ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 27–34
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-27-34

УДК 517.956.2

ВЛИЯНИЕ МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ НА РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2024 г. Е. А. ГОЛОВКО, Н. С. КАЦАПОВА

Аннотация. При помощи преобразования Фурье изучается задача Дирихле для многомерной эллиптической системы, содержащей младшие производные. Показано, что младшие члены существенно влияют на разрешимость первой краевой задачи для эллиптических систем уравнений, в отличие от одного эллиптического уравнения. Задача сведена к исследованию одного уравнения второго порядка; в зависимости от того, к какому типу это уравнение относится, меняется характер разрешимости исходной задачи.

Ключевые слова: эллиптические системы, первая краевая задача, задача Дирихле, младшие производные, преобразование Фурье.

THE INFLUENCE OF LOWER DERIVATIVES ON THE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC SYSTEMS

© 2024 E. A. GOLOVKO, N. S. KATSAPOVA

Abstract. By means of the Fourier transform, we examine the Dirichlet problem for a multidimensional elliptic system containing lower derivatives. We prove that the lower terms significantly influence the solvability of the first boundary value problem for elliptic systems of equations in contrast to the case of a single elliptic equation. The problem is reduced to a single second-order equation; the nature of the solvability of the original problem depends on the type of this equation.

***Keywords and phrases*:** elliptic systems, first boundary value problem, Dirichlet problem, lower derivatives, Fourier transform.

***AMS Subject Classification*:** 35J57

Одной из основных граничных задач для уравнения Лапласа является задача Дирихле. Например, к ней приводится задача о поле зарядов, распределенных на поверхности проводника. Для одного эллиптического уравнения с частными производными второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами эта задача всегда фредгольмова (см. [1]). Характер же разрешимости классических граничных задач для эллиптических по Петровскому систем уравнений с частными производными второго порядка существенно отличается от случая одного уравнения. Примером эллиптической по Петровскому системы уравнений, для которой нарушается фредгольмовость задачи Дирихле, является система Бицадзе

$$-\Delta u + 2\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0, \quad -\Delta v + 2\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = 0.$$

Этот пример сильно стимулировал исследования по теории граничных задач для эллиптических по Петровскому систем. Поскольку не для всякой эллиптической по Петровскому системы уравнений с частными производными второго порядка задача Дирихле фредгольмова, то класс систем, для которых классические граничные задачи корректны, должен характеризоваться дополнительными ограничениями. Такие ограничения нашел М. И. Вишик. Он ввел понятие сильной эллиптичности. В смысле разрешимости классических граничных задач сильно эллиптические системы ведут себя так же, как и одно эллиптическое уравнение. Однако среди систем, не удовлетворяющих условию сильной эллиптичности, встречаются системы, для которых задача Дирихле и другие классические граничные задачи корректны. Поэтому встал вопрос об изучении не сильно эллиптических систем и о гомотопической классификации. В настоящее время достаточно полно исследованы эллиптические системы с двумя независимыми переменными. Для них также решена задача гомотопической классификации. Чего нельзя сказать о многомерных эллиптических системах. В случае одного эллиптического уравнения второго порядка только от главных частей зависит фредгольмовость задачи Дирихле (см. [1]). Для систем все гораздо сложнее. В общем случае для эллиптических систем встречаются новые явления в характере разрешимости первой краевой задачи, не имеющие аналогов в случае одного уравнения второго порядка. Среди таких явлений следует отметить эффект влияния младших производных на разрешимость граничных задач. Эти вопросы рассматривались в работах А. И. Янушаускаса и его учеников (см. [2–4]).

В настоящей работе изучается эффект влияния младших производных для одного класса эллиптических систем. В трехмерном пространстве рассмотрим систему

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) + k u_x + n u_y = 0,\\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) + k v_x + n v_y = 0,\\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) + k w_x + n w_y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ — неизвестные функции, λ_1, λ_2, λ_3, k и n — некоторые параметры. Введем обозначение $u_x + v_y + w_z = H$. Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x} + k u_x + n u_y = 0,\\ -\Delta v + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial y} + k v_x + n v_y = 0,\\ -\Delta w + \lambda_3 \frac{\partial H}{\partial z} + k w_x + n w_y = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Дифференцируя уравнения системы (2) по x, y и z, соответственно, и складывая результаты, с учетом введенного обозначения получим

$$(\lambda_1 - 1)H_{xx} + (\lambda_2 - 1)H_{yy} + (\lambda_3 - 1)H_{zz} + kH_x + nH_y = 0. \tag{3}$$

Далее будем использовать преобразование Фурье по переменным x и y. Пусть $\widetilde{u}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{v}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{w}(\xi,\eta,z)$, $\widetilde{H}(\xi,\eta,z)$ — преобразования Фурье функций $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$, $H(x,y,z)$ соответственно. В терминах преобразования Фурье уравнение (3) примет вид

$$\widetilde{H}_{zz} - \mu^2 \widetilde{H} = 0, \tag{4}$$

где

$$\mu^2 = \frac{\xi^2(\lambda_1 - 1) + \eta^2(\lambda_2 - 1) - i\xi k - i\eta n}{\lambda_3 - 1}. \tag{5}$$

Все ограниченные на бесконечности решения уравнения (4) даются формулой

$$\widetilde{H}(\xi,\eta,z) = C(\xi,\eta)e^{-\mu z}, \tag{6}$$

где $C(\xi,\eta)$ — произвольная функция.

Применим преобразование Фурье по переменным x и y к системе (2):

$$(\xi^2+\eta^2)\widetilde{u}-\widetilde{u}_{zz}+i\xi k\widetilde{u}+i\eta n\widetilde{u}=-i\xi\lambda_1\widetilde{H},$$
$$(\xi^2+\eta^2)\widetilde{v}-\widetilde{v}_{zz}+i\xi k\widetilde{v}+i\eta n\widetilde{v}=-i\eta\lambda_2\widetilde{H},$$
$$(\xi^2+\eta^2)\widetilde{w}-\widetilde{w}_{zz}+i\xi k\widetilde{w}+i\eta n\widetilde{w}=-\lambda_3\widetilde{H}_z.$$

Вводя обозначение

$$\xi^2+\eta^2+i\xi k+i\eta n=\rho^2 \tag{7}$$

и учитывая (6), получим

$$\begin{aligned}-\widetilde{u}_{zz}+\rho^2\widetilde{u}&=-i\xi\lambda_1e^{-\mu z}C(\xi,\eta),\\ -\widetilde{v}_{zz}+\rho^2\widetilde{v}&=-i\eta\lambda_2e^{-\mu z}C(\xi,\eta),\\ -\widetilde{w}_{zz}+\rho^2\widetilde{w}&=\lambda_3\mu e^{-\mu z}C(\xi,\eta).\end{aligned} \tag{8}$$

Каждое уравнение системы этой содержит только одну неизвестную функцию. Рассмотрим первое уравнение системы; оно является уравнением с частными производными второго порядка. Но поскольку оно содержит производные только по переменной z, его можно решить, применяя теорию интегрирования линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Следуя этой теории, будем искать решение в виде

$$\widetilde{u}=\widetilde{u}_{oo}+\widetilde{u}^*,$$

где $\widetilde{u}_{oo}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\widetilde{u}^*$ — частное решение неоднородного уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\widetilde{u}_{oo}=A_1(\xi,\eta)e^{-\rho z}+B_1(\xi,\eta)e^{\rho z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов:

$$\widetilde{u}^*=D(\xi,\eta)\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right), \tag{9}$$

где $D(\xi,\eta)$ — неопределенная функция, которую определим так, чтобы формула (9) давала решение неоднородного уравнения. Подставляя функцию (9) в первое уравнение системы (8), получим

$$D(\xi,\eta)\left(\mu^2e^{-\mu z}-\rho^2e^{-\rho z}\right)-\rho^2D(\xi,\eta)\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right)=i\xi e^{-\mu z}\cdot C(\xi,\eta),$$

откуда

$$D(\xi,\eta)=\frac{i\lambda\xi\cdot C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид

$$\widetilde{u}^*=\frac{i\lambda\xi\cdot C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right),$$

а общее решение первого уравнения системы (8) —

$$\widetilde{u}=A_1(\xi,\eta)e^{-\rho z}+B_1(\xi,\eta)e^{\rho z}+\frac{i\lambda\xi\cdot C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right).$$

Поскольку мы интересуемся только ограниченными на бесконечности решениями, то положим $B_1(\xi,\eta)=0$. Окончательно получим

$$\widetilde{u}=A_1(\xi,\eta)e^{-\rho z}+\frac{i\lambda\xi\cdot C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right).$$

Аналогично найдем ограниченные на бесконечности решения второго уравнения системы (8):

$$\widetilde{v}=A_2(\xi,\eta)e^{-\rho z}+\frac{i\eta\lambda_2C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z}-e^{-\rho z}\right).$$

Рассмотрим третье уравнение системы (8). Оно имеет иную правую часть, нежели первые два уравнения. Приведем решение подробно. Общее решение этого уравнения также состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $\widetilde{w} = \widetilde{w}_{oo} + \widetilde{w}^*$. Все ограниченные на бесконечности решения соответствующего однородного уравнения имеют вид

$$\widetilde{w} = A_3(\xi,\eta)e^{-\rho z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\widetilde{w}^* = D(\xi,\eta)\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right).$$

Подставляя этот вид решения в третье уравнение системы (8), получим

$$D(\xi,\eta)\left(\mu^2 e^{-\mu z} - \rho^2 e^{-\rho z}\right) - \rho^2 D(\xi,\eta)\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right) = -\lambda_3\mu e^{-\mu z}\cdot C(\xi,\eta),$$

$$D(\xi,\eta)\left(\mu^2 - \rho^2\right)e^{-\mu z} = -\lambda_3\mu e^{-\mu z}\cdot C(\xi,\eta), \quad D(\xi,\eta) = \frac{-\lambda_3\mu C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{w} = A_3(\xi,\eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3\mu C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}.$$

Итак, общее решение системы (8) дается формулами

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} &= A_1(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \frac{i\xi\lambda_1 C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right),\\
\widetilde{v} &= A_2(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2 C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right),\\
\widetilde{w} &= A_3(\xi,\eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3\mu C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $A_1(\xi,\eta)$, $A_2(\xi,\eta)$, $A_3(\xi,\eta)$, $C(\xi,\eta)$ — произвольные функции. Как видим, оно содержит четыре произвольных функции.

Для системы (1) рассмотрим задачу Дирихле: в полупространстве $\{z > 0\}$ найти решение системы (1), удовлетворяющее на границе этого полупространства условиям

$$u\big|_{z=0} = f_1(x,y), \quad v\big|_{z=0} = f_2(x,y), \quad w\big|_{z=0} = f_3(x,y), \tag{11}$$

где f_1, f_2, f_3 — заданные, достаточно гладкие функции.

Поскольку решение системы мы получили в терминах преобразования Фурье, применим к граничным условиям (11) преобразование Фурье по переменным x и y:

$$\widetilde{u}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_1(\xi,\eta), \quad \widetilde{v}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_2(\xi,\eta), \quad \widetilde{w}\big|_{z=0} = \widetilde{f}_3(\xi,\eta). \tag{12}$$

Подставим решение (10) в условия (12):

$$\widetilde{u}\big|_{z=0} = A_1(\xi,\eta) = \widetilde{f}_1(\xi,\eta), \quad \widetilde{v}\big|_{z=0} = A_2(\xi,\eta) = \widetilde{f}_2(\xi,\eta), \quad \widetilde{w}\big|_{z=0} = A_3(\xi,\eta) = \widetilde{f}_3(\xi,\eta).$$

Таким образом, функции $A_1(\xi,\eta)$, $A_2(\xi,\eta)$, $A_3(\xi,\eta)$ определились из граничных условий задачи. Определим $C(\xi,\eta)$ используя условие связи $u_x + v_y + w_z = H$, предварительно применив к нему преобразование Фурье:

$$i\xi\widetilde{u} + i\eta\widetilde{v} + \widetilde{w}_z = \widetilde{H}. \tag{13}$$

Подставим решения (6) и (10) в условие (13):

$$\begin{aligned}
i\xi&\left(f_1(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \frac{i\xi\lambda_1 C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right)\right) + i\eta\left(f_2(\xi,\eta)e^{-\rho z} + \frac{i\eta\lambda_2 C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(e^{-\mu z} - e^{-\rho z}\right)\right) -\\
&- \rho f_3(\xi,\eta)e^{-\rho z} - \frac{\lambda_3\mu C(\xi,\eta)}{\mu^2-\rho^2}\left(-\mu e^{-\mu z} + \rho e^{-\rho z}\right) = C(\xi,\eta)e^{-\mu z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-\mu z}&\cdot C(\xi,\eta)\left(\frac{i^2\xi^2\lambda_1}{\mu^2-\rho^2} + \frac{i^2\eta^2\lambda_2}{\mu^2-\rho^2} + \frac{\lambda_3\mu^2}{\mu^2-\rho^2} - 1\right) +\\
&+ e^{-\rho z}\cdot C(\xi,\eta)\left(-\frac{i^2\xi^2\lambda_1}{\mu^2-\rho^2} - \frac{i^2\eta^2\lambda_2}{\mu^2-\rho^2} - \frac{\rho\lambda_3\mu}{\mu^2-\rho^2}\right) = (\rho f_3 - i\eta f_2 - i\xi f_1)e^{-\rho z}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя обозначения (5) и (7) покажем, что в уравнении (14) коэффициент при $e^{-\mu z}$ равен нулю.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\xi^2\lambda_1}{\mu^2-\rho^2}-\frac{\eta^2\lambda_2}{\mu^2-\rho^2}+\frac{\lambda_3\mu^2}{\mu^2-\rho^2}-1=\\
&=\frac{1}{\mu^2-\rho^2}\Big(-\lambda_1\xi^2-\lambda_2\eta^2+\lambda_3\frac{\xi^2(\lambda_1-1)+\eta^2(\lambda_2-1)-i\xi k-i\eta n}{\lambda_3-1}-\\
&\qquad-\frac{\xi^2(\lambda_1-1)+\eta^2(\lambda_2-1)-i\xi k-i\eta n}{\lambda_3-1}+\xi^2+\eta^2+i\xi k+i\eta n\Big)=\\
&=\frac{1}{\mu^2-\rho^2}\Big(-\lambda_1\xi^2-\lambda_2\eta^2+\frac{(\xi^2(\lambda_1-1)+\eta^2(\lambda_2-1)-i\xi k-i\eta n)(\lambda_3-1)}{\lambda_3-1}+\\
&\qquad+\xi^2+\eta^2+i\xi k+i\eta n\Big)=\\
&=\frac{1}{\mu^2-\rho^2}\Big(-\lambda_1\xi^2-\lambda_2\eta^2+\lambda_1\xi^2-\xi^2+\lambda_2\eta^2-\eta^2-i\xi k-i\eta n+\xi^2+\eta^2+i\xi k+i\eta n\Big)=0.
\end{aligned}
$$

Из доказанного следует

$$\frac{\xi^2\lambda_1}{\mu^2-\rho^2}+\frac{\eta^2\lambda_2}{\mu^2-\rho^2}\equiv\frac{\lambda_3\mu^2}{\mu^2-\rho^2}-1.$$

Учитывая последнее тождество, уравнение (14) преобразуется к виду

$$C(\xi,\eta)\big((1-\lambda_3)^2\mu^2-\rho^2\big)=(\mu-\rho)\big((1-\lambda_3)\mu+\rho\big)\big(\rho\widetilde{f}_3-i\eta i\widetilde{f}_2-i\xi\widetilde{f}_1\big). \tag{15}$$

Правая часть этого уравнения — известная функция, выражающаяся через граничные функции f_i. Положим

$$\widetilde{g}=(\mu-\rho)\big((1-\lambda_3)\mu+\rho\big)\big(\rho\widetilde{f}_3-i\eta i\widetilde{f}_2-i\xi\widetilde{f}_1\big).$$

Пусть $C(\xi,\eta)$ — преобразование Фурье некоторой функции ω, т.е. $C(\xi,\eta)=\widetilde{\omega}$. Учитывая введенные обозначения и соотношения (5) и (7), уравнение (15) преобразуется к виду

$$\widetilde{\omega}\Big[(\lambda_3-1)(\lambda_1-1)\xi^2+(\lambda_3-1)(\lambda_2-1)\eta^2-(\lambda_3-1)i\xi k-\xi^2-\eta^2-i\xi k-i\eta n\Big]=\widetilde{g}.$$

Применяя к нему обратное преобразование Фурье, получим

$$\big(\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\big)\omega_{xx}+\big(\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\big)\omega_{yy}-\lambda_3(k\omega_x+n\omega_y)=g(x,y). \tag{16}$$

Это уравнение с частными производными второго порядка будем рассматривать во всем пространстве переменных x, y. Заметим, что если граничные условия исходной задачи однородны, то уравнение (16) также будет однородным. Рассмотрим возможные ситуации.

Если коэффициенты при старших производных будут равны нулю, т.е.

$$\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)=0,\quad \lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)=0,$$

то уравнение (16) примет вид

$$k\omega_x+n\omega_y=-\frac{g(x,y)}{\lambda_3}.$$

Если функция $g(x,y)$ интегрируема по x и по y в промежутке $(-\infty,+\infty)$, то это уравнение, а, следовательно, и рассматриваемая задача (1), (11) имеет решение, зависящее от одной произвольной функции. При этом необходимо требовать повышенной гладкости от граничных условий (11).

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (16) отличен от нуля, то это уравнение может относится к разным типам. В зависимости от этого характер разрешимости исходной задачи будет меняться.

1. Уравнение (16) является уравнением эллиптического типа при выполнении условия

$$\big(\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\big)\big(\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\big)>0.$$

Приведя уравнение к каноническому виду, получим в этом случае уравнение Пуассона

$$\omega_{\xi\xi}+\omega_{\eta\eta}=F(\xi,\eta);$$

оно имеет единственное решение (см. [1]). Следовательно, и рассматриваемая задача Дирихле в этом случае имеет единственное решение.

2. Уравнение (16) является уравнением гиперболического типа при выполнении условия

$$\big(\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\big)\big(\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\big)<0.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (16):

$$c_1\omega_{xx}+c_2\omega_{yy}-\lambda_3(k\omega_x+n\omega_y)=0. \tag{17}$$

Здесь введены обозначения

$$c_1=\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1),\quad c_2=\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1).$$

Решение уравнения (17) будем искать методом разделения переменных в виде

$$\omega=X(x)\cdot Y(y). \tag{18}$$

Подставим (18) в уравнение (17):

$$c_1X''Y+c_2XY''-\lambda_3kX'Y-\lambda_3nXY'=0.$$

Разделим уравнение на XY:

$$\frac{c_1X''-\lambda_3kX'}{X}=-\frac{c_2Y''-\lambda_3nY'}{Y}.$$

В этом уравнении функция, стоящая слева, зависит от переменной x, а функция, стоящая справа — от переменной y. Две функции разных переменных могут быть равны между собой только в том случае, если они равны одной и той же константе. В теории метода Фурье доказывается, что для получения ненулевых решений эта константа должна быть отрицательной. Приравнивая последнее равенство к некоторой отрицательной константе

$$\frac{c_1X''-\lambda_3kX'}{X}=-\frac{c_2Y''-\lambda_3nY'}{Y}=-a^2,$$

получим два уравнения

$$c_1X''-\lambda_3kX'+a^2X=0, \tag{19}$$

$$c_2Y''-\lambda_3nY'+a^2Y=0. \tag{20}$$

Решим уравнение (19). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$c_1\nu^2-\lambda_3k\nu+a^2=0,\quad \nu_{1,2}=\frac{\lambda_3k\pm\sqrt{(\lambda_3k)^2-4c_1a^2}}{2c_1}.$$

Тогда решение уравнения (19) запишется в виде

$$X(x)=A_1e^{\nu_1x}+A_2e^{\nu_2x}, \tag{21}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Аналогично решим уравнение (20). Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$c_2\delta^2-\lambda_3n\delta-a^2=0,\quad \delta_{1,2}=\frac{\lambda_3n\pm\sqrt{(\lambda_3n)^2+4c_2a^2}}{2c_2}.$$

Все решения уравнения (20) даются формулой

$$Y(y)=B_1e^{\delta_1y}+B_2e^{\delta_2y}, \tag{22}$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные.

Поскольку уравнение (17), а, следовательно, и уравнения (19) и (20) рассматриваются при $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, то функции (21) и (22) являются неограниченными на бесконечности. Можно утверждать, что уравнение (17), а, следовательно, и однородная задача Дирихле для системы (1) ограниченных решений в этом случае не имеют.

3. Уравнение (16) является уравнением параболического типа при выполнении условий

$$\text{(a)}\ \begin{cases}\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)=0,\\ \lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\neq 0,\end{cases}\qquad \text{или}\qquad \text{(b)}\ \begin{cases}\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\neq 0,\\ \lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)=0.\end{cases}$$

Рассмотрим первый случай. Как и ранее, будем рассматривать однородное уравнение (17). При условиях (a) оно примет вид

$$c_2\omega_{yy}-\lambda_3(k\omega_x+n\omega_y)=0, \tag{23}$$

где $c_2=\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)$.

Как и во втором случае, решение уравнения (23) будем искать в виде

$$\omega(x,y)=X(x)\cdot Y(y).$$

Тогда

$$c_2XY''-\lambda_3kX'Y-\lambda_3nXY'=0.$$

Разделим последнее уравнение на XY и приравняем результат к некоторой отрицательной константе

$$\frac{c_2Y''-\lambda_3nY'}{Y}=\frac{\lambda_3kX'}{X}=-a^2.$$

Отсюда получим два уравнения

$$c_2Y''-\lambda_3nY'+a^2Y=0,\quad \lambda_3kX'+a^2X=0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение

$$Y(y)=B_1e^{\delta_1y}+B_2e^{\delta_2y},$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные, а

$$\delta_{1,2}=\frac{\lambda_3n\pm\sqrt{(\lambda_3n)^2+4c_2\mu^2}}{2c_2}$$

— корни характеристического уравнения. Второе уравнение имеет решение вида

$$X(x)=A\exp\left(\frac{-a^2}{\lambda_3k}x\right),$$

где A — произвольная постоянная. Учитывая,что $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<y<+\infty$, функции $X(x)$ и $Y(y)$ являются неограниченными при любых A, B_1, B_2. Следовательно, однородное уравнение (17), соответствующее уравнению (16), и в этом случае ограниченных на бесконечности решений не имеет. Такой же вывод можно сделать и о разрешимости однородной задачи Дирихле для системы (1).

Случай (b) рассматривается аналогично. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Младшие производные существенно влияют на разрешимость задачи Дирихле для многомерных эллиптических систем. Характер разрешимости рассматриваемой задачи зависит от вида уравнения* (16)*, которое рассматривается в пространстве переменных x, y.*

При выполнении условия

$$\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)=0,\quad \lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)=0$$

однородная задача Дирихле для системы (1) *имеет решение, зависящее от одной произвольной функции. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо требовать повышенной гладкости от граничных условий* (11).

Если выполняется условие

$$\big(\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\cdot\big(\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\big)>0,$$

то задача Дирихле для системы (1) *имеет единственное решение, если же*

$$\big(\lambda_3-\lambda_1(\lambda_3-1)\big)\cdot\big(\lambda_3-\lambda_2(\lambda_3-1)\big)\leqslant 0,$$

то однородная задача Дирихле для системы (1) *ограниченных на бесконечности решений не имеет.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1977.
2. *Руткаускас С.* О задаче типа Дирихле для эллиптических систем с вырождением на прямой// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 2. — С. 270–278.
3. *Халилов Ш. Б.* Задача Дирихле для эллиптической по Петровскому системы уравнений второго порядка// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 3. — С. 416–422.
4. *Янушаускас А. И.* Граничные задачи для уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Головко Елена Анатольевна (Golovko Elena Anatol'evna)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: elena-golovko@mail.ru

Кацапова Наталия Сергеевна (Katsapova Natalia Sergeevna)
Иркутский государственный университет
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: natalikakacapova@list.ru