



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 3–7
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-3-7

УДК 517.927.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Г. Э. АБДУРАГИМОВ

Аннотация. В работе с помощью теоремы Крассосельского о неподвижных точках оператора установлены достаточные условия существования по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Для доказательства единственности положительного решения использован принцип сжатых отображений. Приведенные результаты продолжают исследования автора по данной тематике.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR ONE NONLINEAR FRACTIONAL FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

© 2023 G. E. ABDURAGIMOV

ABSTRACT. In this paper, using the Krasnoselsky fixed-point theorem, we establish sufficient conditions for the existence of a positive solution to the boundary-value problem for one nonlinear fractional functional differential equation. To prove the uniqueness of a positive solution, we use the Banach fixed-point theorem. The results presented continue the author's research on this topic.

Keywords and phrases: fractional functional differential equation, positive solution, boundary-value problem, Green's function.

AMS Subject Classification: 34K10

1. Введение. Дифференциальные уравнения дробного порядка или дробные дифференциальные уравнения в последнее время вызывают повышенный интерес, появилось множество книг и статей посвященных дробному исчислению. Возрос интерес, в том числе, к исследованию вопросов существования и единственности положительного решения краевых задач для нелинейных дробно - дифференциальных уравнений. В основе упомянутых исследований, как правило, лежит применение методов нелинейного анализа. В этом отношении отметим некоторые актуальные публикации (см. [2–6]).

Несмотря на достаточно интенсивное развитие теории дробно-дифференциальных уравнений, следует отметить, что работ, в которых рассматривались бы вопросы существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка, сравнительно мало. В данной работе предпринята

попытка восполнить этот пробел. С помощью известной теоремы Го—Красносельского о неподвижной точке положительного оператора получены достаточные условия существования хотя бы одного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Далее на основе принципа сжимающих отображений доказана единственность такого решения. Среди последних исследований автора в этом направлении можно выделить, например, статью [1].

2. Постановка задачи и основные результаты. Введем следующие обозначения: C — пространство $C[0, 1]$, $\mathbb{L}_p$ — пространство $\mathbb{L}_p(0, 1)$, $\mathbb{W}_\alpha^n$ — пространство вещественных функций $D^{\alpha-(n-1)}$, определенных на $[0, 1]$, с абсолютно непрерывной производной порядка $(n-2)$. Рассмотрим краевую задачу

$$D^\alpha x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = x''(0) = \dots x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

$$x'(1) = 0, \quad (3)$$

где $\alpha \in (n-1, n]$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) — некоторое действительное число, D^α — дробная производная Капуто (см. [5]), $T : C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение. Положительным решением задачи (1)–(3) будем называть положительную в интервале $(0, 1)$ функцию $\mathbb{W}_\alpha^n$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2), (3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

где $G(t, s)$ — функция Грина оператора $-D^\alpha x(t)$ с краевыми условиями (2), (3):

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} t - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} t, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция Грина $G(t, s)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $G(t, s) > 0$, $(t, s) \in (0, 1) \times (0, 1)$;
- (ii) $G(t, s) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} G(t, s) = G(1, s)$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$;
- (iii) $G(t, s) \geq \varphi(t)G(1, s)$, $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, где $\varphi(t) = t$.

Предположим, что функция $f(t, u)$ при п.в. $t \in [0, 1]$ и любых неотрицательных u удовлетворяет условию

$$f(t, u) \leq bu^{p/q}, \quad (5)$$

где $b > 0$, $q \in (1, \infty)$. Это позволяет придать уравнению (4) операторный вид $x = GNTx$, где $N : \mathbb{L}_p \rightarrow \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G : \mathbb{L}_q \rightarrow C$.

Очевидно, оператор A , определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций.

Обозначим через $\tilde{K}$ конус неотрицательных функций пространства C , удовлетворяющих условию

$$x(t) \geq \varphi(t)\|x\|_C, \quad t \in [0, 1].$$

Лемма 1. *Оператор A оставляет инвариантным конус $\tilde{K}$.*

Доказательство. В силу свойств (i) и (ii) функции Грина для $x \in \tilde{K}$ и неравенства $(Ax)(t) \geq 0$ на $[0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int_0^1 G(t, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \varphi(t) \int_0^1 G(1, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \\ &\geq \varphi(t) \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(1, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \varphi(t) \|Ax\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда следует $A(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$. $\square$

Легко видеть, что в силу теоремы Арцела—Асколи оператор $A : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ вполне непрерывен.

В дальнейшем для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3) нам понадобится следующая известная теорема Го—Красносельского (см. [7]).

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство и $P \subset X$ — конус в X . Предположим, что Ω_1, Ω_2 — такие открытые подмножества в X , что $\theta \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, и $A : P \rightarrow P$ — такой вполне непрерывный оператор, что выполнено одно из двух условий:*

- (a) $\|Au\| \leq \|u\|$ для всех $u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|Au\| \geq \|u\|$ для всех $u \in P \cap \partial\Omega_2$;
- (b) $\|Au\| \geq \|u\|$ для всех $u \in P \cap \partial\Omega_1$ и $\|Au\| \leq \|u\|$ для всех $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Тогда A имеет неподвижную точку в $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_1\}, \quad \partial\Omega_1 = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C = r_1\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < r_2\}, \quad \partial\Omega_2 = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C = r_2\}, \\ \Omega &= \overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1, \end{aligned}$$

где $0 < r_1 < r_2$.

Теорема 2. *Пусть $p < q$, выполнено неравенство (5) и*

$$f(t, u) \geq a(t)u^{p/q} \quad (6)$$

при п.в. $t \in [0, 1]$ и $u \geq 0$, где $a(t) \in \mathbb{L}_q$ — неотрицательная и не равная тождественно нулю функция. Кроме того, допустим, что

$$\int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds > 0.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Найдем такое число $r_1 > 0$, что при $x \in \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \quad (7)$$

В силу (5) и свойства (ii) функции Грина для $x \in \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_C &= (Ax)(1) = \int_0^1 G(1, s) f(s, (Tx)(s)) ds \leq b \int_0^1 G(1, s) (Tx)^{p/q}(s) ds \leq \\ &\leq b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{p/q} \leq b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{p/q} \|x\|_C^{p/q} = b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{p/q} r_2^{p/q-1} \|x\|_C, \quad (8) \end{aligned}$$

где τ — норма оператора T , $1/q' + 1/q = 1$. Выбрав

$$0 < r_2 \leq \left(\frac{1}{b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}} \right)^{q/(p-q)},$$

легко убедиться в выполнении соотношения (7).

Покажем теперь существование такого числа $r_1 > 0$, что $\|Ax\|_C \geq \|x\|_C$ для всех $x \in \partial\Omega_1$. Воспользовавшись условием (6) теоремы и свойством 2 функции Грина, имеем

$$\begin{aligned} \|Ax\|_C &= (Ax)(1) = \int_0^1 G(1, s) f(s, (Tx)(s)) ds \geq \int_0^1 G(1, s) a(s) (Tx)^{p/q}(s) ds \geq \\ &\geq \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds = r_1^{p/q-1} \int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds \cdot \|x\|_C. \end{aligned} \quad (9)$$

Положив

$$r_1 \geq \left(\int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds \right)^{q/(q-p)},$$

очевидно, приходим к требуемому соотношению.

Таким образом, при соответствующем выборе r и R можно обеспечить выполнение условия (b) теоремы 1, гарантирующее существование у вполне непрерывного оператора A крайней мере одной неподвижной точки в Ω , что в свою очередь равносильно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1)–(3). $\square$

Замечание. В случае $p > q$ с привлечением условия (a) теоремы 1 аналогично можно доказать существование по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3).

Лемма 2. При выполнении условий теоремы 2 оператор A отображает замкнутое множество Ω в себя.

Доказательство. Для $x \in \tilde{K}$, $\|x\|_C \leq r_2$, взяв соответственно

$$0 < r_2 \leq \left(\frac{1}{b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}} \right)^{q/(p-q)}$$

на основании (8) имеем

$$\|Ax\|_C \leq b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}\|x\|_C^{p/q} \leq b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{p/q}r_2^{p/q}\|x\|_C.$$

С другой стороны, взяв в качестве r_1 число, границы которого определены в теореме 2, для $x \in \tilde{K}$, $\|x\|_C \geq r_1$ из (9) получим

$$\|Ax\|_C \geq \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds \geq \int_0^1 G(1, s) a(s) (T\varphi)^{p/q}(s) ds \cdot r_1^{p/q-1} \geq r_1. \quad \square$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Кроме того, предположим, что функция $f(t, u)$ дифференцируема по u , производная $f'_u(t, u)$ монотонно убывает по u и

$$\tau\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < 1, \quad (10)$$

где $\theta(t) = g(t)f'_u(t, r_1(T1)(t))$, $1/p' + 1/p = 1$. Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ ввиду монотонности функции $f'_u(t, u)$ по u и в силу формулы конечных приращений Лагранжа и неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \|Ax_1 - Ax_2\|_C &\leq \int_0^1 G(t, s) |f'_u(s, (T\tilde{x})(s))| |(Ty)(s)| ds \\ &\leq \int_0^1 G(1, s) |f'_u(s, r_1(T1)(s))| |(Ty)(s)| ds \leq \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \tau \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|y\|_C, \end{aligned}$$

где $1/p' + 1/p = 1$, $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$, функция $\tilde{x}(t)$ принимает значения, промежуточные между $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Теперь из принципа сжимающих отображений с учетом леммы 2 и условия (10) теоремы следует, что краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдурагимов Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2023. — 28, № 142. — С. 101–110.
2. Afshari H., Sajjadmanesh M. Solution of some boundary value problems including nonlinear fractional differential equations // Math. Oper. Res. — 2020. — 6. — P. 149–156.
3. Cabada A., Om Kalthoum W. Existence and uniqueness of positive solutions for nonlinear fractional mixed problems // Georgian Math. J. — 2021. — 28, № 6. — P. 843–858.
4. Ibnelaziz L., Guida K., Hilal K., Melliani S. New existence results for nonlinear fractional integrodifferential equations // Adv. Math. Phys. — 2021. — 2021. — 5525591.
5. Li H., Chen Y. Multiple positive solutions for a system of nonlinear Caputo-type fractional differential equations // J. Funct. Spaces. — 2020. — № 2020. — P. 1–10.
6. Marasi H., Aydi Y. Existence and uniqueness results for two-term nonlinear fractional differential equations via a fixed point technique // J. Math. — 2021. — 2021. — 6670176.
7. Zhou W.-X., Zhang J.-G., Li J.-M. Existence of multiple positive solutions for singular boundary value problems of nonlinear fractional differential equations // Adv. Differ. Equ. — 2014. — 2014. — 97.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович

Дагестанский государственный университет, Махачкала

E-mail: gusen_e@mail.ru