоснована корректность поставленных в данной работе задач, а также приведено доказательство существования и единственность решения краевых задач.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова—Капуто, нелокальное дифференциальное уравнение, инволюция, задача Дирихле, периодическая краевая задача, собственные функции, функция Миттаг-Леффлера, ряд Фурье.

ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE FRACTIONAL ANALOG OF THE NONLOCAL LAPLACE EQUATION

© 2022 **B. Kh. TURMETOV, B. Zh. KADIRKULOV**

Abstract. In this paper, we examine methods for solving the Dirichlet boundary-value problem and the periodic boundary-value problem for one class of nonlocal second-order partial differential equations with involutive argument mappings. The concept of a nonlocal analog of the Laplace equation is introduced. A method for constructing eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem based on separation of variables is proposed. The completeness of the system of eigenfunctions is examined. The concept of a fractional analog of the nonlocal Laplace equation is introduced. For this equation, boundary-value problems with the Dirichlet and periodic conditions are considered. The well-posedness of these problems is verified and the existence and uniqueness of the solution of boundary-value problems are proved.

Keywords and phrases: Gerasimov–Caputo fractional derivative, nonlocal differential equation, involution, Dirichlet problem, periodic boundary-value problem, eigenfunction, Mittag-Leffler function, Fourier series.

AMS Subject Classification: 34K37,35A09, 35J25

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08855810).

1. Введение и постановка задачи. Понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. По классификации, приведенной в книге [10] А. М. Нахушева, к таким уравнениям относятся: нагруженные уравнения; уравнения, содержащие дробные производные искомой функции; уравнения с отклоняющимися аргументами. В состав таких уравнений входят неизвестная функция и ее производные при различных значениях аргументов. Среди нелокальных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер. В настоящей работ вводится понятие нелокального оператора Лапласа и исследуются спектральные вопросы некоторых краевых задач. Итак, в трехмерном параллелепипеде рассматриваются вопросы однозначной разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога нелокального уравнения Лапласа.

Дифференциальные уравнения с инволюцией исследовались в работах многочисленных авторов (см., например, [1, 2, 11–14, 19, 21, 22, 24, 26]). В работе А. В. Линькова [4] для аналогов параболического, гиперболического и эллиптического уравнений с инволюцией

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) - \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t > 0, \quad -\pi < x < \pi,$$
$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t > 0, \quad -\pi < x < \pi,$$
$$u_{tt}(t,x) + u_{xx}(t,x) + \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t > 0, \quad -\pi < x < \pi$$

исследованы краевые и начально-краевые задачи. Применение метода Фурье разделения переменных к этим задачам приводит к одномерной спектральной задаче

$$y''(x) + \varepsilon y''(x) = -\lambda y(x), \quad -\pi < x < \pi,$$

с соответствующими краевыми условиями. Собственные функции этой задачи имеют вид

$$y_{k,1}(t) = \sin kt, \quad y_{k,1}(t) = \cos(k + 0{,}5)t,$$

а собственные значения —

$$\lambda_k^{(1)} = (1-\varepsilon)k, \quad \lambda_k^{(2)} = (1+\varepsilon)(k+0{,}5).$$

Нужно отметить, что собственные функции уравнения с инволюцией совпадают с собственными функциями классического уравнения Лапласа при $\varepsilon = 0$, и отличие в этих задачах будет только в собственных значениях.

В настоящей работе мы рассматриваем двумерное обобщение дробного аналога эллиптического уравнения с инволюцией. В работе исследуются вопросы разрешимости краевых задач с условием Дирихле и периодическими условиями.

Переходим к постановке задачи. Пусть $0 < p$, q, T — действительные числа, $\Pi = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < p,\ 0 < x_2 < q\}$ — прямоугольник, $Q = (0,T) \times \Pi$. Для любой точки $x = (x_1, x_2) \in \Pi$ рассмотрим отображения

$$I_0x = (x_1, x_2), \quad I_1x = (p - x_1, x_2), \quad I_2x = (x_1, q - x_2), \quad I_3x = (p - x_1, q - x_2).$$

Очевидно, что для любого $j = \overline{0,3}$ выполняются равенства $I_j^2 x = x$, т.е. отображения I_j являются инволюциями. Кроме того, справедливы также следующие равенства

$$I_1 \cdot I_2 = I_2 \cdot I_1 = I_3, \quad I_1 \cdot I_3 = I_3 \cdot I_1 = I_2, \quad I_2 \cdot I_3 = I_3 \cdot I_2 = I_1.$$

Пусть a_j — действительные числа, $j = \overline{0,3}$, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным x_1 и x_2. Для функции $v(x_1, x_2) \in C^2(\Pi)$ введем оператор

$$Lv(x) \equiv a_0 \Delta v(I_0x) + a_1 \Delta v(I_1x) + a_1 \Delta v(I_2x) + a_1 \Delta v(I_3x).$$

Назовем оператор L нелокальным оператором Лапласа. Если $a_0 = 1$, $a_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, то L совпадает с обычным двумерным оператором Лапласа.

Рассмотрим в области Q следующее уравнение:

$$D_t^{2\alpha} u(t,x) + a_0 \Delta u(t, I_0x) + a_1 \Delta u(t, I_1x) + a_1 \Delta u(t, I_2x) + a_1 \Delta u(t, I_3x) = 0, \quad (t,x) \in Q. \tag{1}$$

Здесь $D^{2\alpha} = {}_CD_{0+}^{\alpha} \cdot {}_CD_{0+}^{\alpha}$, ${}_CD_{0+}^{\alpha}$ — производная порядка $\alpha \in (0,1]$ в смысле Герасимова—Капуто [18], a_j — действительные числа, $\Delta u(t, I_jx)$ означает $\Delta u(t, I_jx) = \Delta u(t,z)|_{z=I_jx}$, $j = \overline{0,3}$.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области Q назовём функцию $u(t,x)$ из класса $u(t,x) \in C(\overline{Q})$, $D_t^{2\alpha}u, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2} \in C(Q)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле.

Если $\alpha = 1$, $a_0 = 1$, $a_j = 0$, $j = 1,2,3$, то уравнение (1) совпадает с классическим уравнением Лапласа. А в случае $\alpha = 1$, $a_j \neq 0$, $j = \overline{0,3}$, получаем нелокальный аналог уравнения Лапласа. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) представляет собой дробный аналог нелокального уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными.

Рассмотрим в области Q следующие задачи.

Задача D. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее условиям

$$u(0,x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2), \quad u(T,x_1,x_2) = \psi(x_1,x_2), \quad x = (x_1,x_2) \in \overline{\Pi}, \tag{2}$$

$$u(t,0,x_2) = u(t,q,x_2) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q, \tag{3}$$

$$u(t,x_1,0) = u(t,x_1,p) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p. \tag{4}$$

Задача P. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее краевому условию (2) и условиям

$$u(t,0,x_2) = u(t,0,x_2), \quad u_{x_2}(t,0,x_2) = u_{x_2}(t,0,x_2), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q,$$

$$u(t,x_1,0) = u(t,x_1,p), \quad u_{x_1}(t,x_1,0) = u_{x_1}(t,x_1,p), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p,$$

где $\varphi(x_1,x_2)$, $\psi(x_1,x_2)$ — заданные функции.

Отметим, что свойства секвенциальных производных Герасимова—Капуто исследованы в работе [15]. В двухмерном случае аналогичные задачи со секвенциальными производными Герасимова—Капуто изучены в работах [27–29]. Кроме того, задача Дирихле и Неймана с обычными производными Герасимова—Капуто исследованы в работах [5–7]. Прямые и обратные задачи для уравнения дробного порядка в трехмерном случае изучены также в работах [16, 20, 23, 25].

2. Решение одномерной задачи дробного порядка.

Пусть μ — положительное действительное число. Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения дробного порядка

$$D^{2\alpha}y(t) - \mu^2 y(t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$y(0) = a, \quad y(T) = b, \tag{6}$$

где a, b — действительные числа. Решением задачи (5), (6) назовём функцию $y(t)$ из класса

$$y(t) \in C[0,T], \quad D^{\alpha}y(t) \in C[0,T], \quad D^{2\alpha}y(t) \in C(0,T).$$

Лемма 1 (см. [27]). *Общее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$y(t) = C_1 E_{\alpha,1}(\mu t^{\alpha}) + C_2 E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}), \tag{7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

— функция Миттаг-Леффлера.

Из этой леммы легко получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение задачи* (5), (6) *существует, единственно и имеет вид*

$$y(t) = aC(\mu,t) + bS(\mu,t),$$

где

$$C(\mu,t) = \frac{E_{\alpha,1}(\mu T^{\alpha})E_{\alpha,1}(-\mu t^{\alpha}) - E_{\alpha,1}(-\mu T^{\alpha})E_{\alpha,1}(\mu t^{\alpha})}{2\mu T^{\alpha} E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})}, \tag{8}$$

$$S(\mu,t) = \frac{t^{\alpha} E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 t^{2\alpha})}{T^{\alpha} E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})}. \tag{9}$$

Доказательство. Используя представление (7), получаем систему

$$a = y(0) = C_1 E_{\alpha,1}(0) + C_2 E_{\alpha,1}(0) = C_1 + C_2,$$
$$b = y(T) = C_1 E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) + C_2 E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha).$$

Из первого уравнения системы следует $C_2 = a - C_1$. Отсюда

$$C_1 = \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)},$$
$$C_2 = a - \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)} = \frac{aE_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - b}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}.$$

Далее,

$$E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k \frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} [\mu^k - (-\mu)^k] \frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{2m+1} \frac{T^{\alpha(2m+1)}}{\Gamma(\alpha(2m+1)+1)} =$$
$$= 2\mu T^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{2m} \frac{T^{2\alpha m}}{\Gamma(2\alpha m + \alpha + 1)} = 2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha}).$$

Тогда решение задачи (5), (6) представляется в виде

$$y(t) = \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) + \frac{aE_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - b}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) =$$
$$= b\frac{E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} + a\frac{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} =$$
$$= a\frac{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} + b\frac{t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 t^{2\alpha})}{T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2 T^{2\alpha})} =$$
$$= aC(\mu, t) + bS(\mu, t). \quad \square$$

Лемма 3 (см. [27]). *Для любого $t \in [0, T]$ имеет место оценка*

$$0 \leqslant C(\mu, t), S(\mu, t) \leqslant 1.$$

Лемма 4 (см. [17]). *Для функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $|z| \to \infty$ имеют место следующие асимптотические оценки*:

(i) если $|\arg z| \leqslant \rho\pi$, $\rho \in (\alpha/2, \min\{1, \alpha\})$, $\alpha \in (0, 2)$, то

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right);$$

(ii) если $\arg z = \pi$, то

$$E_{\alpha,\beta}(z) \leqslant \frac{1}{1 + |z|}.$$

3. О собственных функциях и собственных значениях классических задач с условием Дирихле и периодическими условиями. В данном пункте мы приведем известные утверждения относительно собственных функций и собственных значений следующих спектральных задач.

Задача 1 (собственные функции и собственные значения задачи Дирихле). Найти функцию $v(x) \neq 0$, $x = (x_1, x_2)$ и число $\lambda \in C$, удовлетворяющие условиям

$$-\Delta v(x_1, x_2) = \mu v(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Pi, \tag{10}$$

$$v(x_1, 0) = v(x_1, q) = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p, \quad v(0, x_2) = v(p, x_2) = 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q. \tag{11}$$

Задача 2 (собственные функции и собственные значения периодической краевой задачи)**.** Найти функцию $v(x,y)\neq 0$ и число $\lambda\in C$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}
-\Delta v(x_1,x_2)=\mu v(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\Pi,\\
v(x_1,0)=v(x_1,q),\quad v_{x_1}(x_1,0)=v_{x_1}(x_1,q),\quad 0\leqslant x_1\leqslant p,\\
v(0,x_2)=v(p,x_2),\quad v_{x_2}(0,x_2)=v_{x_2}(p,x_2),\quad 0\leqslant x_2\leqslant q.
\end{gathered}$$

Известны следующие утверждения (см., например, [9]).

Лемма 5. *Собственные функции и собственные значения задачи 1 имеют вид*

$$\begin{gathered}
v_{k,m}(x_1,x_2)=X_k(x_1)Y_m(x_2)\equiv\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{m\pi}{q}x_2,\quad k,m=1,2,\ldots,\\
\mu_{k,m}=\nu_k+\sigma_m\equiv\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{q}\right)^2,\quad k,m=1,2,\ldots
\end{gathered}$$

Система функций $\{v_{k,m}(x_1,x_2)\}_{k,m=1}^{\infty}$ *образует полную ортонормированную систему в пространстве* $L_2(\Pi)$.

Лемма 6. *Собственные функции и собственные значения задачи 2 имеют вид*

$$\begin{gathered}
v_{k,m,i,j}(x_1,x_2)=X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2),\quad k,m=0,1,2,\ldots,\quad i,j=1,2,\\
\mu_{k,m}=\nu_m+\sigma_m\equiv\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{q}\right)^2,\quad k,m=0,1,2,\ldots,
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
X_0(x_1)=\frac{1}{\sqrt{p}},\quad X_{k,1}(x_1)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\frac{2k\pi}{p}x_1,\quad X_{k,2}(x_1)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{2k\pi}{p}x_1,\quad k=1,2,\ldots,\\
Y_0(x_2)=\frac{1}{\sqrt{q}},\quad Y_{m,1}(x_2)=\sqrt{\frac{2}{q}}\cos\frac{2m\pi}{q}x_2,\quad Y_{m,2}(x_2)=\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{2m\pi}{q}x_2,\quad m=1,2,\ldots
\end{gathered}$$

Система функций $\{v_{k,m,i,j}(x_1,x_2)\}_{k,m=1}^{\infty}$, $i,j=1,2$, *образуют полную ортонормированную систему в пространстве* $L_2(\Pi)$.

4. О собственных функциях и собственных значениях задач D и P.

Рассмотрим в Π следующие спектральные задачи.

Задача 3 (собственные функции и собственные значения задачи D)**.** Найти число $\lambda\in C$ и функцию $v(x)\neq 0$, удовлетворяющие условиям

$$-Lv(x)=\lambda v(x),\quad x\in\Pi, \tag{12}$$

$$v(x_1,0)=v(x_1,q)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant p,\quad v(0,x_2)=v(p,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant q. \tag{13}$$

Пусть $w(x)$ — собственная функция задачи (10), (11). Введем функции

$$w_1^{\pm}(x)=\frac{w(x)\pm w(I_1x)}{2};\quad w_2^{\pm}(x)=\frac{w(I_2x)\pm w(I_3x)}{2}$$

и составим из них следующие комбинации:

$$\begin{aligned}
v_1(x)&=\frac{w_1^+(x)+w_2^+(x)}{2}\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{w(x)+w(I_1x)}{2}+\frac{w(I_2x)+w(I_3x)}{2}\right],\\
v_2(x)&=\frac{w_1^+(x)-w_2^+(x)}{2}\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{w(x)+w(I_1x)}{2}-\frac{w(I_2x)+w(I_3x)}{2}\right],\\
v_3(x)&=\frac{w_1^-(x)+w_2^-(x)}{2}\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{w(x)-w(I_1x)}{2}+\frac{w(I_2x)-w(I_3x)}{2}\right],\\
v_4(x)&=\frac{w_1^-(x)-w_2^-(x)}{2}\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{w(x)-w(I_1x)}{2}-\frac{w(I_2x)-w(I_3x)}{2}\right].
\end{aligned}\tag{14}$$

Заметим, что из условий $w(x)|_{\partial\Pi} = 0 \Rightarrow w(I_j x)|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1,2,3$, следует, что $v(I_j x)|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1,2,3,4$, где $\partial\Pi$ — граница области Π.

Введем следующие числа:

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \quad \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \quad \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \quad \varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3.$$

Легко показать, что если $w_{k,m}(x) = X_k(x_1)\cdot Y_m(x_2)$ — собственные функции задачи 1, то из (14) получаем следующую систему:

(a) $v^{(1)}_{k,m}(x) = X_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2)$, $k,m = 1,2,\dots$;
(b) $v^{(2)}_{k,m}(x) = X_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m}(x_2)$, $k,m = 1,2,\dots$;
(c) $v^{(3)}_{k,m}(x) = X_{2k}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2)$, $k,m = 1,2,\dots$;
(d) $v^{(4)}_{k,m}(x) = X_{2k}(x_1)\cdot Y_{2m}(x_2)$, $k,m = 1,2,\dots$

Теорема 1. *Пусть $a_j \in \mathbb{R}$ таковы, что $\varepsilon_j \neq 0$, $j = \overline{1,4}$, и пусть $w_{k,m}(x) = X_k(x_1)\cdot Y_m(x_2)$ — собственные функции задачи 1, а $\mu_{k,m}$ соответствующие собственные значения. Тогда функции $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $k,m = 1,2,\dots$, $j = \overline{1,4}$, являются собственными функциями, а $\lambda^{(j)}_{k,m} = \varepsilon_j\cdot\mu_{k,m}$, $k,m = 1,2,\dots$, соответствующими собственными значениями задачи* (12), (13).

Доказательство. Доказательство теоремы проводится непосредственным применением оператора L к функциям $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $j = \overline{1,4}$. Напомним, что

$$v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2) = X_k(x_1)\cdot Y_m(x_2), \quad X_k(x_1) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}x_1, \quad Y_m(x_2) = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{m\pi}{q}x_2,$$
$$\nu_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, \quad \sigma_m = \left(\frac{m\pi}{q}\right)^2, \quad \mu_{k,m} = \nu_k + \sigma_m,$$

а также заметим, что

$$\sin\frac{k\pi}{p}(p - x_1) = (-1)^{k+1}\sin\frac{k\pi}{p}x_1, \quad \sin\frac{m\pi}{q}(q - x_2) = (-1)^{m+1}\sin\frac{m\pi}{q}x_2.$$

Пусть $j = 1$. Тогда

$$v^{(1)}_{k,m}(p - x_1, x_2) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}(p - x_1)\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 = X_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2),$$
$$v^{(1)}_{k,m}(x_1, q - x_2) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi}{q}(q - x_2) = X_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2),$$
$$v^{(1)}_{k,m}(p - x_1, q - x_2) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}(p - x_1)\sin\frac{(2m-1)\pi}{q}(q - x_2) = X_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2).$$

Так как для любого постоянного λ имеет место равенство $(\sin\lambda t)'' = -\lambda^2\sin\lambda t$, то, применяя к функции $u^{(1)}_{k,m}(x)$ оператор $-L$, имеем

$$\begin{aligned}
&Lv^{(1)}_{k,m}(x) = a_0 X''_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2) + a_0 X_{2k-1}(x_1)\cdot Y''_{2m-1}(x_2) + \\
&\quad + a_1 X''_{2k-1}(p - x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2) + a_1 X_{2k-1}(p - x_1)\cdot Y''_{2m-1}(x_2) + a_2 X''_{2k-1}(x_1)\cdot Y_{2m-1}(q - x_2) + \\
&+ a_2 X_{2k-1}(x_1)\cdot Y''_{2m-1}(q - x_2) + a_3 X''_{2k-1}(p - x_1)\cdot Y_{2m-1}(q - x_2) + a_3 X_{2k-1}(p - x_1)\cdot Y''_{2m-1}(q - x_2) = \\
&= X_{2k-1}(x_1)(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2)(-a_0\nu_k - a_0\sigma_m - a_1\nu_k + a_1\sigma_m - a_2\nu_k + a_2\sigma_m + a_3\nu_k + a_3\sigma_m) = \\
&= X_{2k-1}(x_1)(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2)[-a_0(\nu_k + \sigma_m) - a_1(\nu_k + \sigma_m) - a_2(\nu_k + \sigma_m) - a_3(\nu_k + \sigma_m)] = \\
&= -(\nu_k + \sigma_m)(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)X_{2k-1}(x_1)(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2) = \\
&= -\mu_{k,m}\cdot\varepsilon_1 X_{2k-1}(x_1)(x_1)\cdot Y_{2m-1}(x_2) = -\lambda^{(1)}_{k,m}v^{(1)}_{k,m}(x).
\end{aligned}$$

Таким образом, для функции $v^{(1)}_{k,m}(x)$ верно равенство

$$Lv^{(1)}_{k,m}(x) = -\lambda^{(1)}_{k,m}v^{(1)}_{k,m}(x),$$

т.е. $v^{(1)}_{k,m}(x)$ являются собственными функциями оператора $-L$, а $\lambda^{(1)}_{k,m}$ — соответствующими собственными значениями. Для остальных функций $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $j=\overline{2,4}$, доказательство теоремы проводится аналогично. □

Следствие 1. *Система функций $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$.*

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4 (собственные функции и собственные значения периодической краевой задачи)**.** Найти функцию $v(x)\neq 0$ и число $\lambda\in C$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} -Lv(x)=\lambda v(x), \quad x\in\Pi, \\ v(x_1,0)=v(x_1,q), \quad v_{x_1}(x_1,0)=v_{x_1}(x_1,q), \quad 0\leqslant x_1\leqslant p, \\ v(0,x_2)=v(p,x_2), \quad v_{x_2}(0,x_2)=v_{x_2}(p,x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant q. \end{gathered}$$

Как и в случае задачи 3, если $w_{k,m,i,j}(x)=X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2)$ $(k,m=0,1,2,\ i,j=1,2)$ — собственные функции задачи 2, то из (14) получаем следующие системы:

$$\begin{cases} v^{(1)}_{0,0}(x)=X_0(x_1)Y_0(x_2)\equiv \dfrac{1}{\sqrt{pq}}, \quad u^{(1)}_{k,0}(x)=Y_0(x_2)X_{k,2}(x_1)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1; \\ v^{(1)}_{0,m,2}(x)=X_0(x_1)Y_{m,2}(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \\ v^{(1)}_{k,m}(x)=X_{k,2}(x_1)Y_{m,2}(x_2)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \quad k,m=1,2,\dots, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} v^{(2)}_{0,m}(x)=X_0(x_1)Y_{m,1}(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\dfrac{2}{q}}\sin\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad m=1,2,\dots, \\ v^{(2)}_{k,m,2,2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\sin\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad k,m=1,2,\dots, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} v^{(3)}_{k,0}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_0(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin\dfrac{2k\pi}{p}x_1, \qquad k=1,2,\dots, \\ v^{(3)}_{k,m}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_{m,2}(x_2)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad k,m=1,2,\dots, \end{cases} \tag{17}$$

$$v^{(4)}_{k,m}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_{m,1}(x_2)\equiv\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{2m\pi}{q}x_2, \quad k,m=1,2,\dots. \tag{18}$$

Как и в случае задачи D можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $a_j\in\mathbb{R}$ таковы, что $\varepsilon_j\neq 0$, $j=\overline{1,4}$, и пусть $w_{k,m,i,j}(x)=X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2)$ $(k,m=0,1,2,\ i,j=1,2)$ — собственные функции задачи 2, а $\mu_{k,m}$ — соответствующие собственные значения. Тогда функции $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $k,m=1,2,\dots$, $j=\overline{1,4}$, в (15)–(18) являются собственными функциями, а $\lambda^{(j)}_{k,m}=\varepsilon_j\cdot\mu_{k,m}$ $(k,m=1,2,\dots)$ — соответствующими собственными значениями задачи 4.*

Следствие 2. *Система $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$.*

5. Существование и единственность решения задачи D. В этом разделе приведем основные утверждения относительно задачи D. Согласно теореме 2 система функций $\left\{v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)\right\}^{\infty}_{k,m=1}$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$. Тогда решение задачи D можно искать в виде разложения по системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, т.е.

$$u(t,x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}T_{k,m}^{(j)}(t)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2), \tag{19}$$

где $T_{k,m}^{(j)}$ — неизвестные функции, $k,m=1,2,\ldots$, $j=\overline{1,4}$.

Далее, функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ также разложим в ряд по системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$:

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{k,m,j}(t)\cdot v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$

$$\psi(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\psi_{k,m,j}(t)\cdot v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$

где

$$\varphi_{k,m,j}(t)=\big(\varphi(x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big),\quad \psi_{k,m,j}(t)=\big(\psi(x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big).$$

Учитывая ортогональность системы $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, из (19) получим

$$u_{k,m,j}(t)=\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)\equiv\int_0^q\int_0^p u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{20}$$

Применяя к равенству (20) с двух сторон оператор $D^{2\alpha}$, с учетом уравнения (1) получаем

$$D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)=\int_0^q\int_0^p D^{2\alpha}u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=-\int_0^q\int_0^p L_xu(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Далее, интегрируя по частям дважды и учитывая краевые условия (3), (13) и уравнение (12), имеем

$$D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)=-\int_0^q\int_0^p u(t,x_1,x_2)Lv_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_1=$$

$$=\lambda_{k,m,j}\int_0^q\int_0^p u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\lambda_{k,m}^{(j)}u_{k,m,j}(t).$$

Кроме того, из краевых условий (2) для функций $u_{k,m,j}(t)$ получим

$$u_{k,m,j}(0)=\int_0^q\int_0^p u(0,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^q\int_0^p \varphi(x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\varphi_{k,m,j},$$

$$u_{k,m,j}(T)=\int_0^q\int_0^p u(T,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^q\int_0^p \psi(x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\psi_{k,m,j}.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных функций $u_{k,m,j}(t)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)-\lambda_{k,m}^{(j)}u_{k,m,j}(t)=0,\quad t\in(0,T),\\ u_{k,m,j}(0)=\varphi_{k,m,j},\quad u_{k,m,j}(T)=\psi_{k,m,j}.\end{cases} \tag{21}$$

Согласно лемме 2 решение этой задачи существует, единственно и имеет вид

$$u_{k,m,j}(t)=\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right), \tag{22}$$

где функции $C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}}, t\right)$ определяются соответственно по формулам (8), (9).

Подставляя найденные функции (22) в (20), получаем, что решение задачи (1)–(4) может быть представлено в виде

$$u(t,x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)u_{k,m,j}(x_1,x_2). \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon_j>0$, $j=\overline{1,4}$, и функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\varphi(x_1,x_2)\in C^2(\bar\Pi),\quad \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2),\varphi_{x_1x_2x_2}(x_1,x_2)\in C(\bar\Pi),$$
$$\psi(x_1,x_2)\in C^1(\bar\Pi),\quad \psi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\in C(\bar\Pi),$$
$$\varphi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0,\quad \psi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) *существует, единственно и может быть представлено в виде суммы ряда* (23).

Доказательство. Единственность. Пусть функции $u_1(t,x_1,x_2)$ и $u_2(t,x_1,x_2)$ являются решениями задачи (1)–(4). Тогда функция $u(t,x_1,x_2)=u_1(t,x_1,x_2)-u_2(t,x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (2)–(4). По условию $u(t,x_1,x_2)\in C(\bar Q)$. Пусть $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$ — произвольные собственные функции спектральной задачи (12), (13), а $\lambda_{k,m}^{(j)}$ — соответствующие собственные значения. Рассмотрим функцию (20), т.е. $u_{k,m,j}(t)=\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)$. В этом случае для функции $u_{k,m,j}(t)$ получаем задачу (21) с однородными краевыми условиями. Тогда

$$u_{k,m,j}(t)=0\Leftrightarrow\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)=0.$$

Таким образом, функция $u(t,x_1,x_2)$ ортогональна системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, которая является полной и образует базис в пространстве $L_2(\Pi)$. Значит, $u(t,x_1,x_2)=0$ для всех $(x_1,x_2)\in\overline{\Pi}$ и $t\in(0,T)$. Так как $u\in C(\overline{Q})$, то получим, что $u(t,x_1,x_2)\equiv 0$, $(t,x_1,x_2)\in\overline{Q}$, т.е. $u_1(t,x_1,x_2)\equiv u_2(t,x_1,x_2)$, $(t,x_1,x_2)\in\overline{Q}$.

Существование. По построению функция $u(t,x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению (1), условиям (2)–(4). Остаётся доказать правомерность этих действий. Сначала покажем, что $u(t,x_1,x_2)\in C(\overline{Q})$. В дальнейшем C будет означать произвольную постоянную, значение которой нас не интересует.

Очевидно, $|v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)|\leqslant C$, $(x_1,x_2)\in\overline{\Pi}$. Из леммы 3 также следует, что

$$0\leqslant C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right),S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\leqslant 1,\quad t\in[0,T].$$

Тогда для функции $u(t,x_1,x_2)$ из (23) получаем оценку

$$|u(t,x_1,x_2)|\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}(|\varphi_{k,m,j}|+|\psi_{k,m,j}|).$$

Исследуем сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}|\varphi_{k,m,j}|,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}|\psi_{k,m,j}|.$$

Сначала оценим коэффициенты $\varphi_{k,m,j}$. По условию теоремы $\varphi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0$, т.е. выполняются условия

$$\varphi(0,x_2)=\varphi(q,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant q;\quad \varphi(x_1,0)=\varphi(x_1,p)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant p$$

Рассмотрим случай $j=1$. Для коэффициентов $\varphi_{k,m,1}$ имеем

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,m,1} &= \int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2) v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \\
&= \frac{2}{\sqrt{pq}} \int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2) \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_1dx_2 = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi} \int\limits_0^q \left(\int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2)\,d\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\right)\right) \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_2 = \\
&= -\frac{p}{(2k-1)\pi}\frac{2}{\sqrt{pq}} \int\limits_0^q \left(\varphi(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\Big|_{x=0}^{x=p} - \int\limits_0^p \varphi_{x_1}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\,dx_1\right) \times \\
&\times \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_2 = \frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_x(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_1\,dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

Далее, из условия $\varphi(0,x_2)=\varphi(p,x_2)=0$, $0\leqslant x_2\leqslant q$ следует $\varphi_{x_1}(0,x_2)=\varphi_{x_1}(q,x_2)=0$ для всех $x_2\in[0,q]$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_1dx_2 = \\
&\qquad = \frac{2\sqrt{pq}}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_1dx_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для коэффициентов $\varphi_{k,m,1}$ справедливо равенство

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,m,1} &= \frac{2\sqrt{pq}}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_1dx_2 = \\
&= \frac{C}{(2k-1)(2m-1)}\varphi_{k,m,1}^{1,1},
\end{aligned}
$$

где использовано обозначение

$$
\varphi_{k,m,1}^{1,1} = \int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2\,dx_1dx_2.
$$

Далее, применяя неравенство Коши—Шварца, получаем

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}| &\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}|\varphi_{k,m,1}^{1,1}| = \\
&= C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}^{1,1}|^2}.
\end{aligned}
$$

Так как $\varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\in L_2(\Pi)$, а система функций

$$
w_{k,m}(x_1,x_2) = \cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2, \quad k,m=1,2,\ldots
$$

является ортогональной в пространстве $L_2(\Pi)$, то для коэффициентов $\varphi_{k,m,1}^{1,1}$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}^{1,1}|^2 \leqslant \|\varphi_{x_1x_2}\|^2.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} < \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}| < \infty.$$

Аналогично оцениваем ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,j}|, \quad j=2,3,4, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,j}|, \quad j=\overline{1,4}.$$

Например, для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}|$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}|\psi_{k,m,1}^{1,1}| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2}}\cdot\sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}^{1,1}|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}}\cdot\|\psi_{x_1x_2}\|_{L_2(\Pi)} < \infty.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(|\varphi_{k,m,1}| + |\psi_{k,m,1}|),$$

мажорирующий функциональный ряд (23), сходится. Согласно теореме Вейерштрасса (см. [3, с. 20]) ряд (23) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{Q}$, а его сумма является непрерывной функцией в этой замкнутой области.

Далее покажем, что $u_{x_1x_1}(t,x_1,x_2) \in C(Q)$. Для этого продифференцируем дважды по x_1 функцию $u(t,x_1,x_2)$ из (23):

$$u_{x_1x_1}(t,x_1,x_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right) + \psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)\frac{\partial^2 v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Введем обозначение

$$S_{k,m,j} = \left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right) + \psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)\frac{\partial^2 v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}$$

и пусть $j=1$. Так как

$$\frac{\partial^2 v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = -\frac{2}{\sqrt{pq}}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\sin\frac{(2k-1)\pi}{q}x_2,$$

то для случая $j=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi_{k,m,1} C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right) + \psi_{k,m,1} S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right)\frac{\partial^2 v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} =$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{pq}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\left(\varphi_{k,m,1} C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right) + \psi_{k,m,1} S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right)\times$$
$$\times \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2k-1)\pi}{q}x_2.$$

Если $t \geqslant \delta > 0$, то из леммы 4 следует

$$\left|C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right| \leqslant C\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}}, \quad \left|S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right| \leqslant C\cdot\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right),$$

где

$$\lambda_{k,m}^{(1)} = \varepsilon_1\left[\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2\right].$$

Тогда для суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}$$

получаем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}} + \left(\frac{(2k+1)\pi}{p}\right)^2\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}|\right).$$

Таким образом, необходимо исследовать сходимость рядов

$$R_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}},$$
$$R_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}|.$$

Используя условие $\varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2) \in L_2(\Pi)$, для $|\varphi_{k,m,1}|$ имеем

$$\varphi_{k,m,1} = \frac{C\varphi_{k,m,1}^{1,1}}{(2k-1)(2m-1)} =$$
$$= \frac{C}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{C}{(2k-1)^2(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2)\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{C\cdot\varphi_{k,m,1}^{2,1}}{(2k-1)^2(2m-1)},$$

где введено обозначение

$$\varphi_{k,m,1}^{2,1} = \int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2)\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2.$$

Отсюда

$$R_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 \frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}(2m-1)}\left|\varphi_{k,m,1}^{2,1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\cdot(2m-1)^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\varphi_{k,m,1}^{2,1}\right|^2} < \infty. \quad (24)$$

Здесь мы использовали неравенства Коши—Шварца и Бесселя, а также неравенство

$$\frac{1}{\lambda_{k,m}^{(1)}} = \frac{C}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2} \leqslant \frac{C}{(2k-1)^2+(2m-1)^2} \leqslant \frac{C}{(2k-1)^2}.$$

Рассмотрим второй ряд. Учитывая неравенство

$$\exp\left(a(\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geqslant \exp\bigl(a\lambda_{k,m}^{(1)}\bigr) = \exp\left(a\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\right)\cdot\exp\left(a\left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2\right), \quad a>0$$

и далее применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, получим

$$R_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 \exp\left((\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^4 \exp\left((\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{\alpha}}(t-T)\right)}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{(2k-1)^4}{\exp\left((2k-1)^{\frac{2}{\alpha}}(T-t)\right)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\exp\left((2m-1)^{\frac{2}{\alpha}}(T-t)\right)}}\cdot\|\psi(x_1,x_2)\|_{L_2(\Pi)} < \infty. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}(x_1,x_2)$$

сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{Q}_\delta \subset Q$, и, следовательно, его сумма принадлежит классу $C(Q)$. Аналогично доказывается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,j}(x_1,x_2), \quad j=2,3,4.$$

Следовательно, $u_{x_1x_1}(t,x,y) \in C(Q)$. Таким же образом доказывается, что функция $u_{x_1x_2}(t,x_1,x_2)$ принадлежить классу $C(Q)$. Далее, так как $u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2} \in C(Q)$, то $\Delta u \in C(Q)$. Отсюда $L_x u(t,x_1,x_2) \in C(Q)$ и в силу равенства $D_t^{2\alpha}u(t,x_1,x_2) = -L_x u(t,x_1,x_2)$ получаем, что функция $D_t^{2\alpha}u(t,x,y)$ также принадлежит классу $C(Q)$. □

6. Существование и единственность решения задачи P. В этом разделе приведем основное утверждение относительно задачи P.

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\varphi(x,y) \in C^2\left(\overline{\Pi}\right), \quad \varphi_{xxy}(x,y), \varphi_{xyy}(x,y) \in C(\bar{\Pi}), \quad \psi \in C^1(\overline{\Omega}_{x_1,x_2}), \psi_{x_1x_2} \in C(\overline{\Omega}_{x_1,x_2}),$$
$$\varphi(0,y)=\varphi(p,y), \quad \varphi'(0,y)=\varphi'(p,y), \quad \psi(x,0)=\psi(x,q),$$
$$\psi'(x,0)=\psi'(x,q), \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant q.$$

Тогда решение задачи P существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$

где $\varphi_{k,m,j}$, $\psi_{k,m,j}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ соответственно, $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$ определяются из (15)–(18), *а $\lambda_{k,m}^{(j)}$ имеют вид*

$$\lambda_{k,m}^{(j)}=\varepsilon_j\cdot\mu_{k,m}\equiv\varepsilon_j\cdot\left[\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{q}\right)^2\right],\quad k,m=0,1,2,\dots,\quad j=\overline{1,4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 8. — С. 1126–1128.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 12. — С. 2233–2246.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2009.
4. *Линьков А. В.* Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением// Вестн. Самар. ун-та. — 1999. — *12*, № 2. — С. 60–66.
5. *Масаева О. Х.* Единственность решения задачи Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 4 (24). — С. 50–53.
6. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщённого уравнения Лапласа с дробной производной// Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 3. — С. 312–322.
7. *Масаева О. Х.* Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 3 (23). — С. 83–90.
8. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто// Диффер. уравн. — 2012. — *48*, № 3. — С. 442–446.
9. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
10. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
11. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial-boundary-value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2019. — *14*, № 3. — P. 1–15.
12. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution// Num. Funct. Anal. Optim. — 2017. — *38*, № 10. — P. 1295–1304.
13. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equation with involution// Electron. J. Differ. Equations. — 2015. — 284.
14. *Cabada A., Tojo F. A. F.* On linear differential equations and systems with reflection// Appl. Math. Comput. — 2017. — *305*. — P. 84–102.
15. *Cascaval R. C., Eckstein E. C., Frota C. L., Goldstein J. A.* Fractional telegraph equations// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *276*, № 1. — P. 145–159.
16. *Dulce M., Getmanenko A.* On the relationship between the inhomogeneous wave and Helmholtz equations in a fractional setting// Abstr. Appl. Anal. — 2019. — 1483764.
17. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics, and Applications. — New York–Dordrecht–London: Springer-Verlag, 2014.
18. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
19. *Kirane M., Al-Salti N.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation// J. Nonlin. Sci. Appl. — 2016. — *9*. — P. 1243–1251.
20. *Kirane M., Malik S. A., Al-Gwaiz M.* An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Math. Meth. Appl. Sci. — 2012. — *36*, № 9. — P. 1056–1069.

21. *Kirane M., Samet B., Torebek B. T.* Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data// Electron. J. Differ. Equations. — 2017. — 257.
22. *Kopzhassarova A., Sarsenbi A.* Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — 576843.
23. *Malik S. A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Comput. Math. Appl. — 2017. — *73*, № 12. — P. 2548–2560.
24. *Przeworska-Rolewicz D.* Some boundary-value problems with transformed argument// Comment. Math. Helvet. — 1974. — *17.* — P. 451–457.
25. *Tokmagambetov N., Torebek B. T.* Well-posed problems for the fractional Laplace equation with integral boundary conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — 90.
26. *Torebek B. T., Tapdigoglu R.* Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — *40.* — P. 6468–6479.
27. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation// New York J. Math. — 2014. — *20.* — P. 1237–1251.
28. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759.* — 020070.
29. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T., Ontuganova Sh.* Some problems for fractional analogue of Laplace equation// Int. J. Pure Appl. Math. — 2014. — *94*, № 4. — P. 525–532.

Турметов Батир Худайбергенович
Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: `turmetovbh@mail.ru`

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `kadirkulovbj@gmail.com`