



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 108–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-108-119

УДК 519.1

РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ

© 2023 г. В. А. СКОРОХОДОВ, Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, Х. АБДУЛРАХМАН

Аннотация. В настоящей работе изучается модель распределения ресурсного потока в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Особенностью таких сетей является зависимость длительностей прохождения по дугам от дискретного времени. Данная особенность существенно влияет на процесс перераспределения ресурсов. Показано, что в рассматриваемых сетях имеет место сохранение суммарного ресурса, при этом, суммарный ресурс может распределяться не только по вершинам, но и по некоторым дугам. Получено соотношение о сохранении суммарного ресурса в сети. Предложен метод нахождения порогового значения в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Показано, что если суммарный ресурс не меньше порогового значения в исходной сети, то в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам существует единственный предельный поток.

Ключевые слова: динамическая сеть, эргодическая ресурсная сеть, ресурсный поток, распределение потока, пороговое значение, начальное состояние ресурсной сети.

RESOURCE NETWORKS WITH DYNAMIC ARC DURATIONS

© 2023 V. A. SKOROKHODOV, Ya. M. ERUSALIMSKIY, H. ABDULRAHMAN

ABSTRACT. In this paper, we study a model for the distribution of a resource flow in a resource network with dynamic durations of passage along arcs. A feature of such networks is the dependence of the duration of passage along arcs on discrete time. This feature significantly affects the process of redistribution of resources. It is shown that in the networks considered, the total resource is preserved, while the total resource can be distributed not only over vertices, but also over some arcs. A relation is obtained for the conservation of the total resource in the network. A method for finding the threshold value in a resource network with dynamic durations of passage along arcs is proposed. It is shown that if the total resource is not less than the threshold value in the original network, then in a network with dynamic durations of passage along arcs, there is a unique limiting flow.

Keywords and phrases: dynamic network, ergodic resource network, resource flow, flow distribution, threshold value, resource network initial state.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C50, 90B10

1. Введение. Исследования динамических потоковых моделей ведутся уже довольно продолжительное время. Так, например, в [7, 11, 15–18] исследуются динамические периодические сети и потоковые задачи в таких сетях. В [7] показано, что такие сети подобны графам с нестандартной достижимостью (см. [1, 20]), и предложен подход к решению задач о потоках в таких сетях. Ресурсные сети, являющиеся частным случаем динамических потоковых моделей на графах, предложены в работах О. П. Кузнецовой и Л. Ю. Жиликова (см., например, [2–6, 19]).

Ресурсная сеть представляет собой связный ориентированный граф, для каждой дуги которого заданы пропускная способность и для каждой вершины количество ресурса в этой вершине.

В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между соседними вершинами по определенным правилам, удовлетворяющим двум условиям:

- (i) (условие замкнутости сети): ресурс в любой вершине сети не добавляется извне и не исчезает;
- (ii) (условие неразрывности потока): ресурс, выходящий из вершины, вычитается, а входящий в вершину — прибавляется к ресурсу данной вершины.

Таким образом, между каждыми последовательными моментами дискретного времени по дугам сети проходит поток в его классическом понимании. Также в [5, 13, 14] исследованы ресурсные сети с «жадными» вершинами.

Графы с динамическими длительностями прохождения по дугам предложены в [8]. Особенностью потоковых задач в таких сетях является эффект «блокировки» прохождения части потока по некоторым дугам в определённые моменты времени. Таким образом, изменение длительностей прохождения по дуге влияет на пропускную способность, превращая сеть в «скрытую» динамическую сеть. При этом пропускные способности обыкновенной динамической сети меняются в заданные моменты времени, тогда как у «скрытой» динамической сети на пропускную способность дуги в текущий момент влияет суммарная величина потока, начавшего переход по этой дуге в предыдущие моменты времени.

Настоящая работа посвящена изучению процесса перераспределения ресурса в ресурсных сетях с динамическими длительностями прохождения по дугам. Рассмотрен вспомогательный граф (см. [8]), процесс перераспределения ресурса, на котором в точности соответствует аналогичному процессу на исходной сети (см. [12]). Показано, что в такой сети имеет место сохранение суммарного ресурса, однако ресурс может распределяться не только по вершинам, но и по некоторым дугам. Получено соотношение о сохранении суммарного ресурса в сети. Предложен метод нахождения порогового значения в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Показано, что если суммарный ресурс не меньше порогового значения в исходной сети, то в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам существует единственный предельный поток.

2. Основные понятия. Приведем основные понятия, определения и утверждения необходимые для дальнейшего изложения (см. [1–10, 19]).

Определение 1. Ресурсной сетью называется такой связный ориентированный граф $G(X, U, f)$, что с каждой дугой u такой сети связана величина её пропускной способности r_u , а с каждой вершиной x — величина $q_x(t)$, которая называется количеством ресурса в вершине x в момент времени $t \in Z_+$. Вектор $\mathbf{Q}(t) = (q_{x_1}(t), \dots, q_{x_n}(t))$ называется состоянием сети G в момент t .

Правила функционирования ресурсной сети определяются следующим образом: для каждой вершины $x \in X$

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{u \in [x]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x]^-} F(u, t), \quad (1)$$

где $F(u, t)$ — величина ресурсного потока выходящего по дуге u (положим для определённости $f(u) = (x, y)$) в момент времени t определяется следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u, & q_x(t) > \sum_{v \in [x]^+} r_v; \\ \frac{r_u}{\sum_{v \in [x]^+} r_v} \cdot q_x(t), & q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+} r_v; \end{cases} \quad (2)$$

здесь и далее $[x]^+$ — множество всех дуг, входящих в вершину x , а $[x]^-$ — множество всех дуг, выходящих из вершины x .

Правила функционирования сети (1) и (2) можно записать в сокращенной форме:

$$\mathbf{Q}(t+1) = \mathcal{A}(\mathbf{Q}(t)). \quad (3)$$

Отметим, что оператор $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является линейным; он линеен только в том случае, если для каждого момента времени величина потока по каждой дуге определяется только нижней строчкой в (2).

Обозначим через R матрицу пропускных способностей дуг сети G ; при этом считаем, что

$$r_{ij} = \begin{cases} \sum_{u \in [x_i]^+ \cap [y_j]^-} r_u, & \text{если существует хотя бы одна дуга из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0, & \text{если из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j \text{ не ведёт ни одной дуги.} \end{cases}$$

Кроме того, обозначим через P стохастическую матрицу сети G , удовлетворяющую условию

$$p_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{k=1}^n r_{ik}} \quad \forall i, j,$$

а через W — величину суммарного ресурса сети:

$$W = \sum_{x \in X} q_x(0).$$

Определение 2. Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если $Q(t) = Q(t+1)$.

Согласно правилам перераспределения ресурса, если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. Состояние $Q^* = (q_{x_1}^*, \dots, q_{x_n}^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для каждого $i \in [1; n]_Z$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такое t_ε , что для всех $t > t_\varepsilon$ имеет место неравенство $|q^* - q_{x_i}(t)| < \varepsilon$.

Определение 4. Состояние Q^* называется предельным, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t , что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Таким образом, зная начальное состояние $Q(0)$ сети G , можно находить любое из состояний $Q(t)$, а также предельное состояние и предельный поток в сети G (см. [3]).

Определим множества вершин $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$ следующим образом. Будем говорить, что в момент времени t вершина x лежит в множестве $Z^-(t)$, если $q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+} r_v$; в противном случае

считаем, что $x \in Z^+(t)$. Другими словами, множество $Z^-(t)$ состоит из тех вершин ресурсной сети, которые в момент времени t передают по выходящим дугам весь свой текущий ресурс, т.е. каждая дуга, выходящая из вершины $x \in Z^-(t)$, насыщается ресурсным потоком по второму правилу (вторая строка) в (2). Множество $Z^+(t)$ образуется теми вершинами, для которых при полном насыщении своих выходящих дуг ресурсным потоком — работая по правилу 1 (первая строка в (2)) — передаёт не весь свой текущий ресурс.

Определение 5. Будем говорить, что вершина x переходит в зону Z^- , если найдётся такой момент времени t' , что $x \in Z^-(t)$ для всех $t \geq t'$.

Определение 6. Пороговым значением для ресурсной сети G будем называть такую величину T , что если $W \leq T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^- . В противном случае для каждого момента времени t считаем, что $Z^+(t) \neq \emptyset$.

3. Графы с зависимостью длительностей прохождения по дугам. Кратчайшие пути и максимальный поток. Пусть G — такой орграф, что для каждой его дуги u указан вес $d(u)$ — длительность (количество тактов) прохождения по ней. Графы с такими особенностями рассмотрены в [1, 8]. В [1] показано, что если длительность прохождения по дугам не меняется со временем (т.е. $d(u, t_1) = d(u, t_2)$ для всех $u \in U$ и всех $t_1, t_2 \in Z$), то решение классических графовых задач (например, задачи о кратчайшем пути или о максимальном потоке) на рассматриваемом графе ничем не отличается от решения аналогичных задач на графах без учёта длительностей прохождения по дугам. Будем далее считать, что длительность прохождения каждой дуги u может

меняться со временем и описывается периодической по времени функцией с общим для всех дуг периодом D , т.е. $d(u, t + D) = d(u, t)$ для любого $t \in \mathbb{Z}$.

Для решения задачи о кратчайшем пути на графе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени применяется подход, согласно которому строится вспомогательный граф большего размера таким образом, чтобы задача о кратчайшем пути на графе G сводилась бы к аналогичной классической на вспомогательном графе G' .

Правила построения графа G' :

- (а) каждой вершине x исходного графа G ставится в соответствие D вершин $\{x^0, \dots, x^{D-1}\}$ на вспомогательном графе G' ;
- (б) каждой дуге u (для определённости полагаем $f(u) = (x, y)$) исходного графа G ставится в соответствие D дуг $\{u^0, \dots, u^{D-1}\}$ на вспомогательном графе G' , причем $f'(u^t) = (x^t, y^{t+d(u,t) \pmod{D}})$. Дуге u^t присваивается вес, равный значению $d(u, t)$.

Пусть x — некоторая вершина, а u — дуга исходного графа G . Введём следующие обозначения: $A_x = \{x^0, \dots, x^{D-1}\}$ — множество вершин вспомогательного графа G' , соответствующих вершине x , $B_u = \{u^0, \dots, u^{D-1}\}$ — множество дуг вспомогательной сети G' , соответствующих дуге u .

Определение 7. Множество вершин X' вспомогательного графа G' может быть представлено в виде объединения подмножеств $V_i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\}$, которые будем называть i -м уровнем (временным слоем) графа G' .

Справедливы следующие теоремы о связи путей исходного и вспомогательного графов (см. [1]).

Теорема 1. Вершина y достижима из вершины x на исходном графе G тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе G' из множества вершин $A_x = \{x_0, x_1, \dots, x_{D-1}\}$ достижима хотя бы одна вершина множества A_y . Более того, каждому пути μ' на вспомогательном графе однозначно соответствует путь μ на исходном графе и имеет место равенство весов пути μ и пути μ' .

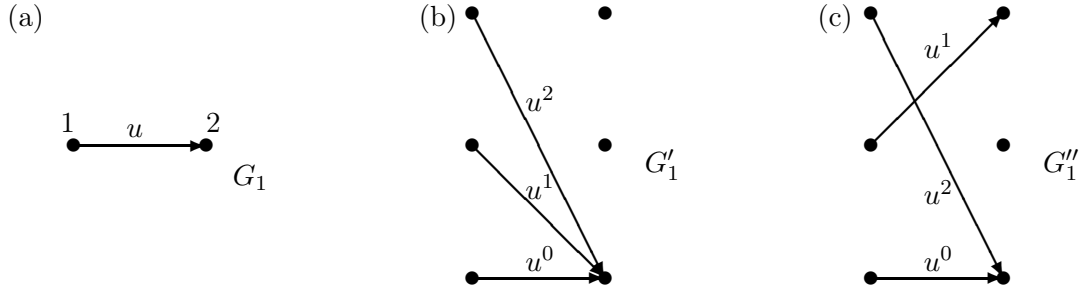
Теорема 2. Кратчайшему пути μ' на вспомогательном графе G' соответствует кратчайший путь μ на исходном графе G , причем время начала движения по пути μ равно номеру уровня, которому принадлежит начальная вершина пути μ' .

Таким образом, задача о кратчайшем пути на исходном графе G_T с меняющейся длительностью прохождения сводится к задаче нахождения кратчайшего пути на вспомогательном графе G' .

Рассмотрим теперь задачу нахождения максимального потока в сети G с меняющимися длительностями прохождения по дугам. Данная задача в сети такого вида имеет существенные сложности для решения. Поскольку для рассматриваемой сети есть возможность осуществлять прохождение потока по дугам в разные моменты времени за разное количество тактов, то в определённые моменты времени в конечную вершину некоторой дуги может приходить суммарный поток, состоящий из потоков, отправленных по ней в различные начальные моменты времени. Покажем такую возможность на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим граф G_1 , изображённый на рис. 1(а); он содержит только одну дугу u ($f(u) = (1, 2)$) пропускной способности $c(u) = 1$. Пусть $D = 3$, а длительности прохождения по дуге u на полном периоде заданы следующим образом: $d(u) = \{3, 2, 1\}$. Вспомогательный граф G'_1 для заданного распределения длительностей прохождения по дуге показан на рис. 1(б).

Отметим, что если в каждый момент времени $t \in [0; 2]_{\mathbb{Z}}$ по дуге u будет начинать переход единичный поток, то в момент времени $t = 3$ конечная вершина 2 получит по дуге u суммарный поток величины 3, состоящий из всех отправленных потоков, что превышает пропускную способность дуги u . Следовательно, величина суммарного потока за полный период не может превышать единицу; при этом распределение такого потока может быть различным. Например, весь единичный поток можно отправить в момент времени t_0 ; на вспомогательном графе такая ситуация соответствует отправке единичного потока по дуге u^0 . Поскольку сеть G'_1 является сетью со связанными дугами (дуги u^0 , u^1 и u^2 связаны общей пропускной способностью; см. [9]), то

Рис. 1. Эффект «переполнения» дуги u сети G_1 .

такая отправка блокирует дуги u^1 и u^2 . Другой вариант распределения — отправка единичного потока по всем дугам в равных долях.

Рассмотрим другой вариант распределения длительностей прохождения по дуге u : $d(u) = \{3, 1, 1\}$. Вспомогательный граф G_1'' для такого распределения длительностей прохождения по дуге показан на рис. 1(с). Для графа G_1'' видно, что дуга u^0 связана с дугами u^1 и u^2 , но u^1 и u^2 не являются связанными между собой дугами. Следовательно, отправка единичного потока по дуге u^1 заблокирует только дугу u^0 и оставит возможность отправки потока по дуге u^2 . Это означает, что при таком распределении длительностей прохождения по дуге u величина максимального суммарного потока в сети G за полный период равна двум. При этом отправка единичного потока по дуге u^0 блокирует все остальные дуги. В последнем случае за полный период можно пропустить только единичный поток.

Таким образом, пример 1 показывает, что в сети с меняющейся длительностью прохождения по дугам прохождение насыщающего потока по некоторой дуге в один из моментов времени может заблокировать эту дугу на некоторое время, что существенно влияет на величину максимального суммарного потока за полный период.

4. Ресурсный поток в сети с зависимостью длительностей прохождения по дугам.

Рассмотрим вопрос распределения ресурса в ресурсных сетях с меняющимися длительностями прохождения. Согласно правилам функционирования ресурсной сети (1)–(2) ресурсный поток в сети G проходит между каждой парой смежных вершин ровно за один такт. Однако для рассматриваемых сетей длительность прохождения по дуге может быть больше единицы. Кроме того, прохождение потока по некоторым дугам в определённые моменты может менять пропускные способности этих дуг в последующие моменты времени до полной блокировки. Таким образом, естественным образом получается зависимость пропускной способности каждой дуги $u \in U$ от времени t и величин потоков, выходящих по этой дуге в предыдущие моменты времени:

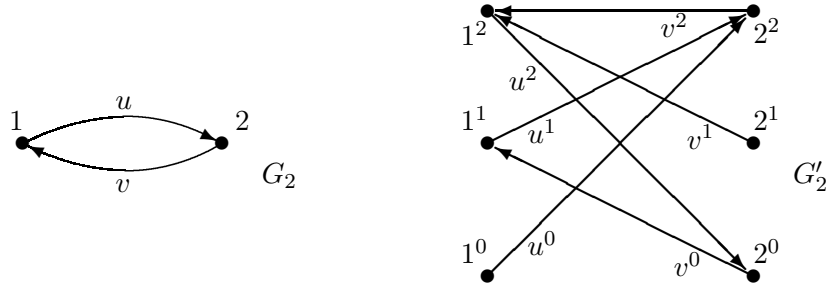
$$r_u(t) = r_u - \sum_{\substack{t_0 \in [0; t-1]_Z \\ t_0 + d(u, t_0) \geq t}} F(u, t_0), \quad (4)$$

где r_u — заданная номинальная пропускная способность дуги u .

Замечание. Поскольку зависимость длительностей прохождения по дугам в сети не превосходит периода D , то при рассмотрении суммы в выражении (4) можно рассматривать только $t_0 \in [t'; t-1]_Z$, где $t' = \max\{0, t-D\}$.

Вместе с переопределением пропускных способностей дуг ресурсной сети появляется необходимость в переопределении правил функционирования сети с учётом меняющихся пропускных способностей:

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{u \in [x]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x]^-} \sum_{\substack{t_0 \in [0; t-1]_Z \\ t_0 + d(u, t_0) = t}} F(u, t_0), \quad (5)$$

Рис. 2. Ресурсная сеть G_2 и вспомогательная сеть G'_2 .

а величины $F(u, t)$ определяются следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u(t), & q_x(t) > \sum_{v \in [x]^+} r_v(t); \\ r_u(t) / \sum_{v \in [x]^+} r_v(t) \cdot q_x(t), & q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+}^n r_v. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим аналогичный процесс перераспределения ресурса между вершинами вспомогательной сети. Состоянием вспомогательной сети будем считать следующий набор (см. [12]):

$$Q'(t') = (q_{x_1^0}(t'), \dots, q_{x_n^0}(t'), \dots, q_{x_{D-1}^0}(t'), \dots, q_{x_{D-1}^{D-1}}(t')).$$

Начальное состояние задаётся следующим образом: $Q'(0) = (Q(0), Q(1), \dots, Q(D-1))$.

Таким образом, при переносе процесса перераспределения ресурса с исходной ресурсной сети G на вспомогательную сеть G' правила функционирования последней описываются соотношениями (1) и (6) при учёте меняющихся пропускных способностей в соотношении (4). Другими словами, в последнем слагаемом соотношения (1) для вспомогательной сети G' учитывается двойная сумма из соотношения (5). Далее будем рассматривать процесс перераспределения ресурса между вершинами вспомогательной сети, поскольку он в точности соответствует аналогичному процессу в исходной сети с меняющимися длительностями прохождения по дугам: для каждого момента времени $t \in Z_+$ имеет место соотношение для состояния сети G с динамическими длительностями прохождения по дугам

$$Q(t) = (q_{x_1^i}(t'), \dots, q_{x_n^i}(t')), \quad (7)$$

где $t' = [t/D]$ и $i = t \pmod{D}$; при этом мы будем говорить, что последнее состояние $Q(t)$ также является и состоянием вспомогательной сети в момент времени t . Таким образом, согласно (7) можно считать, что для состояний сетей G и G' рассматриваются одинаковые моменты времени $t \in Z_+$.

Отметим, что правила (1)–(2) классической ресурсной сети удовлетворяют соотношению

$$\sum_{x \in X} q_x(t) = W \quad \forall t \in Z_+,$$

тогда как для правил (5)–(6) функционирования ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам такое соотношение не всегда выполняется. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим граф G_2 на рис. 2, для дуг u ($f(u) = (1, 2)$) и v ($f(v) = (2, 1)$) которого заданы пропускные способности $c(u) = c(v) = 1$. Положим $D = 3$ и будем считать, что длительности прохождения по дугам графа G_2 на полном периоде заданы следующим образом: $d(u) = \{2, 1, 1\}$ и $d(v) = \{1, 1, 3\}$.

Отметим, что во вспомогательной сети G'_2 связаны следующие пары дуг: u^0 и u^1 , v^0 и v^2 , v^1 и v^2 . Суммарные потоки, проходящие по связанным дугам, не могут превышать номинальной пропускной способности соответствующей им дуги.

Рассмотрим начальное распределение ресурса $Q(0) = \{1, 1\}$. В сети G_2 с длительностями прохождения по дугам, равными единице, это состояние является устойчивым. Найдём следующие состояния $Q(1), \dots, Q(5)$ в сети G_2 с указанными длительностями. Для его нахождения будем использовать вспомогательную сеть G'_2 .

Так как $d(u, 0) = 2$ и $d(v, 0) = 1$, получаем $Q(1) = \{1, 0\}$. Для найденного состояния имеет место «недостаток» ресурса, поскольку единичный ресурс в момент времени $t = 1$ всё ещё совершает переход по дуге u (по дуге u^0 в сети G'_2). Состояние $Q(2) = \{1, 1\}$, поскольку насыщенная дуга u^0 блокирует прохождение ресурса по дуге u^1 , следовательно, весь ресурс в вершине 1 сохраняется (переносится из вершины 1_1 в вершину 1_2 на вспомогательном графе), а в вершину 2 приходит единичный ресурс, отправленный в момент времени $t = 0$ по дуге u .

Следующие состояния $Q(3) = Q(4) = \{0, 1\}$, поскольку насыщенная на три следующих такта дуга v^2 блокирует отправку ресурса по дугам v^0 и v^1 . Таким образом, $Q(5) = \{1, 1\}$ и можно заметить, что тройка состояний $(Q(3), Q(4), Q(5))$ является устойчивой на вспомогательном графе G'_2 .

Для дуг вспомогательного графа введём характеристические функции $\chi_u : [0; D - 1]_Z \rightarrow \{0, 1\}$ по следующему правилу: пусть u такова, что $f'(u) = (x_j, y_{j+d(u,j) \bmod D})$; тогда

$$\chi_u(t) = \begin{cases} 1, & t \in (j; j + d(u, j) \bmod D)_Z \text{ и } j < j + d(u, j) \bmod D; \\ 1, & t \in [0; D - 1]_Z \setminus [j; j + d(u, j) \bmod D]_Z \text{ и } j > j + d(u, j) \bmod D; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Для каждого момента времени $t \in Z_+$ рассмотрим подмножество дуг вспомогательной сети $E_t = \{u \in U' \mid \chi_u(t) = 1\}$, активных в момент времени t .

Обозначим через $\hat{F}(u, t)$ величину потока, продолжающего проходить по дуге u (положим для определённости $f'(u) = (x_j, y_{j+d(u,j)})$ в момент времени t :

$$\hat{F}(u, t) = \begin{cases} F(u, j + s \cdot D), & \text{если } \exists s : j + s \cdot D < t < j + d(u, j) + s \cdot D; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема о сохранении суммарного ресурса в вершинах и на дугах в каждый момент времени.

Теорема 3 (о сохранении ресурса). Пусть $G'(X', U', f')$ — вспомогательная сеть для эргодической ресурсной сети $G(X, U, f)$ с динамическими длительностями прохождения по дугам. Тогда для каждого момента времени $t \in Z_+$ имеет место равенство

$$\sum_{x \in V_t \pmod{D}} q_x \left(\left\lceil \frac{t}{D} \right\rceil \right) + \sum_{u \in E_t} \hat{F}(u, t) = W. \quad (8)$$

Доказательство вытекает из правил построения вспомогательной сети и правил функционирования (1) и (6).

5. Пороговое значение и предельный поток. Рассмотрим вопрос нахождения порогового значения и предельного состояния в эргодической сети G с меняющимися длительностями прохождения по дугам. Поскольку процессу перераспределения ресурсов в исходной ресурсной сети G соответствует аналогичный процесс на вспомогательной сети G' , следовательно, рассмотрим задачу нахождения порогового значения для вспомогательной сети G' с учётом отношения связности её дуг.

Отметим, что вспомогательная сеть G' может не быть полуэргодической, т.е. связной с единственной невозвратной компонентой сильной связности. Для таких сетей в классическом случае показано (см. [2–4]), что задача нахождения порогового значения не имеет смысла, однако для

периодических динамических сетей в работе [12] показано, что поиск порогового значения может проводиться и в случае, когда вспомогательная не является полуэргодической.

Поскольку в каждый момент времени каждая вершина отдаёт весь находящийся в ней ресурс (работает по правилу, определяемому второй строкой соотношения (6)) и, кроме того, величины ресурсов и потоки по дугам в промежуточной части вспомогательной сети G' через конечное число шагов станут равны нулю (см., например, [11]), заключаем, что для нахождения порогового значения можно рассматривать только невозвратные эргодические компоненты G'_i вспомогательной сети G' . Применим метод нахождения порогового значения эргодической ресурсной сети, предложенный в [10] для каждой компоненты G'_i . Согласно этому методу строится система линейных уравнений следующего вида с неизвестными величинами Q_x и $F(u)$:

$$\begin{cases} F(u) - \frac{r_u}{\sum_{v \in [x]^+} r_v} \cdot Q_x = 0 & \forall x \in X'_i, \forall u \in [x]^+; \\ Q_x - \sum_{v \in [x]^-} F(v) = 0 & \forall x \in X'_i; \\ F(w) = z, \end{cases} \quad (9)$$

где w — произвольная дуга рассматриваемой подсети G'_i . Здесь уравнения, указанные в первой строке (9), описывают правила функционирования ресурсной сети в случае, когда весь ресурс каждой вершины распределяется между выходящими из этой вершины дугам. Уравнения, указанные во второй строке, обеспечивают выполнение условия, что весь ресурс каждой вершины приходит из смежных с ней вершин, другими словами, нет накопления ресурса ни в одной вершине ресурсной сети.

Для эргодической ресурсной сети имеет место следующая теорема.

Теорема 4 (см. [10, теорема 1]). *Решение системы (9) существует и единственно для любого действительного значения z .*

Более того, в [10] показано, что такое решение может быть представлено в виде

$$(F, Q) = z \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_n)^T, \quad (10)$$

где $m = |U|$ и $n = |X|$, причём все величины ξ_i и ζ_j являются положительными и $\xi_i = 1$, если $u_i = w$.

Далее, согласно применяемому подходу необходимо задать величину параметра z таким образом, чтобы все величины потока по дугам не превосходили пропускных способностей этих дуг. Однако сеть G' и рассматриваемые подсети G'_i в общем случае являются сетями со связанными дугами; следовательно, необходимо учитывать суммарные величины потоков по связанным дугам.

Определение 8. Пусть $u \in U$ — дуга исходной сети G . Будем говорить, что дуги $u^i, u^j \in B_u$ вспомогательной сети являются связанными, если $(i; i + d(u, i)) \cap (j; j + d(u, j)) = \emptyset$.

Таким образом, на множестве дуг вспомогательной сети задано отношение связности (см. [9]). Каждой дуге $u \in U'$ поставим в соответствие множество всех связанных с ней дуг C_u .

Поскольку по теореме 3 величина суммарного ресурса вершинах и на дугах для каждого момента времени является постоянной, необходимо рассмотреть задачу максимизации параметра z при учёте всех ограничений следующего вида: для каждой дуги u исходной вспомогательной сети G' должно выполняться двойное неравенство

$$0 \leq F(u) + \sum_{w \in C_u} F(w) \leq r_u. \quad (11)$$

Отметим, что для всех дуг вспомогательной сети, соответствующих одной дуге исходного графа, пропускные способности равны.

Теорема 5. *Величина порогового значения T' в сети G' может быть найдена при помощи следующего алгоритма.*

Шаг 1. Для каждой невозвратной эргодической компоненты $G'_i(X_i, U_i, f_i)$ вспомогательной сети G' решим систему уравнений вида (9), в качестве последнего уравнения рассмотрим уравнение $F(v) = r_v$, где v — произвольная дуга сети G'_i . Обозначим такие решения через $(F, Q)_i$.

Шаг 2. Объединим полученные решения $(F, Q)_i$ на сети G' в общий набор (F, Q) , полагая при этом значения $F(u) = 0$ для каждой дуги $u \in U' \setminus \left(\bigcup_i U'_i\right)$ и $Q_x = 0$ для каждой вершины $x \in X' \setminus \left(\bigcup_i X'_i\right)$.

Шаг 3. Для каждой дуги u сети G' вычислим основную сумму

$$S_u = F(u) + \sum_{w \in C_u} F(w)$$

из ограничений вида (11).

Шаг 4. Найдём величину

$$\beta = \min_{\substack{u \in U' \\ F(u) \neq 0}} \left\{ \frac{r_u}{S_u} \right\}$$

и скорректируем решение (F, Q) системы (9), полученное на шаге 2: $(F, Q) := \beta \cdot (F, Q)$.

Шаг 5. Пороговое значение T' для сети G'_e вычисляем следующим образом:

$$T' = \sum_{x \in V_i} Q_x + \sum_{u \in E_i} \hat{F}(u, i), \quad (12)$$

где $i \in [0; D-1]_Z$ выбирается произвольно.

Доказательство. В результате выполнения первых двух шагов алгоритма на вспомогательной сети для каждой невозвратной эргодической компоненты будет найдено состояние, определяющее пороговое значение этой компоненты в смысле классической ресурсной сети (см. [10]). В таком случае величины потока на дугах определяют максимальный ресурсный поток для функционирования сети таким образом, чтобы все вершины переходили бы в зону Z^- . При этом пока не учитывается отношение связности дуг на вспомогательной сети.

На третьем шаге для каждой дуги u вспомогательной сети G' вычисляется значение S_u , определяющее суммарный поток по дуге u и связанным с ней дугам. Таким образом, для потока на каждой дуге можно определить величину превышения пропускной способности. Следовательно, величина является обратной к доле максимального такого превышения. При этом отметим, что поскольку на шаге одним из уравнений системы вида (9) является уравнение $F(v) = r_v$, значит, $\beta \geq 1$, причём равенство выполняется только в том случае, когда на любом множестве связанных между собой дуг нет нарушения неравенства (11).

Таким образом, на шаге 4 будет получено состояние, элементы которого не превосходят соответствующие элементы состояния, полученного на шаге 2, при этом, для каждой дуги вспомогательной сети удовлетворяется неравенство (11). Следовательно, после выполнения шага 4 на вспомогательной сети будет получено состояние, обеспечивающее максимальный поток с учётом возможности прохождения по связанным дугам, при этом все вершины вспомогательной сети переходят в зону Z^- . Отметим, что данный поток является устойчивым, а значит, предельным. В случае, если суммарный ресурс в сети увеличить, то как минимум на одной из связанных дуг возникнет уменьшение пропускной способности согласно соотношению (4), что приведёт к избытку ресурса в начальной вершине такой дуги, а значит, эта вершина не перейдёт в зону Z^- .

Пороговое значение в такой сети можно искать согласно соотношению (8) о сохранении ресурса в теореме 3, левая часть которого для устойчивого состояния вспомогательной сети совпадает с правой частью равенства (12). $\square$

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть G — ресурсная сеть с динамическими длительностями прохождения по дугам, $\tilde{G}$ — это сеть G , у которой длительности прохождения по всем дугам равны единице, и пусть $\tilde{T}$ — пороговое значение в сети G_0 . Тогда имеет место неравенство $T' \leq \tilde{T}$.

Пример 3. Рассмотрим задачу нахождения порогового значения T' для сети G_2 из примера 2. Вспомогательная сеть G'_2 является полуэргодической с единственной невозвратной компонентой G'_2 , порождённой вершинами $\{1^1, 1^2, 2^0, 2^2\}$. Поскольку пропускные способности всех дуг сети G'_2 равны единице, а невозвратная компонента представляет собой простой цикл из четырёх дуг, значит, решение системы (9) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} F(u^1) = F(u^2) = F(v^0) = F(v^2) = 1, \\ Q_{1^1} = Q_{1^2} = Q_{2^0} = Q_{2^2} = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим основные суммы S_u для дуг вспомогательной сети:

$$\begin{cases} S_{u^0} = S_{u^1} = S_{u^2} = S_{v^1} = 1, \\ S_{v^0} = S_{v^2} = 2. \end{cases}$$

Отсюда находим масштабирующий коэффициент $\beta = 0,5$; следовательно, общее решение (F, Q) для всей вспомогательной сети G' , учитывающее прохождение потока по связанным дугам представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} F(u^0) = F(v^1) = 0, \\ Q_{1^0} = Q_{1^1} = 0, \\ F(u^1) = F(u^2) = F(v^0) = F(v^2) = 0,5, \\ Q_{1^1} = Q_{1^2} = Q_{2^0} = Q_{2^2} = 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, пороговое значение в этой сети равно $T' = 1$. При этом, для сети $\widetilde{G}_2$ пороговое значение равно $\widetilde{T} = 2$.

Рассмотрим вопрос о существовании предельного состояния и предельного потока в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Отметим, что в классической постановке для любого распределения ресурса величины $W > T$ предельный поток существует, единственен и равен потоку, определяемому как решение системы вида (9) при $W = T$. Однако, не всегда существует единственный предельный поток в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам даже в случае, когда $W = T'$. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим вначале сеть G_2 с указанным в примере 2 распределением длительностей прохождения по дугам при $D = 3$. Рассмотрим произвольное начальное распределение ресурса $Q(0) = (a, b)$ суммарной величины $W = T' = 1$, т.е. $a + b = 1$. Вычислим несколько следующих состояний:

$$\begin{aligned} Q(1) &= (b, 0), & Q(2) &= (0, a + b) = (0, 1), & Q(3) &= (0, 0), & Q(4) &= (0, 0), \\ Q(5) &= (1, 0), & Q(6) &= (0, 1), & Q(7) &= (1, 0), & Q(8) &= (0, 1), & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, набор состояний $Q(2), \dots, Q(7)$ повторяется с периодом $D' = 6$ и является единственным для любого набора значений величин a и b . Данный набор состояний определяет единственный предельный поток в сети G'_2 , однако если для сети задать другой вариант распределения длительностей прохождения по дугам, то различные начальные распределения ресурса будут приводить к различным наборам периодически повторяющихся состояний. Рассмотрим следующее распределение длительностей прохождения по дугам u и v сети G_2 :

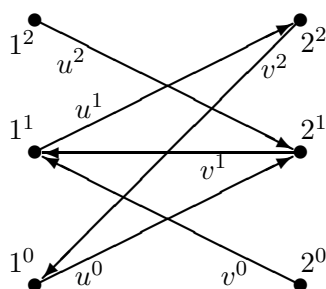
$$d(u) = \{1, 1, 2\}, \quad d(v) = \{1, 3, 1\}.$$

Вспомогательная сеть G''_2 показана на рис. 3. Отметим, что во вспомогательной сети G''_2 связаны следующие пары дуг: u^0 и u^2 , v^0 и v^1 , v^1 и v^2 .

Сеть G''_2 изоморфна сети G'_2 ; следовательно, пороговое значение $T'' = T' = 1$.

Рассмотрим в сети G_2 с новым распределением длительностей прохождения по дугам начальное распределение $Q(0) = (a, b)$, где $a + b = T'' = 1$. Найдём несколько следующих состояний:

$$\begin{aligned} Q(1) &= (b, a), & Q(2) &= (0, b), & Q(3) &= (b, 0), & Q(4) &= (a, b), \\ Q(5) &= (0, a), & Q(6) &= (a, 0), & Q(7) &= (b, a), & \dots \end{aligned}$$

Рис. 3. Вспомогательная сеть G''_2 .

Таким образом, набор состояний $Q(1), \dots, Q(6)$ является устойчивым. При этом, для различных начальных состояний (различных значений величин a и b) получаем различные устойчивые наборы состояний, определяющие различные потоки в сети G''_2 , следовательно, в данном случае не существует единственного предельного потока.

Теорема 7. Пусть G — ресурсная сеть с динамическими длительностями прохода по дугам, $\tilde{G}$ — это сеть G , у которой длительности прохода по всем дугам равны единице. Если $W \geq \tilde{T}$, то в сети G существует единственный предельный поток.

Доказательство. Отметим, что согласно правилам построения развёртки G' для любой вершины $x \in X$ исходной сети каждая невозвратная эргодическая компонента G'_i содержит вершины, соответствующие вершине x . То же самое можно сказать и о дугах. Кроме этого, для каждой компоненты G'_i пороговое значение $T_i \leq \tilde{T}$. Следовательно, вершины такой компоненты будут перераспределять ресурс суммарной величины W_i , не превосходящей значение T_i . Каждая вершина x_i отдаёт смежным вершинам максимум $\sum_{u \in [x]^+} r_u$ ресурса, остальная часть переносится в вершину

$x_{i+1 \bmod D}$ согласно правилам (5). При этом учитывается поток, проходящий по связанным дугам.

Таким образом, в сети стабилизируется процесс, для которого полностью «насыщается» как минимум одна из невозвратных эргодических компонент. Отметим, что в общем случае результирующий ресурсный поток на вспомогательной сети не является единственным, однако, учитывая перенос на сеть G , получаем единственный предельный поток в исходной сети G . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009.
2. Жилиякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
3. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах // Управление большими системами. — 2013. — № 43. — С. 34–54.
4. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы // Управление большими системами. — 2013. — № 45. — С. 6–29.
5. Жилиякова Л. Ю., Чаплинская Н. В. Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Управление большими системами. — 2021. — № 89. — С. 5–44.
6. Кузнецов О. П., Жилиякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель // Докл. РАН. — 2010. — 433, № 5. — С. 609–612.
7. Кузьминова М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.
8. Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохода // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 1. — С. 21–26.
9. Скороходов В. А. Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами // Модел. анал. информ. сист. — 2012. — 19, № 2. — С. 41–52.

10. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети// Управление большими системами. — 2016. — № 63. — С. 6–23.
11. Скороходов В. А., Абдулрахман Х. Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса// Вестн. ВГУ. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 186–194.
12. Скороходов В. А., Свиридкин Д. О. Потоки в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2021. — 31, № 3. — С. 458–470.
13. Чаплинская Н. В. Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами: зона «достаточно большого ресурса»// Управление большими системами. — 2021. — № 90. — С. 49–66.
14. Чаплинская Н. В. Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами// Управление большими системами. — 2021. — № 93. — С. 5–50.
15. Aronson J. E. A survey of dynamic network flows// Ann. Oper. Res. — 1989. — № 20. — P. 1–66.
16. Fonoberova M., Lozovanu D. The maximum flow in dynamic networks// Comp. Sci. J. Moldova. — 2004. — № 3 (36). — P. 387–396.
17. Fonoberova M., Lozovanu D. The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving// Comp. Sci. J. Moldova. — 2005. — № 1 (37). — P. 29–36.
18. Ford L. R., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows// Oper. Res. — 1958. — 6. — P. 419–433.
19. Kuznetsov O. P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states// Manag. Product. Eng. Rev. — 2011. — 2, № 3. — P. 33–39.
20. Skorokhodov V. A. Generalization of the reachability problem on directed graphs// Math. Stat. — 2020. — 8, № 6. — P. 699–704.
21. Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S. The maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution// J. Appl. Industr. Math. — 2015. — 9, № 3. — P. 435–446.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Скороходов Владимир Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Абдулрахман Хайдар
Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону
E-mail: abdulrahm.haidar@gmail.com