ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 50–58
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-50-58

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2024 г. **И. В. ЗАХАРОВА, М. В. ФАЛАЛЕЕВ**

Аннотация. В работе исследуются системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих малый положительный параметр в главной части. Установлена связь между решениями системы с малым параметром и решениями предельной системы, получаемой, если параметр положить равным нулю. Представлены классы систем, при сингулярном возмущении которых сохраняются свойства регулярно возмущенных задач и соответственно для них допускается построение асимптотических решений методами регулярной теории возмущений.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенное уравнение, предельная задача, задача Дирихле, задача Коши.

ON SOME SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

© 2024 **I. V. ZAKHAROVA, M. V. FALALEEV**

Abstract. In this paper, we examine systems of partial differential equations containing a small positive parameter in the principal part. We establish a relationship between solutions of the system with a small parameter and solutions of the limit system obtained if the parameter is equal to zero. We present classes of systems that preserve the properties of regularly perturbed problems under singular perturbations are admit constructing asymptotic solutions by methods of regular perturbation theory.

Keywords and phrases: small parameter, singularly perturbed equation, limit problem, Dirichlet problem, Cauchy problem.

AMS Subject Classification: 35A20

1. Введение. При исследовании дифференциальных уравнений содержащих малый параметр (возмущение) возникает вопрос о соотношении между решениями исходной (возмущенной) задачи и предельной (когда малый параметр обращается в ноль). Иначе говоря, можно ли исходя из решения предельной задачи получить хотя бы приближенно решение возмущенной задачи. Если возмущение носит регулярный характер, то это возможно. В сингулярном случае, например для обыкновенных дифференциальных уравнений предельный переход по параметру в уравнении может привести к изменению порядка возмущенного уравнения и соответственно к существенному различию свойств решений обеих задач, как следствие невозможность предельного перехода между ними. В случае дифференциальных уравнений в частных производных обращение в ноль малого параметра в главной части может и не изменить порядок уравнения, но поменять его тип и соответственно для таких задач можно ожидать весьма разнообразную картину (см. [3,7]). В данной работе выделены два класса сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, для которых возможен предельный переход по параметру. При исследовании таких систем необходимо учитывать эффекты двух типов. Во-первых, жорданову структуру матрицы коэффициентов (т.е. свойства линейных операторов в конечномерных пространствах), а, во-вторых, дифференциальных операторов системы (т.е. свойства линейных операторов в банаховых пространствах). Итоговые теоремы отражают эту двойственную природу исследованных задач.

2. Задача Коши для систем, сводящихся к уравнениям гиперболического типа. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\epsilon\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) = 0, \tag{1}$$

$$u_i(x,0,\epsilon) = f_i(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0,\epsilon) = g_i(x), \quad i = 1,\dots,n, \tag{3}$$

где $u_i(x,t,\epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, $f_i(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $g_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $f_i(x)$ и $g_i(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр.

Относительно матрицы коэффициентов $A = \|a_{ij}\|$ будем предполагать выполненным следующее условие:

(A) $\det A \neq 0$ и все элементарные делители матрицы A имеют степень 1; тогда её жорданова форма имеет диагональный вид (см. [1])

$$A = T^{-1}\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\,T,$$

причем среди чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ могут быть равные, но все $\lambda_i \neq 0$. Дополнительно будем предполагать, что все характеристические числа матрица A положительны: $\lambda_i > 0$.

При выполнении условия **(A)** после невырожденной замены переменных $\bar v = T\bar u$, где $\bar u(x,t,\epsilon)$ — вектор-столбец искомых функций

$$\bar u(x,t,\epsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x,t,\epsilon) \\ u_2(x,t,\epsilon) \\ \vdots \\ u_n(x,t,\epsilon) \end{pmatrix}$$

задача (1)–(3) распадается на n независимых задач для уравнений гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \lambda_j\left(\epsilon\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial v_j}{\partial t}\right) = 0, \tag{4}$$

$$v_j(x,0,\epsilon) = F_j(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t}(x,0,\epsilon) = G_j(x); \tag{6}$$

здесь

$$\bar F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad \bar G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ \vdots \\ G_n(x) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}.$$

Вводя новую переменную τ и новую функцию $V_j(x,\tau,\epsilon)$ по правилам

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}, \quad v_j(x,t,\epsilon) = V_j(x,\tau,\epsilon)\exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right),$$

перепишем задачу (4)–(6) в виде

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_j}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4\epsilon} V_j = 0, \tag{7}$$

$$V_j(x, 0, \epsilon) = F_j(x), \tag{8}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau}(x, 0, \epsilon) = \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(x) + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(x). \tag{9}$$

Стандартная замена переменных

$$\xi = \tau - x, \quad \eta = \tau + x$$

приводит уравнение (7) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha^2 \lambda_j}{16\epsilon} W_j = 0, \tag{10}$$

с условиями (на характеристике)

$$V_j(x, 0, \epsilon) = W_j(\xi, \eta, \epsilon)\Big|_{\eta=-\xi} = F_j\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right)\Big|_{\eta=-\xi} = F_j(-\xi), \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial \tau}(x, 0, \epsilon) = \left(\frac{\partial W_j}{\partial \xi} + \frac{\partial W_j}{\partial \eta}\right)\Big|_{\eta=-\xi} = \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right)\Big|_{\eta=-\xi} =$$
$$= \sqrt{\lambda_j \epsilon} G_j(-\xi) + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}} F_j(-\xi). \tag{12}$$

По формуле Римана (см. [4]) восстанавливается решение уравнения (10)Ж

$$W_j(\xi_0, \eta_0, \epsilon) = \frac{(W_j \mathcal{R})_P + (W_j \mathcal{R})_Q}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{PQ} \left[\left(W_j \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} - \mathcal{R}\frac{\partial W_j}{\partial \xi}\right) d\xi + \left(\mathcal{R}\frac{\partial W_j}{\partial \eta} - W_j \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta}\right) d\eta\right],$$

где интегрирование осуществляется по границе области, представляющей собой прямоугольный треугольник с гипотенузой, лежащей на прямой $\eta = -\xi$, прямым углом в точке (ξ_0, η_0) и катетами, параллельными осям координат, $Q(-\eta_0, \eta_0)$, $P(\xi_0, -\xi_0)$; функция Римана имеет вид

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{\epsilon}}\right);$$

здесь $\mathcal{J}_0$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента, т.е. функция Римана представима рядом

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}\, \lambda_j^k (\xi_0 - \xi)^k (\eta_0 - \eta)^k}{(k!)^2\, 2^{4k}\, \epsilon^k}.$$

Поскольку

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)\Big|_P = \mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)\Big|_Q = 1,$$

то в силу условия (11) решение уравнения (10) можно переписать в виде

$$W_j(\xi_0, \eta_0, \epsilon) = \frac{F_j(-\xi_0) + F_j(\eta_0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0} \left[\mathcal{R}\left(\frac{\partial W_j}{\partial \xi} + \frac{\partial W_j}{\partial \eta}\right) - W_j\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta}\right)\right] d\xi.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \eta}\Big|_{\eta=-\xi} = i\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}{\epsilon}}\right) \cdot \frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}(\eta_0 + \xi_0)}{4\sqrt{\epsilon(\xi_0 - \xi)(\eta_0 + \xi)}},$$

то с учетом условия (12) окончательно получаем для решения уравнения (10) следующее представление:

$$W_j(\xi_0,\eta_0,\epsilon)=\frac{1}{2}\Big(F_j(-\xi_0)+F_j(\eta_0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0}\left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0-\xi)(\eta_0+\xi)}{\epsilon}}\right)\left(\sqrt{\lambda_j\epsilon}G_j(-\xi)+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}F_j(-\xi)\right)-\right.$$
$$\left.-i\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\xi_0-\xi)(\eta_0+\xi)}{\epsilon}}\right)\cdot\frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}(\eta_0+\xi_0)}{4\sqrt{\epsilon(\xi_0-\xi)(\eta_0+\xi)}}F_j(-\xi)\right]d\xi.$$

Обратной заменой переменных $\xi_0=\tau-x$, $\eta_0=\tau+x$ восстанавливаем решение задачи (7)–(9):

$$V_j(x,\tau,\epsilon)=\frac{1}{2}\Big(F_j(x-\tau)+F_j(x+\tau)\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x-\tau}^{-x+\tau}\left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\tau^2-(x+\xi)^2)}{\epsilon}}\right)\left(\sqrt{\lambda_j\epsilon}G_j(-\xi)+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}F_j(-\xi)\right)-\right.$$
$$\left.-i\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j(\tau^2-(x+\xi)^2)}{\epsilon}}\right)\cdot\frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}\tau}{2\sqrt{\epsilon(\tau^2-(x+\xi)^2)}}F_j(-\xi)\right]d\xi.$$

Таким образом, получаем явный вид решения задачи (4)–(6):

$$v_j(x,t,\epsilon)=\exp\left(-\frac{\alpha\tau}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right)V_j(x,\tau,\epsilon)\Bigg|_{\tau=t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}},$$

который после выполнения тождественных преобразований переписывается так

$$v_j(x,t,\epsilon)=\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\left\{\frac{1}{2}\left[F_j\left(x-\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)+F_j\left(x+\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\left(\sqrt{\lambda_j\epsilon}G_j(x-\xi)+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}F_j(x-\xi)\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\cdot\frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}t}{2\sqrt{\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}F_j(x-\xi)\right]d\xi\right\}.$$

Справедливо предельное равенство

$$\lim_{\epsilon\to0+}v_j(x,t,\epsilon)=\frac{\sqrt{\lambda_j\alpha}}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_j\alpha(x-\xi)^2}{4t}\right)F_j(\xi)d\xi=v_j^0(x,t).$$

Действительно, представление для функции $v_j(x,t,\epsilon)$ можно переписать в виде

$$v_j(x,t,\epsilon) = \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\frac{1}{2}\left[F_j\left(x-\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)+F_j\left(x+\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}{2}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)G_j(x-\xi)d\xi+$$
$$+\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\right]F_j(x-\xi)d\xi.$$

Но функции $G_j(x)\in C(\mathbb{R})$ и $F_j(x)\in C^1(\mathbb{R})$ будучи абсолютно интегрируемыми на $\mathbb{R}$ ограничены, т.е. существуют такие положительные константы $K>0$ и $L>0$, что $|G_j(x)|\leqslant K$ и $|F_j(x)|\leqslant L$ для всех $x\in\mathbb{R}$; поэтому

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\left|F_j\left(x-\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)+F_j\left(x+\frac{t}{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\right)\right|\leqslant L\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\to 0\quad\text{при } \epsilon\to 0+.$$

В силу асимптотических равенств для функций Бесселя (см., например, [2])при $\epsilon\to 0+$ имеем:

$$\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi\alpha}}\cdot\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{2\epsilon}\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}-t\right)\right)}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\left[1+\frac{\epsilon}{4\alpha\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}+\frac{9\,(2\epsilon)^2}{2\left(8\alpha\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)^2}+\ldots\right]=$$
$$=\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{2\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}+t\right)}\right)\cdot\Big[1+O(\epsilon)\Big],$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi\alpha}}\cdot\frac{\exp\left(\frac{\alpha}{2\epsilon}\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}-t\right)\right)}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot$$
$$\cdot\left[1-\frac{3\epsilon}{4\alpha\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}-\frac{15\,(2\epsilon)^2}{2\left(8\alpha\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)^2}+\ldots\right]=$$
$$=\sqrt{\frac{\epsilon}{\pi\alpha}}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{2\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}+t\right)}\right)}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot\Big[1-O(\epsilon)\Big].$$

Отсюда получаем

$$\frac{\sqrt{\lambda_j\epsilon}}{2}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)G_j(x-\xi)d\xi+$$

$$+\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\Big[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\Big]F_j(x-\xi)d\xi\approx$$

$$\approx\sqrt{\frac{\lambda_j}{4\pi\alpha}}\cdot\epsilon\cdot\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\frac{\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{2\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}+t\right)}\right)}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot\Big[1+O(\epsilon)\Big]G_j(x-\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha\lambda_j}{\pi}}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_j\epsilon}}\frac{\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{2\left(\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}+t\right)}\right)}{\sqrt[4]{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\Big[1+O(\epsilon)\Big]+\frac{t}{\sqrt{t^2-\lambda_j\epsilon\xi^2}}\Big[1-O(\epsilon)\Big]\right\}F_j(x-\xi)d\xi\xrightarrow[\epsilon\to0+]{}$$

$$\xrightarrow[\epsilon\to0+]{}0+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha\lambda_j}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{4t}\right)\cdot2\cdot F_j(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha\lambda_j}}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\xi^2}{4t}\right)\cdot F_j(x-\xi)d\xi=v_j^0(x,t).$$

Полученная в пределе функция $v_j^0(x,t)$ является решением предельной задачи (т.е. $\epsilon=0$) для (4)–(6), но для его существования условие (6) является излишним, т.е. в окрестности $t=0$ возникает область пограничного слоя. Иными словами, область определения предельной задачи шире области определения допредельной задачи, что является характерной особенностью сингулярно возмущенной задачи. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если для матрицы $A=\|a_{ij}\|$ задачи* (1)–(3) *выполнено условие* **(A)**, *то для решения этой задачи справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon\to0+}\bar{u}(x,t,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to0+}T^{-1}\bar{v}(x,t,\epsilon)=T^{-1}\bar{v}^0(x,t)=\bar{u}^0(x,t),$$

где $\bar{u}^0(x,t)$ — решение предельной системы для (1)–(3).

Замечание 1. Теорема остается справедливой и в более общих предположениях относительно матрицы $A=\|a_{ij}\|$. Именно, известно (см. [1]), что для любой квадратной матрицы A размерности

n существует такая невырожденная матрица T, что

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu} \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{diag}\left\{\lambda_1 E_{q_1} + N_{q_1},\ \lambda_2 E_{q_2} + N_{q_2},\ \dots,\ \lambda_\mu E_{q_\mu} + N_{q_\mu}\right\}; \quad (13)$$

здесь $q_1 + q_2 + \cdot + q_\mu = n$; индекс q_i при квадратных матрицах E_{q_i}(единичной) или N_{q_i} (жорданов нильпотентный блок) означает их размерность q_i,

$$N_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots \mu, \quad N_{q_i}^{q_i} = O_{q_i}.$$

Правую часть равенства (13) называют канонической жордановой формой матрицы A, блоки $(\lambda_i E_{q_i} + N_{q_i})$ называют жордановыми ящиками, числа λ_i называют собственными числами матрицы A кратности q_i, причем все $\lambda_i \neq 0$, если $\det A \neq 0$.

3. Задача Дирихле для систем, сводящихся к уравнениям эллиптического типа. Рассмотрим задачу Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\epsilon\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial u_j}{\partial t}\right) = 0, \quad (14)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0, \epsilon) = f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

где $u_i(x_1, x_2, t, \epsilon) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geqslant 0)$, функции $f_i(x_1, x_2) \in C(\mathbb{R}^2)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\lim\limits_{(x_1,x_2,t)\to\infty} |u_i(x_1, x_2, t| < +\infty$.

Относительно матрицы коэффициентов $A = \|a_{ij}\|$ будем предполагать (как выше) выполненным условие **(A)**. В этом случае той же заменой переменных $\bar{v} = T\bar{u}$ задача (14)–(15) распадается на n независимых задач для уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2^2} + \lambda_j\left(\epsilon\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial v_j}{\partial t}\right) = 0, \quad (16)$$

$$v_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2). \quad (17)$$

Введя новые переменные по формулам

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\lambda_j \epsilon}}, \quad v_j(x_1, x_2, t, \epsilon) = V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon)\exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right),$$

перепишем задачу (16)–(17) в виде

$$\frac{\partial^2 V_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial t^2} - \frac{\alpha^2\lambda_j}{4\epsilon}V_j = 0, \quad (18)$$

$$V_j(x_1, x_2, 0, \epsilon) = F_j(x_1, x_2). \quad (19)$$

Решение задачи (18)–(19) имеет следующий вид (см. [6])):

$$V_j(x_1, x_2, \tau, \epsilon) = \frac{\tau}{4\pi\sqrt{\epsilon}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_j(y_1, y_2)\left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda_j}}{R^2} + \frac{2\sqrt{\epsilon}}{R^3}\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}R\right)dy_1\,dy_2,$$

$$R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \tau^2}.$$

При помощи обратной замены переменных находим решение задачи (16)–(17):

$$v_j(x_1,x_2,t,\epsilon)=\exp\left(\frac{\alpha\tau}{2}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\epsilon}}\right)V_j(x_1,x_2,\tau,\epsilon)\Big|_{\tau=t.\sqrt{\lambda_j\epsilon}}=$$

$$=\frac{\lambda_j t}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_j(y_1,y_2)\frac{2\epsilon+\alpha\sqrt{\lambda_j\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}}{\left(\sqrt{\lambda_j\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}\right)^3}\cdot$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)}{2\left(t+\sqrt{\lambda_j\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}\right)}\right)dy_1dy_2.$$

Отсюда следует

$$\lim_{\epsilon\to 0+}v_j(x_1,x_2,t,\epsilon)=$$

$$=\frac{\alpha\lambda_j}{4\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_j(y_1,y_2)\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_j}{4t}\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)\right)dy_1dy_2=v_j^0(x_1,x_2,t).$$

Полученная таким образом функция $v_j^0(x_1,x_2,t)$ является решением предельной задачи для (16)–(17). Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если для матрицы $A=\|a_{ij}\|$ задачи* (14)–(15) *выполнено условие* **(A)**, *то для решения этой задачи справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\bar u(x_1,x_2,t,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0+}T^{-1}\bar v(x_1,x_2,t,\epsilon)=T^{-1}\bar v^0(x_1,x_2,t)=\bar u^0(x_1,x_2,t),$$

где $\bar u^0(x_1,x_2,t)$ — решение предельной системы для (14)–(15).

Замечание 2. При $\epsilon=0$ изменился тип уравнения (16), но не поменялся его порядок. При этом решение соответствующей предельной задачи удовлетворяет условиям исходной задачи (16)–(17). Такое поведение решения предельной задачи, отсутствие «невязки» в граничных условиях, является нетипичным для сингулярно возмущенных задач. В данном случае решение задачи Дирихле при $\epsilon\to 0+$ регулярным образом стремится к решению задачи Коши.

Замечание 3. Задача (14)–(15) допускает обобщение на случай уравнения с переменными коэффициентами. В [3] рассмотрен пример задачи Дирихле в полупространстве для одного сингулярно возмущенного уравнения в частных производных с переменными коэффициентами. Методом параметрикса (см. [5]) построено фундаментальное решение предельной задачи. Показано, что фундаментальное решение уравнения эллиптического типа, содержащего малый параметр в главной части, переходит в фундаментальное решение предельного уравнения параболического типа, а решение задачи Дирихле при $\epsilon\to 0+$ стремится регулярным образом к решению предельной задачи Коши для уравнения параболического типа.

Замечание 4. Задача (14)–(15) допускает более общую постановку для системы уравнений вида

$$\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\epsilon\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)=0,\quad i=1,\ldots,n,$$

где Δ — оператор Лапласа.

4. Заключение. Проведенные исследования дают основание утверждать, что среди задач для систем уравнений с частными производными, которые содержат малый параметр в главной части, существует класс систем, имеющих регулярную асимптотику, и, как следствие, допускающие применение методов регулярной теории возмущений для построения их асимптотического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
2. *Двайт Г. Б.* Таблица интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
3. *Захарова И. В.* О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *183*. — С. 61–72.
4. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
5. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: МГУ, 2004.
7. *Янушаускас А. И.* О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными// в кн.: Сб. науч. тр. Иркут. ун-та, 1990. — С. 94–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Захарова Ирина Валентиновна (Zakharova Irina Valentinovna)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: zair@math.isu.ru

Фалалеев Михаил Валентинович (Falaleev Mikhail Valentinovich)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: mvfalaleev@gmail.com