ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 8–24
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-8-24

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ «УГЛОМ» И МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

© 2023 г. **Г. АКИШЕВ**

Аннотация. В статье рассматриваются пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ 2π-периодических функций многих переменных и наилучшее приближение «углом» функции тригонометрическими полиномами, смешанный модуль гладкости функции из этого пространства. Приведены свойства смешанного модуля гладкости функции и доказаны усиленные варианты прямой и обратной теорем приближения «углом».

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, наилучшее приближение «углом», модуля гладкости.

INEQUALITIES FOR THE BEST "ANGULAR" APPROXIMATION AND THE SMOOTHNESS MODULUS OF A FUNCTION IN THE LORENTZ SPACE

© 2023 **G. AKISHEV**

Abstract. In this paper, we consider the Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of 2π-periodic functions of several variables, the best "angular" approximation of such functions by trigonometric polynomials, and the mixed smoothness modulus of functions from this space. The properties of the mixed smoothness modulus are given and strengthened versions of the direct and inverse theorems on the "angular" approximations are proved.

Keywords and phrases: Lorentz space, trigonometric polynomial, best "angular" approximation, smoothness modulus.

AMS Subject Classification: 41A10, MSC 41A25, 42A05

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{T}^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant x_j < 2\pi;\ j = 1, \dots, m\}$ — m-мерный куб и $\mathbb{I}^m = [0,1)^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\boldsymbol{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\tau/p-1} dt \right\}^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\boldsymbol{x})|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [24, гл. 1, разд. 3, с. 213–216].

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$ (см. [15, гл. 1, разд. 1.1, с. 11].

Через $\mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим множество всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Обозначим через $\mathbb{Z}_+^m$ — множество точек с неотрицательными целыми координатами, а через $a_{\boldsymbol{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \boldsymbol{n}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ — множество точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\rho(\boldsymbol{s})} a_{\boldsymbol{n}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{n}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle},$$

где

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1, 2, \ldots,$$

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, \ j = 1, \ldots, m\right\}.$$

Величина

$$Y_{l_1,\ldots,l_m}(f)_{p,\tau} = \inf_{T_{l_j}} \left\| f - \sum_{j=1}^m T_{l_j} \right\|_{p,\tau}^*, \quad l_j = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется наилучшим приближением «углом» функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ тригонометрическими полиномами, где $T_{l_j} \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — тригонометрический полином порядка l_j по переменной x_j, $j = 1, \ldots, m$ (в случае $\tau = p$ см. [9, 17, 19, 43]).

Определение 1.1. Смешанный модуль гладкости функции порядка k функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ определяется по формуле (в случае $\tau = p$ см. [4, гл. 1, разд. 11] и [43])

$$\omega_{\boldsymbol{k}}(f, \boldsymbol{t})_{p,\tau} = \omega_{k_1,\ldots,k_m}(f, t_1, \ldots, t_m)_{p,\tau} = \sup_{|h_1|\leqslant t_1,\ldots,|h_m|\leqslant t_m} \left\|\Delta_{\boldsymbol{h}}^{\boldsymbol{k}}(f)\right\|_{p,\tau},$$

где $\Delta_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} f(2\pi\boldsymbol{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(\ldots \Delta_{t_1}^{k_1} f(2\pi\boldsymbol{x}))$ — смешанная разность порядка $\boldsymbol{k}$ с шагом $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m)$.

Для функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T})$ одной переменной т.е. при $m = 1$, наилучшее приближение тригонометрическими полиномами T_n порядка не выше n, обозначается символом $E_n(f)_{p,\tau}$. В случае $\tau = p$ вместо $E_n(f)_{p,p}$ будем писать $E_n(f)_p$. Модуль гладкости порядка k функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ обозначается символом $\omega_k(f, \delta)_p$; при $k = 1$ пишут $\omega(f, \delta)_p$.

Постановка задачи. В теории приближения функций под прямыми теоремами понимают неравенства, в которых наилучшие приближения функций из некоторого пространства сверху оцениваются через ее модули гладкости, а обратными теоремами называются неравенства, в которых модули гладкости функций сверху оценивается через ее наилучшие приближения.

Первая прямая теорема была доказана Д. Джексоном в [39].

Теорема 1.1 (см. [9]). *Для любой функции $f \in C[0, 2\pi]$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \leqslant C\omega(f, \pi/n)_\infty. \tag{1.1}$$

Неравенства вида (1.1) принято называть неравенством Джексона. Е. Кваде (см. [44]) распространил неравенство Джексона на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$.

В общем случае прямая теорема известна в следующей формулировке.

Теорема 1.2. *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leqslant C\omega_k(f, \pi/n)_p. \tag{1.2}$$

В случае $k = 2$ теорему 1.2 опубликовал Н. И. Ахиезер (см. [5]). С. Б. Стечкин (см. [25]) доказал неравенство (1.2) для модудля гладкости произвольного порядка $k \in \mathbb{N}$ в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{T})$. Как отмечено в [11], его рассуждения справедливы и для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < \infty$.

Для $k = 1$ неравенство (1.2) в случае $0 < p < 1$, независимо доказали Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд (см. [27]) и В. И. Иванов (см. [10]). При $0 < p < 1$ и $k \geqslant 2$ аналог неравенства (1.2) доказали Э. А. Стороженко и П. Освальд (см. [28]).

В 1965 г. М. Ф. Тиман (см. [29, 30]) для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, $\gamma = \max\{2, p\}$ доказал следующий усиленный вариант неравенства (1.2):

$$\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k\gamma-1} E_\nu^\gamma(f)_p\right)^{1/\gamma} \leqslant C\omega_k(f, \pi/n)_p. \tag{1.3}$$

Первые результаты в обратных теоремах теории приближения принадлежат С. Н. Бернштейну и Ш. Валле Пуссену (см. библиографию в [11]).

Первая общая обратная теорема была доказана Р. Салемом (см. [45]) в пространстве непрерывных функций. Известна следующая общая обратная теорема к теореме 1.2.

Теорема 1.3. *Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k(f, \pi/n)_p \leqslant \frac{C(k)}{n^k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)_p. \tag{1.4}$$

Теорему 1.3 в случае $k = 1$, $p = \infty$ доказал Р. Салем (см. [45]), а для $k \in \mathbb{N}$, $p = \infty$ — С. Б. Стечкин (см. [25]). При $1 < p < \infty$ эту теорему доказали А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман (см. [31]). Как отмечено в [11], теорема 1.3 для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ доказывается методом С. Б. Стечкина.

Усиленный вариант теоремы 1.3 для $p = 2$ доказал С. Б. Стечкин (см. [26]), а для всех $1 < p < \infty$ — М. Ф. Тиман (см. [32]).

Теорема 1.4 (см. [32])**.** *Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, $\beta = \min\{2, p\}$, $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k(f, \pi/n)_p \leqslant \frac{C(k)}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k\beta-1} E_\nu^\beta(f)_p\right)^{1/\beta}. \tag{1.5}$$

Для модулей гладкости положительного порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, неравенства (1.2), (1.4), (1.5) доказал Р. Таберски (см. [46, 47]).

Для функций одной переменной прямые и обратные теоремы теории приближения известны и в перестановочно-инвариантных пространствах (см. [34, 38, 40]), в частности, в пространстве Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T})$ (см. [35, 42]).

Прямые и обратные теоремы между наилучшим приближением «углом» и смешанным модулем гладкости функции многих переменных $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, доказал М. К. Потапов (см. [17–19]); их усиленные варианты доказаны в [43]; двумерный аналог неравенства (1.3) в пространстве Лебега со смешанной нормой доказан Е. С. Смаиловым, М. Г. Есмаганбетовым и Б. К. Шаяхметовой (см. [32]).

В [20, 21] определен обобщенный модуль гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и доказаны прямая и обратная теоремы теории приближения «углом» для этого модуля гладкости.

Основная цель статьи — найти соотношения между наилучшим приближением «углом» и смешанным модулем гладкости функции в пространстве $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 \leqslant p, \tau < \infty$.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 2 приведены некоторые следствия известных теорем. В разделе 3 приведены свойства смешанного модуля гладкости функции из пространства Лоренца. Основные результаты сформулированы и доказаны в разделе 4. Теоремы 4.1 и 4.2 являются усиленными вариантами прямой и обратной теорем теории приближения «углом» в пространстве Лоренца. В случае $\tau = p$ из этих теорем следует [43, теорема 9.1].

Через $C(p, q, y, \dots)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1, C_2, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи, в случае выполнения неравенств $B \geqslant C_1 A$ или $B \leqslant C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно.

2. Вспомогательные утверждения. Напомним определение дробной производной функции и сформулируем утверждения, которые часто применяются в доказательствах результатов статьи.

Для функции $f \in \mathring{L}(\mathbb{T}^m)$ и вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ с неотрицательными координатами оператор дробного дифференцирования определяется по формуле (см. [8, гл. 3, раздел 15])

$$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) := f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathring{\mathbb{Z}}^m} \prod_{j=1}^{m} (in_j)^{\alpha_j} a_{\boldsymbol{n}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle},$$

где

$$\mathring{\mathbb{Z}}^m = \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^m : \prod_{j=1}^{m} n_j \neq 0 \right\}, \quad (in_j)^{\alpha_j} = |n_j|^{\alpha_j} e^{i\pi\alpha_j/2\,\mathrm{sign}\, n_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для функции $f \in \mathring{L}_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, известно следующее соотношение (см. [8, гл. 3, раздел 15]):

$$\|f^{(\boldsymbol{\alpha})}\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\alpha}\rangle} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p, \tag{2.1}$$

которое понимается в том смысле, что из конечности какой-либо части следует конечность другой его части и выполняются двусторонние неравенства. Используя соотношение (2.1) и интерполяционную теорему в пространстве Лоренца, нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < p, \tau < \infty$ *и* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. *Тогда выполняется соотношение*

$$\|f^{(\boldsymbol{\alpha})}\|_{p,\tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\alpha}\rangle} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

Теорема 2.2 (см. [2])**.** *Пусть* $1 < p, \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *выполняется соотношение*

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

3. Смешанный модуль гладкости функции и его свойства в пространстве Лоренца. Обозначим через e_m множество индексов $\{1, \ldots, m\}$, через e его произвольное подмножество и через $|e|$ — количество элементов e.

Если $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ — элемент m-мерного пространства, имеющий неотрицательные координаты, то $\boldsymbol{r}^e = (r_1^e, \ldots, r_m^e)$ — вектор с компонентами $r_j^e = r_j$ при $j \in e$ и $r_j^e = 0$ при $j \notin e$.

Пусть $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ — элемент m-мерного пространства с целыми положительными координатами и $e \subset e_m$ — непустое множество. Положим

$$G_{\boldsymbol{l}}(e) = \Big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ |k_j| \leqslant l_j, \ j \in e, \ |k_j| > l_j, \ j \notin e \Big\}.$$

Для заданных чисел $b_{\boldsymbol{n}}$ смешанная разность определяется по формуле

$$\Delta b_{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{\varepsilon}\leqslant\boldsymbol{1}} (-1)^{m-\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon_j} b_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}+\boldsymbol{\varepsilon}},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = 0$ или $\varepsilon_j = 1$, и $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1} + \boldsymbol{\varepsilon} = (n_1 - 1 + \varepsilon_1, \ \ldots, \ n_m - 1 + \varepsilon_m)$.

Будем рассматривать следующие частные суммы по различным переменным:

$$S_{\boldsymbol{l}}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = S_{l_1,\ldots,l_m}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{|k_1|\leqslant l_1} \cdots \sum_{|k_m|\leqslant l_m} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по всем переменным;

$$S_{l_1,\infty}(f, 2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{|k_1|\leqslant l_1} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{+\infty} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k}, 2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменной $x_1 \in [0,1)$. В более общем случае

$$S_{\boldsymbol{l}^e,\boldsymbol{\infty}}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\prod_{j\in e}[-l_j,l_j]\times\mathbb{R}^{m-|e|}} a_{\boldsymbol{k}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменным $x_j \in [0,1)$ при $j \in e$.

Для заданного подмножества $e \subset e_m$ положим

$$U_{\boldsymbol{l}}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{e\subset e_m, e\neq\varnothing}\ \sum_{\boldsymbol{k}\in G_{\boldsymbol{l}}(e)} a_{\boldsymbol{k}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}.$$

В частности, для $m=2$ имеем (см., например, [43])

$$U_{l_1,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}) = S_{l_1,\infty}(f,2\pi\boldsymbol{x}) + S_{\infty,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}) - S_{l_1,l_2}(f,2\pi\boldsymbol{x}).$$

Приведем некоторые свойства смешанного модуля гладкости функции. Они доказываются известными методами (см., например, [15, 17]).

Лемма 3.1. *Пусть $1 < p,\tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ для $j = 1,\dots,m$ и $f,g \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_{i-1},0,\dots,\delta_{i+1},\dots,\delta_m)_{p,\tau} = \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,0,\dots,0)_{p,\tau} = 0$;
(2) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f+g,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} + \omega_{\boldsymbol{\alpha}}(g,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau}$;
(3) $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau}$ *не убывает по каждой переменной* $\delta_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$;
(4) *для чисел* $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$, *справедливо соотношение*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\lambda_1\delta_1,\dots,\lambda_m\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau};$$

(5) *для* $0 < t_j \leqslant \delta_j$, $j = 1,\dots,m$, *справедливо соотношение*

$$\prod_{j=1}^m \delta_j^{-\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j}\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f,t_1,\dots,t_m)_{p,\tau};$$

(6) *для тригонометрического полинома*

$$T_{\boldsymbol{n}}(2\pi\boldsymbol{x}) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\dots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m} c_{\boldsymbol{k}}e^{i\langle\boldsymbol{k},2\pi\boldsymbol{x}\rangle}, \quad n_j\in\mathbb{Z}_+, \quad j=1,\dots,m, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^m,$$

и его производной $T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}(2\pi\boldsymbol{x})$ *справедливо неравенство*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(T_{\boldsymbol{n}},\delta_1,\dots,\delta_m)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^m \delta_j^{\alpha_j}\left\|T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}\right\|_{p,\tau}.$$

Лемма 3.1 доказывается так же, как [43, теорема 4.1]. В случае $\tau = p$ лемма 3.1 ранее доказана как [43, теорема 5.1].

Лемма 3.2 (неравенство Бернштейна)**.** *Пусть $1 < p,\tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1,\dots,m$. Тогда для тригонометрического полинома $T_{\boldsymbol{n}}$ имеет место неравенство*

$$\left\|T_{\boldsymbol{n}}^{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}\right\|_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^m (n_j+1)^{\alpha_j}\|T_{\boldsymbol{n}}\|_{p,\tau}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ и $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Тогда*

$$\left\|f - U_{l_1,\dots,l_m}(f)\right\|_{p,\tau} \ll Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{p,\tau}.$$

Лемма 3.4 (прямая теорема)**.** *Если $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, то*

$$Y_{\boldsymbol{n}}(f)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{k}}\left(f,\frac{1}{n_1+1},\dots,\frac{1}{n_m+1}\right)_{p,\tau}.$$

Лемма 3.5 (обратная теорема). *Если* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{n_1+1}, \dots, \frac{1}{n_m+1}\right)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{-\alpha_j} \sum_{\nu_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{\nu_m=1}^{n_m+1} \prod_{j=1}^{m} \nu_j^{\alpha_j-1} Y_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}.$$

В случае $\tau = p$ леммы 3.3–3.5 доказаны в [17, 43]. Для $\tau \neq p$ они доказываются аналогично.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^2)$, $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$, $\alpha_j, n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. *Тогда*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} \asymp n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f) \right\|_{p,\tau} + n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau} + \left\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}.$$

Доказательство. По свойству нормы (квазинормы) для любого числа h_i и $n_i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)) \right\|_{p,\tau} \ll \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f - S_{n_1,\infty}(f) - S_{\infty,n_2}(f) + S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,\infty}(f - S_{\infty,n_2}(f)))) \right\|_{p,\tau} + \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{\infty,n_2}(f - S_{n_1,\infty}(f)))) \right\|_{p,\tau} +$$
$$+ \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} = C\{I_1 + I_2 + I_3 + I_4\}. \quad (3.1)$$

Оценим I_1. Введем обозначение

$$\varphi(2\pi x_1, 2\pi x_2) = f(2\pi x_1, 2\pi x_2) - S_{n_1,\infty}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2) -$$
$$- S_{\infty,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2) + S_{n_1,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2).$$

Тогда по свойству нормы и ее инвариантности относительно сдвига имеем

$$I_1 = \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(\varphi)) \right\|_{p,\tau} \ll$$
$$\ll \sum_{\nu_1=0}^{\alpha_1} C_{\nu_1}^{\alpha_1} \sum_{\nu_2=0}^{\alpha_2} C_{\nu_2}^{\alpha_2} \left\| \varphi\big(2\pi x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, 2\pi x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2\big) \right\|_{p,\tau} \ll \|\varphi\|_{p,\tau}. \quad (3.2)$$

Оценим I_2. Введем обозначение

$$\psi(2\pi x_1, 2\pi x_2) = f(2\pi x_1, 2\pi x_2) - S_{\infty,n_2}(f, 2\pi x_1, 2\pi x_2).$$

Тогда по свойству нормы имеем

$$I_2 = \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau} \ll \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau}. \quad (3.3)$$

В [43] доказано, что

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_p \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_p, \quad 1 < p < \infty,$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$. По экстраполяционной теореме (см. [37, теорема 2.1], [34]) будем иметь

$$\left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} S_{n_1,\infty}(\psi) \right\|_{p,\tau} \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p, \tau < \infty.$$

Следовательно, из (3.3) получим

$$I_2 \ll n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(\psi) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p, \tau < \infty, \quad (3.4)$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$. Аналогично доказывается, что

$$I_3 \ll n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau}, \quad (3.5)$$

$$I_3 \ll n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)) \right\|_{p,\tau} \quad (3.6)$$

для $0 < h_1 < \pi/n_1$, $0 < h_2 < \pi/n_2$, $1 < p,\tau < \infty$. Теперь из неравенств (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6) получим

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f) \right\|_{p,\tau} + n_1^{-\alpha_1} \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} + \\ + n_2^{-\alpha_2} \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau} + \left\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}.$$

Докажем противоположное неравенство. В силу ограниченности оператора прямоугольной частичной суммы ряда Фурье функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p,\tau < \infty$, имеем

$$A_1 := \left\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau} \ll Y_{n_1,n_2}(f)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Согласно прямой теореме теории приближения «углом» в пространстве Лоренца (лемма 3.4) отсюда получим

$$A_1 \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.7}$$

Введем обозначение

$$A_2 := \left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}.$$

В [43] доказано, что

$$\left\| S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p} \ll n_1^{\alpha_1} \|\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f - S_{\infty,n_2}(f))\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Согласно экстраполяционной теореме (см. [37, теорема 2.1], [34]) будем иметь

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1} \left\| \Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f - S_{\infty,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Обозначая $\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1}(f) = F$, отсюда получим

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1} \left\| F - S_{\infty,n_2}(F) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Так как $S_{0,\infty}(F) = S_{0,n_2}(F)$, то

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1} \left\| F - S_{0,\infty}(F) - S_{\infty,n_2}(F) + S_{0,n_2}(F) \right\|_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty.$$

Отсюда согласно прямой теореме теории приближения «углом» в пространстве Лоренца (лемма 3.4) и свойству модуля гладкости получим

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(F, \pi, \frac{\pi}{n_2+1}\right)_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(F, \pi, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau} = \\ = C n_1^{\alpha_1} \sup_{|h_1| \leqslant \pi, |h_2| \leqslant \pi/n_2} \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2} F) \right\|_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1} \sup_{|h_2| \leqslant \pi/n_2} \left\| \Delta_{h_2}^{\alpha_2} F \right\|_{p,\tau} = \\ = C n_1^{\alpha_1} \sup_{|h_2| \leqslant \pi/n_2} \left\| \Delta_{h_2}^{\alpha_2}(\Delta_{\pi/n_1}^{\alpha_1} f) \right\|_{p,\tau} \ll n_1^{\alpha_1} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}.$$

Таким образом,

$$A_2 \ll n_1^{\alpha_1} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.8}$$

Аналогично можно доказать, что

$$A_3 := \left\| S_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{n_1,\infty}(f)) \right\|_{p,\tau} \ll n_2^{\alpha_2} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty, \tag{3.9}$$

$$A_4 := \left\| S_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f) \right\|_{p,\tau} \ll n_2^{\alpha_2} \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}, \quad 1 < p,\tau < \infty. \tag{3.10}$$

Теперь из неравенств (3.7)–(3.10) следует, что

$$\begin{aligned}\Big\|f-(S_{n_1,\infty}(f)+S_{\infty,n_2}(f)-S_{n_1,n_2}(f))\Big\|_{p,\tau} \ll \\ \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2}\right)_{p,\tau}+n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\Big\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{n_1,n_2}(f)\Big\|_{p,\tau}+ \\ +n_1^{-\alpha_1}\Big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f-S_{\infty,n_2}(f))\Big\|_{p,\tau}+n_2^{-\alpha_2}\Big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f-S_{n_1,\infty}(f))\Big\|_{p,\tau}. \quad \square\end{aligned}$$

В случае $\tau=p$ теорема 3.1 доказана в [43, теорема 5.1].

4. Прямые и обратные теоремы приближения в пространстве Лоренца.

Теорема 4.1. *Пусть* $1<p<+\infty$, $1<\tau<\infty$, $\alpha_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,m$, $\sigma=\max\{2,\tau\}$. *Если* $f\in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\prod_{j=1}^m n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^m \nu_j^{\sigma\alpha_j-1}Y^\sigma_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\sigma} \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{\pi}{n_1},\dots,\frac{\pi}{n_m}\right)_{p,\tau}, \quad n_j\in\mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$I_{\boldsymbol{n}}(f):=\prod_{j=1}^m n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^m \nu_j^{\sigma\alpha_j-1}Y^\sigma_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\sigma}.$$

Для заданного $n_j\in\mathbb{N}$ выберем такое неотрицательное целое число k_j, что $2^{k_j}\leqslant n_j<2^{k_j+1}$, $j=1,\dots,m$. Тогда в силу монотонного убывания $\{Y^\sigma_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\}$ по каждому индексу ν_j, $j=1,\dots,m$, нетрудно убедиться, что

$$I^\sigma_{\boldsymbol{n}}(f)\ll\prod_{j=1}^m 2^{-k_j\alpha_j\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\dots\sum_{\mu_m=1}^{k_m+1}\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j\alpha_j\sigma}Y^\sigma_{[2^{\mu_1-1}],\dots,[2^{\mu_m-1}]}(f)_{p,\tau}. \tag{4.2}$$

Докажем теорему для $m=2$. Тогда (4.2) имеет вид

$$I^\sigma_{\boldsymbol{n}}(f)\ll\prod_{j=1}^2 2^{-k_j\alpha_j\sigma}\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^2 2^{\mu_j\alpha_j\sigma}Y^\sigma_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \tag{4.3}$$

Так как

$$\begin{aligned}U_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x}) &= S_{[2^{\mu_1-1}],\infty}(f,2\pi\boldsymbol{x})+S_{\infty,[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x})-S_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f,2\pi\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{n_1=[2^{\mu_1-1}]}^{\infty}\ \sum_{n_2=[2^{\mu_2-1}]}^{\infty} a_{\boldsymbol{n}}(f)e^{i\langle\boldsymbol{n},2\pi\boldsymbol{x}\rangle},\end{aligned}$$

то согласно определению наилучшего приближения «углом» и теореме 2.1 имеем

$$Y_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\leqslant\Big\|f-U_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)\Big\|_{p,\tau}\ll\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=\mu_2}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}. \tag{4.4}$$

Теперь из неравенств (4.3) и (4.4), по свойству нормы и в силу неравенства $(a+b)^\theta\leqslant C(a^\theta+b^\theta)$, для $0<\theta<\infty$, $a,b\geqslant 0$ получим

$$I_{\boldsymbol{n}}^{\sigma}(f) \ll \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \left(\left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} + \right.$$
$$+ \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} +$$
$$\left. + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \right)^{\sigma} \ll \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \times$$
$$\times \left(\left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \right.$$
$$\left. + \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} + \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} \right). \quad (4.5)$$

Так как $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2$, то

$$\sum_{\mu_j=0}^{k_j+1} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \asymp 2^{k_j\alpha_j\sigma}.$$

Поэтому из (4.5) получим

$$I_{\boldsymbol{n}}^{\sigma}(f) \ll \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ 2^{-k_1\alpha_1\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ 2^{-k_2\alpha_2\sigma} \sum_{\mu_2=0}^{k_2+1} 2^{\mu_2\alpha_2\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=k_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} +$$
$$+ \prod_{j=1}^{2} 2^{-k_j\alpha_j\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}\sum_{\mu_2=1}^{k_2+1}\prod_{j=1}^{2} 2^{\mu_j\alpha_j\sigma} \left\| \left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=\mu_2}^{k_2} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\tau}^{\sigma} =$$
$$= C\big\{ I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f) \big\}. \quad (4.6)$$

Согласно теореме 2.1 имеем

$$I_1(f) \ll \left\| f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f)) \right\|_{p,\tau}^{\sigma}. \quad (4.7)$$

Теперь оценим величину

$$I_2(f) = 2^{-k_1\alpha_1\sigma} \sum_{\mu_1=0}^{k_1+1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma} \left\{ \int_0^1 \left(\left[\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2 \right)^{1/2} \right]^{*}(t) \right)^{\tau} t^{\tau/p-1} dt \right\}^{\sigma/\tau}. \quad (4.8)$$

Введем обозначение

$$\varphi_{\mu_1}(\boldsymbol{x}) = 2^{\mu_1\alpha_1}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2}, \quad \mu_1 = 0,1,\ldots,k_1.$$

Тогда

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma}.$$

Предположим, что $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$. Тогда пространство $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является τ-вогнутым (см., например, [16, 36]). Следовательно, по определению τ-вогнутого пространства справедливо неравенство

$$\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \gg \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau}.$$

В силу обозначения φ_{μ_1} это означает, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1+1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll$$
$$\ll \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \tag{4.9}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$. Если $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, то $\tau < 2$. Тогда согласно неравенству Йенсена имеем

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{2}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau}.$$

Известно, что если $1 < p < \tau$, то пространство $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ является τ-вогнутым (см. [16]). Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\|\varphi_{\mu_1}\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll \left\|\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}\right\|_{p,\tau} \tag{4.10}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $\tau > p > 1$, т.е. $1 < p < \tau < 2$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\mu}2^{k\alpha_1\sigma} \ll 2^{\mu\alpha_1\sigma},$$

то согласно неравенству Потапова—Йохансона (см. [41, 43]) имеем

$$\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2} \ll \sum_{\nu_1=0}^{k_1}2^{\nu_1\alpha_1\sigma}\left(\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{\sigma/2} \tag{4.11}$$

почти для всех $\boldsymbol{x} \in [0,1)^2$. Теперь из неравенств (4.9), (4.10), (4.11) и согласно неравенству Йенсена получим

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\sigma}\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\sigma}\right)^{1/\sigma} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2}\left(\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{\sigma/2}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1\sigma}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \tag{4.12}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau\infty$. Теперь из неравенств (4.8) и (4.12) следует, что

$$I_2(f) \ll 2^{k_1\alpha_1\sigma}\left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \tag{4.13}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$.

Пусть $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$ и $1 < \tau < p < \infty$, т.е. $1 < \tau < 2$. Согласно обозначению функции φ_{μ_1}, меняя порядок суммирования, нетрудно убедиться, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}(\boldsymbol{x})\right)^{1/\sigma} = \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1 2}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2} \tag{4.14}$$

почти для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^2$. Следовательно,

$$\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \asymp \left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}.$$

По теореме 2.2 отсюда получим

$$\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau} \asymp \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \tag{4.15}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$.

Введем обозначение

$$B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x}) = 2^{\nu_1\alpha_1}\sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x}), \quad \nu_1 = 0,1,\dots,k_1.$$

Тогда набор этих функций $\{B_{\nu_1,k_2}\}_{\nu_1=0}^{k_1}$, при фиксированном k_2, будет ортогональной системой, т.е.

$$\int_{\mathbb{I}^m} B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x})B_{s_1,k_2}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0$$

при $\nu_1 \neq s_1$. Поэтому используя [1, лемма 1.4], как в доказательстве [2, лемма 1.5], можно убедиться, что

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|B_{\nu_1,k_2}\|_{p,\tau}^2\right)^{1/2} \ll \left\|\sum_{\mu_1=0}^{k_1} B_{\nu_1,k_2}\right\|_{p,\tau} \tag{4.16}$$

в случае $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$. Согласно обозначению $B_{\nu_1,k_2}(\boldsymbol{x})$, из неравенств (4.15), (4.16) получим

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|B_{\nu_1,k_2}\|_{p,\tau}^2\right)^{1/2} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \asymp \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \varphi_{\mu_1}^{\sigma}\right)^{1/\sigma}\right\|_{p,\tau},$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$. Значит,

$$\left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} \delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \tag{4.17}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < \tau < 2$.

Таким образом, неравенство (4.12), а значит, и (4.13), верно и в случае $1 < \tau < p \leqslant 2$.

Пусть $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$, т. е. $2 < \tau < \infty$. Введем обозначение

$$V_{\mu_1,k_2}(\boldsymbol{x}) = 2^{\mu_1\alpha_1}\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f,2\pi\boldsymbol{x})|^2\right)^{1/2}.$$

Если $2 < p < \infty$, $2 < \tau < \infty$, то согласно [1, лемма 1.4] будем иметь

$$\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau} = \left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} \|V_{\mu_1,k_2}\|_{p,\tau}^{\tau}\right)^{1/\tau} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} |V_{\mu_1,k_2}|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} = C\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1} 2^{\mu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_1=\mu_1}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll$$

$$\ll \left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{k_1} 2^{\nu_1\alpha_1 2} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} |\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau} \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} 2^{\nu_1\alpha_1}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau}.$$

Следовательно, из неравенства (4.8) получим

$$I_2(f) \ll \left\|\sum_{\nu_1=0}^{k_1} \sum_{\nu_2=k_2+1}^{\infty} 2^{\nu_1\alpha_1}\delta_{\boldsymbol{\nu}}(f)\right\|_{p,\tau} \tag{4.18}$$

в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$ и $2 < p < \infty$, т.е. неравенство (4.13) верно и в случае $2 < \tau < p < \infty$.

Таким образом, в случае $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau$ неравенство (4.13) верно для всех $1 < p < \infty$.

В силу теорем 2.2 и 2.1 из (4.13) получим

$$I_2(f) \ll 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\left\|S_{2^{k_1},\infty}^{(\alpha_1,0)}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|_{p,\tau}^{\sigma} \tag{4.19}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$. Аналогично можно доказать, что

$$I_3(f) \ll 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S_{\infty,2^{k_2}}^{(0,\alpha_2)}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|_{p,\tau}^{\sigma}, \tag{4.20}$$

$$I_4(f) \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\sigma}_{p,\tau} \tag{4.21}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$ и $1 < p < \tau < \infty$. Поэтому из неравенств (4.6), (4.7) и (4.19)–(4.21) следует, что

$$\begin{aligned} I^{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(f) \ll & \left\|f - (S_{n_1,\infty}(f) + S_{\infty,n_2}(f) - S_{n_1,n_2}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + \\ & + 2^{-k_1\alpha_1\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + \\ & + 2^{-k_2\alpha_2\sigma}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\sigma}_{p,\tau} + 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\sigma}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\sigma}_{p,\tau} \end{aligned} \tag{4.22}$$

в случаях $\sigma = \max\{2,\tau\} = \tau > p > 1$ или $\sigma = \max\{2,\tau\} = 2$, $1 < p < \tau < \infty$.

Теперь в силу теоремы 3.1 и свойства модуля гладкости из неравенства (4.22) получим утверждение теоремы. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $1 < \tau < \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1,\dots,m$, $\beta = \min\{2,\tau\}$. *Если* $f \in \mathring{L}_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{\pi}{n_1},\dots,\frac{\pi}{n_m}\right)_{p,\tau} \ll \prod_{j=1}^{m} n_j^{-\alpha_j}\left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1+1}\dots\sum_{\nu_m=1}^{n_m+1}\prod_{j=1}^{m}\nu_j^{\beta\alpha_j-1}Y^{\beta}_{\boldsymbol{\nu}}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\beta}, \quad n_j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Для $n_j \in \mathbb{N}$ выберем неотрицательное целое число k_j, удовлетворяющее условию $2^{k_j} \leqslant n_j < 2^{k_j+1}$, $j = 1,\dots,m$. Тогда по свойству смешанного модуля гладкости функции получим

$$I_5(f) := \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll \omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f, \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau}.$$

Далее, по свойствам смешанного модуля гладкости функции отсюда получим

$$\begin{aligned} I^{\tau}_5(f) \ll & \,\omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \\ & + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},\infty}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{\infty,2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} \ll \\ & \ll \left\|f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f)), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \\ & + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f)), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} + \omega^{\tau}_{\boldsymbol{\alpha}}\left(S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f), \frac{1}{2^{k_1}}, \frac{1}{2^{k_2}}\right)_{p,\tau} \ll \\ & \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|S^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} + 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{k_1},\infty}(f - S_{\infty,2^{k_2}}(f))\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \\ & + 2^{-k_2\alpha_2\tau}\left\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{k_2}}(f - S_{2^{k_1},\infty}(f))\right\|^{\tau}_{p,\tau} + \left\|f - S_{2^{k_1},\infty}(f) - S_{\infty,2^{k_2}}(f) + S_{2^{k_1},2^{k_2}}(f)\right\|^{\tau}_{p,\tau} = \\ & = C\big\{I_6 + I_7 + I_8 + I_9\big\}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Согласно теореме 2.1 будем иметь

$$\begin{aligned} I_6 \ll & \,2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}|\delta^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|^{\tau}_{p,\tau} \ll \\ & \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|^{\tau}_{p,\tau}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Пусть $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$. Тогда согласно [2, лемма 1.2] из (4.24) получим

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}\|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_{p,\tau}^2\right\}^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2}. \quad (4.25)$$

Если $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$, то в силу [2, леммы 1.1, 1.4] из (4.24) получим

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}\|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)\|_{p,\tau}^\tau \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}Y^\tau_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \quad (4.26)$$

Таким образом (см. (4.25) и (4.26))

$$I_6 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\beta}Y^\beta_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right)^{\tau/\beta} \quad (4.27)$$

в случае $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$ или $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$.

Оценим I_7. По теореме 2.1 будем иметь

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}^{(\alpha_1,0)}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}2^{\mu_1\alpha_1 2}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau}. \quad (4.28)$$

Если $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$, то согласно [2, лемма 1.2] (см. также [1]) из (4.28) следует, что

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}\left\|\left(\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^2\right)^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}\left\|\left(\sum_{\mu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^2\right)^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1 2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^2_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2}. \quad (4.29)$$

Пусть $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$. Тогда согласно [2, леммы 1.1, 1.4] из (4.28) получим

$$I_7 \ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\tau}\left\|\left(\sum_{\mu_1=k_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=k_2+1}^{\infty}|\delta_{\boldsymbol{\mu}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\tau}^{\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-k_1\alpha_1\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}2^{\mu_1\alpha_1\tau}Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau} \ll$$

$$\ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}. \quad (4.30)$$

Аналогично (4.29) и (4.30) можно доказать, что

$$I_8 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^{2}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{\tau/2} \quad (4.31)$$

в случае $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$ и

$$I_8 \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)\tau}\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau} \quad (4.32)$$

в случае $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$.

По лемме 3.4 имеем

$$I_9 \ll Y^{\tau}_{[2^{k_1}],[2^{k_2}]}(f)_{p,\tau} \quad (4.33)$$

для $1<p,\tau<\infty$. Теперь из неравенств (4.23), (4.27), (4.29), (4.31), (4.33) следует, что

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\left\{\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)2}Y^{2}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right\}^{1/2} \quad (4.34)$$

в случае $\beta=\min\{2,\tau\}=2$ и $2<p<\infty$. Если $\beta=\min\{2,\tau\}=\tau$ и $1<p<\infty$, то

$$\omega_{\boldsymbol{\alpha}}\left(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)_{p,\tau} \ll 2^{-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\left(\sum_{\mu_1=0}^{k_1}\sum_{\mu_2=0}^{k_2}2^{(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2)\tau}Y^{\tau}_{[2^{\mu_1-1}],[2^{\mu_2-1}]}(f)_{p,\tau}\right)^{1/\tau}. \quad (4.35)$$

Нетрудно видеть, что из неравенств (4.34) и (4.35) вытекает утверждение теоремы. □

В случае $\tau=p$ теоремы 4.1 и 4.2 доказаны в [43]. Из теорем 4.1 и 4.2 следуют леммы 3.4 и 3.5 соответственно.

Заключение Задачу о точности константы в неравенствах Джексона—Стечкина исследовали Н. П. Корнейчук [14], В. И. Бердышев [7], Н. И. Черных [33], А. Г. Бабенко [6], В. И. Иванов [13] (см. также библиографию в [11,12]). О. И. Смирнов доказал теорему Джексона с точной константой для приближения «углом» функций в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ при $1\leqslant p<2$ (см. [23]).

Основные результаты работы представлены на международной Воронежской весенней математической школе 3–9 мая 2023 г. (см. [47]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца// Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — *23*, № 3. — С. 3–21.
2. *Акишев Г.* Оценки наилучших приближений функций класса Никольского—Бесова в пространстве Лоренца тригонометрическими полиномами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2020. — *26*, № 2. — С. 5–27.

3. *Акишев Г.* Неравенства для наилучшего приближения «углом» и модуля гладкости функции в пространстве Лоренца// Мат. Междунар. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXXIV» (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 37–38.
4. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. — Алма-Ата: Наука, 1976.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Гостехиздат, 1947.
6. *Бабенко А. Г.* О в неравенстве Джексона—Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2001. — *7*, № 1. — С. 30–46.
7. *Бердышев В. И.* О теореме Джексона в L_p// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1967. — *88*. — С. 3–16.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
9. *Бугров Я. С.* Приближение тригонометрическими полиномами функций многих переменных// в кн.: Труды научного объединения преподавателей физико-математических факультетов педагогических институтов Дальнего Востока. Т. 1. — Хабаровск, 1962. — С. 1–28.
10. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике Lp для $0 < p < 1$// Мат. заметки. — 1975. — *56*, № 2. — С. 15–40.
11. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие// Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — *16*, № 4. — С. 5–17.
12. *Иванов В. И.* Константы Джексона и константы Юнга в векторных L_p-пространствах// Изв. Тульск. гос. ун-та. — 1995. — *1*, № 1. — С. 67–85.
13. *Иванов В. И., Смирнов О. И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ, 1995.
14. *Конейчук Н. П.* Точная константа в неравенстве Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 3. — С. 314–315.
15. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
16. *Новиков С. Я.* Последовательности функций в симметричных пространствах. — Самара: Самар. ун-т, 2008.
17. *Потапов М. К.* О приближении «углом»// Proc. Conf. Constructive Theory of Functions. — Budapesht: Akad. Kiado, 1972. — С. 371–399.
18. *Потапов М. К.* Приближение «углом» и теоремы вложения// Math. Balkan. — 1972. — *2*. — С. 183–198.
19. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углом»// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1972. — *117*. — С. 256–291.
20. *Руновский К. В.* Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости// Мат. заметки. — 2014. — *95*, № 6. — С. 899–910.
21. *Руновский К. В., Омельченко Н. В.* Смешанный обобщенный модуль гладкости и приближение «углом» из тригонометрических полиномов// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 3. — С. 421–432.
22. *Смаилов Е. С., Есмаганбетов М. Г., Шаяхметова Б. К.* О дифференциальных свойствах функций в $L_{p_1,p_2}[0,2\pi]^2$// в кн.: Сб. науч. тр. «Современные вопросы теории функции и функционального анализа». — Караганда, 1988. — С. 86–100.
23. *Смирнов О. И.* Приближение в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ «углом»// Изв. Тульск. гос. ун-та. — 1995. — *1*, № 1. — С. 116–123.
24. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
25. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — *15*, № 3. — С. 219–242.
26. *Стечкин С. Б.* О теореме Колмогорова—Селиверстова// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1953. — *17*, № 6. — С. 499–512.
27. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$// Мат. сб. — 1975. — *98*, № 3. — С. 395–415.
28. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(R^n)$, $0 < p < 1$// Сиб. мат. ж. — 1978. — *19*, № 4. — С. 888–901.
29. *Тиман М. Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p// АН Азерб. ССР. — 1965. — С. 18–25.
30. *Тиман М. Ф.* О теореме Джексона в пространствах L_p// Укр. мат. ж. — 1966. — *1*. — С. 134–137.

31. *Тиман А. Ф., Тиман М. Ф.* Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем// Докл. АН СССР. — 1950. — *71.* — С. 17–19.
32. *Тиман М. Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p// Мат. сб. — 1958. — *46*, № 1. — С. 125–132.
33. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1992. — *198.* — С. 232–241.
34. *Akgun R.* Approximation by polynomials in rearrangement invariant quasi Banach function spaces// Banach J. Math. Anal. — 2012. — *6*, № 2. — P. 113–131.
35. *Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W.* Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces// J. Fourier Anal. Appl. — 2014. — *20.* — P. 1020–1049.
36. *Creekmore J.* Type and cotype in Lorentz $L_{p,q}$ spaces// Proc. Kön. Ned. Akad. Wetensch. — 1981. — *84*, № 2. — P. 145–152.
37. *Gurbea G. P., Cuerva J., Perez C.,* Extrapolation with weights, rearrangement function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals// Adv. Math. — 2006. — *203.* — P. 256–318.
38. *Yurt H., Guven A.* Multivariate approximation theorems in weighted Lorentz spaces// Mediterr. J. Math. — 2015. — *12.* — P. 863–876.
39. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung. — Göttingen, 1911.
40. *Jafarov S. Z.* Approximation by trigonometric polynomials in rearrangement invariant quasi Banach function spaces// Mediterr. J. Math. — 2015. — *12.* — P. 37–50.
41. *Johansson H.* Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases// Res. Rept. Univ. Umea. — 1975. — *6.* — P. 1–36.
42. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces// J. Funct. Spaces Appl. — 2010. — *8.* — P. 67–86.
43. *Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. Yu.* Mixed moduli of smoothness in L_p, $1 < p < \infty$: A survey// Surv. Approx. Theory. — 2013. — *8.* — P. 1–57.
44. *Quade E. S.* Trigonometric approximation in the mean// Duke Math. J. — 1937. — *3.* — P. 529–543.
45. *Salem R.* Sur certaines fonctions continues et le propriétés de leur séries de Fourier// C. R. Acad. Sci. — 1935. — *201.* — P. 703–705.
46. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders// Comment. Math. Prace Mat. — 1976–1977. — *19*, № 2. — P. 389–400.
47. *Taberski R.* Indirect approximation theorems in L^p-metrics $(1 < p < \infty)$// Banach Center Publ. — 1979. — *4.* — P. 247–259.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Акишев Габдолла
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Казахстанский филиал, Астана, Казахстан
E-mail: akishev_g@mail.ru