



ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ Δ_B -ОПЕРАТОРА КИПРИЯНОВА В ВЕСОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. Л. Н. ЛЯХОВ, Ю. Н. БУЛАТОВ

Посвящается 100-летию со дня рождения профессора И. А. Киприянова

Аннотация. Для сингулярного дифференциального оператора Киприянова в евклидовом n -полупространстве получена общая формула Грина и две формулы Грина, отвечающие специальным значениям параметра.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оператор Киприянова, ограниченная область с границей Киприянова, весовая линейная форма, формула Грина.

GREEN'S FORMULAS FOR THE KIPRIYANOV Δ_B -OPERATOR IN THE WEIGHTED LINEAR FORM

© 2024 L. N. LYAKHOV, Yu. N. BULATOV

Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor I. A. Kipriyanov

ABSTRACT. For the Kipriyanov singular differential operator in the Euclidean n -half-space, the general Green formula and two its particular cases corresponding to special values of the parameter are obtained.

Keywords and phrases: Bessel operator, Kipriyanov operator, bounded domain with Kipriyanov boundary, weighted linear form, Green's formula.

AMS Subject Classification: 35J08

1. Введение. Обычно для Δ_B -оператора Лапласа–Бесселя в евклидовом пространстве точек $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}, \quad B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \gamma_i \geq 0,$$

соответствующая весовая линейная форма сопровождается степенным весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ (см. книгу [1]

и имеющиеся в ней многочисленные ссылки). И. А. Киприянов в начале 1980-х годов на научном семинаре в Воронежском государственном университете поставил задачу об исследовании подобных операторов с отрицательными показателями степенного веса. Оказалось, что оператор Бесселя $B_{-\gamma}$ с отрицательным параметром $-1 < -\gamma < 0$ обладает рядом особенностей, отмеченных в [2–4]. В частности, при $1 < -\gamma < 0$ фундаментальное решение оператора $B_{-\gamma}$ необходимо искать в билинейной форме с весом, уже отличным от $x^{-\gamma}$. Более общие параметры операторов Бесселя приводят к необходимости исследовать операторы Киприянова в весовых линейных формах с весом $\prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}$, где ω — мультииндекс с произвольными действительными координатами.

Через $\mathbb{R}_n$ будем обозначать евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, а через $\mathbb{R}_n^+$ — n -полупространство, определенное неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $-\gamma = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ —

мультииндекс с отрицательными дробными параметрами $-1 < -\gamma_i < 0$. Следуя [4], будем называть Δ_B -оператором Киприянова сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B-\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x \in \mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}, \quad (1)$$

отрицательный параметр которого удовлетворяет неравенству $0 > -\gamma > -1$. Оператор (1), как и любой оператор Бесселя, целесообразно применять к функциям, четным по каждой координате своего аргумента, так как в этом случае

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{1}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right|_{x_i=0}.$$

Пусть $\Omega^+ \subseteq \mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0\}$. Учитывая особенность операторов Бесселя, далее полагаем, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^0 \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями от координатных гиперплоскостей $x_i = 0$. Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^0$ (условие гладкости границы И. А. Киприянова; см. [1, § 3.1]). Это условие также предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое четное продолжение через границу Γ^0 по отношению к каждой координате x_i . В связи с этим вводим следующее определение.

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определенную в n -полупространстве $\mathbb{R}_n^+$, будем называть n -четной (по Киприянову), если она допускает четное продолжение по каждой координате x_i своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

В частности, если $u \in C^k(x_i \in [0, \infty))$, то u — i -четная функция, если все её производные по x_i нечетного порядка $l \leq k$ равны нулю при $x_i = 0$. Такое определение четности введено И. А. Киприяновым (см. [1, с. 21]). В связи с этим функции, удовлетворяющие определению 1, принято называть *четными по Киприянову*.

Из определения 1 вытекает, что каждую из областей Ω^+ и Ω^- , как правило, удобно считать частично замкнутыми, т.е. считать границу Γ^0 границей симметрии и, поэтому полагаем $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ и $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$. Точки, принадлежащие $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ или $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$, будем называть s -внутренними. Аналогично, подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \cup \Gamma_*^0$ области Ω^+ с возможно общей границей $\Gamma_*^0 \subset \Gamma^0$ будем называть s -подобластью области Ω^+ . Это же касается и соответствующей подобласти области Ω^- .

2. Оператор Δ_B в весовой линейной форме. Пусть u и v — n -четные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$.

Через $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ обозначим n -мультииндекс, состоящий из произвольных действительных чисел. Введем весовую билинейную форму, в рамках которой сингулярный дифференциальный Δ_B -оператор Киприянова может не совпадать со своим сопряжением, т.е. не является самосопряженным по Лангранжу (эрмитовым). Рассмотрим весовую билинейную форму следующего вида:

$$(u, v)_\omega = \int_{\Omega_n^+} u(x) v(x) x^\omega dx, \quad x^\omega = \prod_{i=1}^n x_i^{\omega_i}. \quad (2)$$

Дополнительно введем класс функций, соответствующим образом убывающих на границе Γ_0 . Именно, обозначим через

$$\mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma = \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma(\Omega^+) = C_{\text{ev}}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$$

и положим

$$\varphi \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma = \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma(\Omega^+) = C_{\text{ev}, \omega}^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+}), \quad \text{если } x_i^{\omega_i} \varphi(x) = O(x_i), \quad x_i \rightarrow +0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Введем обозначение

$$\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i + 2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] = \Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\gamma + \omega_0)}{x^2},$$

где $\omega_0 = (1, \dots, 1)$.

Теорема 1 (общая K_γ -формула Грина). Пусть весовая линейная форма определена равенством (2) и пусть $\gamma_i \in (0, 1)$, ω_i — произвольные действительные числа, $i = \overline{1, n}$. Тогда для всех функций $u(x) \in \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma(\Omega^+)$ и $v(x) \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega}^\gamma(\Omega^+)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - \left(u, \left[\Delta_{B_{\gamma+2\omega}} + \frac{(\gamma + \omega)(\omega - 1)}{x^2} \right] v \right)_\omega = \\ = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{\nu}$ — направление внешней нормали к части границы Γ^+ .

Доказательство. Сингулярные операторы Бесселя рассмотрим в дивергентной форме:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i} = \sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Возьмем произвольную область Ω_*^+ с кусочно гладкой границей, строго s -внутреннюю в области Ω^+ . В этом случае обе функции u и v принадлежат $C_{\text{ev}}^2(\Omega_*^+)$. Исходное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega = \int_{\Omega_*^+} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) v(x) x^\omega dx = \\ = \int_{\Omega_*^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) v(x) x_i^{\omega_i + \gamma_i} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} dx. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega = \int_{\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) x_i^{\omega_i} \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} d\Gamma - \\ - \int_{\Omega_*^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{\omega_i} + v(x) (\omega_i + \gamma_i) x_i^{\omega_i - 1} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x_j^{\omega_j} dx, \end{aligned}$$

где ν — направление внешней нормали к границе $\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0$. Применяя формулу интегрирования по частям второй раз, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_*^+} \left(\sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i} u(x) \right) v(x) x^\omega dx = \\ = \int_{\Gamma_*^+ \cup \Gamma_*^0} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma + \\ + \int_{\Omega_*^+} u(x) \left(\sum_{i=1}^n \left[B_{\gamma_i + 2\omega_i} + \frac{(\gamma_i + \omega_i)(\omega_i - 1)}{x_i^2} \right] v(x) \right) x^\omega dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Учтем, что в (5) участок границы Γ^0 состоит из соответствующих кусков координатных плоскостей $x_i = 0$. Поэтому на части границы Γ_*^0 направление нормали ν совпадает с соответствующим направлением оси Ox_i . Интеграл по Γ^0 представляет собой набор интегралов по каждой такой

части границы, заданной уравнением $x_i = 0$, которую обозначим $\Gamma_*^{0,i}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_*^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_*^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0. \end{aligned}$$

При условии принадлежности функций v функциональному классу $\mathcal{M}_{\text{ev},\omega}^\gamma$ (см. (3)) все интегралы по $\Gamma_*^{0,i}$ исчезнут. Поэтому

$$\int_{\Gamma_*^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = 0.$$

Устремляя в полученном равенстве Ω_*^+ к Ω^+ и учитывая непрерывность функций $\partial u/\partial \bar{v}$ и $\partial v/\partial \bar{v}$ в $\overline{\Omega^+}$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} - u(x) v(x) \frac{(\omega_i + \gamma_i)}{x_i} \right) x^\omega d\Gamma^0 = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Из равенств (5) и (6) равенство (4) вытекает с очевидностью. Доказательство закончено. $\square$

3. Формулы Грина для оператора Киприянова. Равенство (4) будем называть *общей $K_{-\gamma}$ -формулой Грина* для $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператора Киприянова.

Наиболее употребительными при исследовании уравнений с $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператором Киприянова (1) оказываются формулы, полученные из (4) при совпадении мультииндексов весовой билинейной формы (2) с параметрами операторов Бесселя, входящих в оператор Киприянова (1), т.е. $\omega = -\gamma$; если мультииндекс билинейной формы (2) ω состоит из единиц, т.е. $\omega = \omega_0 = (1, \dots, 1)$ (см. [2, 3]). В этих случаях из (4) получим две формулы, которые будем называть *первой и второй основными $K_{-\gamma}$ -формулами Грина* для оператора Киприянова.

Первая основная $K_{-\gamma}$ -формула Грина. Пусть мультииндексы ω и γ совпадают: $\omega_i = -\gamma_i$, $i = \overline{1, n}$, и пусть $u \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$ и $v \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$. Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega - (u, \Delta_{B_{-\gamma}} v)_{-\gamma} = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{v}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{v}} \right) x^{-\gamma} d\Gamma. \quad (7)$$

Доказательство. Равенство (7) вытекает из общей формулы (4), если в ней положить $\omega_i = -\gamma_i$. Остается проверить его справедливость при условии, что $u, v \in C_{\text{ev}}^2(\Omega^+)$. Для этого вернемся к равенству (6), правая часть которого при $\omega = -\gamma$ примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i}, \quad (8)$$

где $\Gamma^{0,i}$ — соответствующий участок границы области Ω^+ , уравнение которого $x_i = 0$. Напомним, что в силу естественных причин, связанных с симметрией, область Ω^+ мы считаем частично замкнутой, т.е. $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$. Это означает, что рассматриваемые функции непрерывно дифференцируемы в окрестности каждого участка $\Gamma^{0,i}$ границы Γ^0 . Из x_i -четности этих функций вытекают неравенства

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = O(x_i) \text{ при } x_i \rightarrow 0; \quad \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = O(x_i) \text{ при } x_i \rightarrow 0. \quad (9)$$

Отсюда, учитывая, что $0 < \gamma_i < 1$, получим

$$\lim_{x_i \rightarrow +0} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0, \quad \lim_{x_i \rightarrow +0} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = 0.$$

Следовательно, каждое слагаемое в сумме (8)

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \Big|_{\Gamma^{0,i}} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i} = \\ = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) x_i^{-\gamma_i} - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \right) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n x^{-\gamma_j} d\Gamma^{0,i} = 0, \end{aligned}$$

Равенство (7) доказано. $\square$

Из формулы (7) вытекают важные для приложений следствия (см. также [3], где рассматривался только случай $\omega_i = -\gamma_i$).

1. Пусть в (7) $u = v$; тогда

$$\int_{\Omega^+} (\Delta_{B_{-\gamma}} u) u x^\omega dx = \int_{\Omega^+} u \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx.$$

2. Если в (7) $v = 1$, то

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B_{-\gamma}} u x^\omega dx = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma.$$

3. Условием K_γ -гармоничности функции $u = u(x)$ в области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ является равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma = 0.$$

Вторая основная $K_{-\gamma}$ -формула Грина Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и

$$u \in \mathcal{M}_{\text{ev}}^\gamma, \quad v \in \mathcal{M}_{\text{ev}, \omega_0}^\gamma. \quad (10)$$

Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}} u, v)_\omega (u, \Delta_{B_{\gamma+2}} v)_{\omega_0} = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - \sum_{i=1}^n u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma, \quad (11)$$

где $\omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$.

Доказательство. Равенство (11) вытекает также из общей формулы (4), если положить $\omega_i = 1$. Остается проверить его справедливость при условии (10). Для этого вернемся к равенству (6), правая часть которого при $\omega = \omega_0$ примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma^{0,i}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma. \quad (12)$$

Первые два слагаемых в правой части равенства (12) равны нулю по причине выполнения условий (9). Равенство нулю третьего слагаемого в (12) есть следствие требования (10). Следовательно,

$$\int_{\Gamma^0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} v(x) - u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \bar{\nu}} - u(x) v(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma = 0. \quad \square$$

Из формулы (11) вытекают следующие результаты.

1. Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и $u = v$ в (11). Тогда

$$\int_{\Omega^+} (\Delta_{B-\gamma} u) u x^\omega dx - \int_{\Omega^+} u \Delta_{B_{\gamma+2}} u x^{\omega_0} dx = - \int_{\Gamma^+} \sum_{i=1}^n u^2(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} x^{\omega_0} d\Gamma.$$

2. Пусть $\omega = \omega_0 = (1, 1, \dots, 1)$ и $v = 1$ в (11). Тогда

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B-\gamma} u x^\omega dx = \int_{\Gamma^+} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - \sum_{i=1}^n u(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} \right) x^{\omega_0} d\Gamma. \quad (13)$$

3. Условием K_γ -гармоничности функции $u = u(x)$ в области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ является равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} x^{-\gamma} d\Gamma = \int_{\Gamma^+} \sum_{i=1}^n u(x) \frac{(1 + \gamma_i)}{x_i} x^{\omega_0} d\Gamma, \quad (14)$$

которое выполняется в любой s -внутренней (симметрично внутренней, см. введение) подобласти Ω_*^+ области Ω^+ .

Доказательство. Действительно, если функция u является K_γ -гармонической, то равенство (14) непосредственно следует из (13). Напротив, пусть в каждой внутренней s -подобласти Ω_*^+ области Ω^+ выполняется (14). Тогда из (13) вытекает, что равенство

$$\int_{\Omega_*^+} \Delta_{B-\gamma} u x^\omega dx = 0$$

выполняется в любой подобласти области Ω^+ , что возможно лишь в случае, когда $\Delta_{B-\gamma} u(x) = 0$ в любой точке x области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
2. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Роцункин С. А., Санина Е. Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 12. — С. 1654–1665.
3. Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Роцункин С. А., Санина Е. Л. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова // Диффер. уравн. — 2023. — 59, № 4. — С. 483–493.
4. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова—Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 12. — С. 1610–1620.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ляхов Лев Николаевич

Воронежский государственный университет;

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина;

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского

E-mail: levnya@mail.ru

Булатов Юрий Николаевич

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

E-mail: y.bulatov@bk.ru