ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 70–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-70-77

УДК 517.954

# О ПРЕОБРАЗОВАНИИ, ДВОЙСТВЕННОМ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

© 2024 г. **Л. Н. ЛЯХОВ, В. А. КАЛИТВИН, М. Г. ЛАПШИНА**

Аннотация. Преобразование Радона—Киприянова $K_\gamma$ введено в 1998 г. В теоретических и прикладных исследованиях требуется ввести двойственное (сопряженное) к нему преобразование $K_\gamma^{\#}$. Доказаны теоремы об ограниченности двойственного преобразования в соответствующем подпространстве Л. Шварца основных функций и $K_\gamma^{\#}$-преобразовании свертки функции $g$ с $K_\gamma[f]$-преобразованием при условии, что обе функции $g$ и $f$ принадлежат соответствующим пространствам основных функций.

***Ключевые слова*:** преобразование Радона, преобразование Радона—Киприянова, обобщенный сдвиг Пуассона, обобщенный сдвиг смешанного типа, обобщенная свертка.

# ON THE TRANSFORMATION DUAL TO THE RADON–KIPRIYANOV TRANSFORMATION

© 2024 **L. N. LYAKHOV, V. A. KALITVIN, M. G. LAPSHINA**

Abstract. The Radon–Kipriyanov transformation $K_\gamma$ was introduced in 1998. In various theoretical and applied research, the dual transformation $K_\gamma^{\#}$ is required. We prove theorems on the boundedness of the dual transformation in the corresponding L. Schwarz subspace of test functions and the $K_\gamma^{\#}$-transformation of the convolution of a function $g$ with the $K_\gamma[f]$-transformation, provided that both functions $g$ and $f$ belong to the corresponding spaces of test functions.

***Keywords and phrases*:** Radon transform, Radon–Kipriyanov transform, generalized Poisson shift, generalized mixed type shift, generalized convolution.

***AMS Subject Classification*:** 44A12, 42A38

**1. Некоторые представления преобразования Радона—Киприянова.** В работе И. А. Киприянова и Л. Н. Ляхова [5] было введено «специальное» преобразование Радона, которое в дальнейшем получило название *преобразование Радона—Киприянова* (обозначение $K_\gamma$). Данная работа посвящена нахождению преобразования, двойственного (сопряженного) к $K_\gamma$ — преобразованию в одномерном и многомерном случаях.

*1.1. Определение преобразования Радона—Киприянова* $K_\gamma$. В евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$ рассмотрим полупространство

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, x') : x' = (x_2, \ldots, x_n),\ x_1 > 0\}.$$

Функции $f = f(x)$, определенные на множестве $\mathbb{R}_n^+$, для которых возможно четное продолжение по переменной $x_1$ в $\mathbb{R}_n$, сохраняющее класс своей принадлежности, назовем $x_1$-четными по Киприянову. В случае непрерывно дифференцируемых функций $x_1$-четность по Киприянову означает,

что
$$\left.\frac{\partial^{2m-1} f(x)}{\partial x_1^{2m-1}}\right|_{x_1=0} = 0$$
для любого натурального числа $m$ (см. [4, с. 21]).

Через $S_{\rm ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим подпространство пространства Л. Шварца основных функций, состоящее из $x_1$-четных по Киприянову функций.

Следуя [3], будем использовать следующее определение дельта-функции, сосредоточенной на $(n-1)$-мерной поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n^+$:
$$\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\delta(P(x))\,dx = \int\limits_{P(x)} f(x)\,d\Gamma,$$
где $d\Gamma$ — элемент поверхности $P(x)=0$.

**Определение 1.** Преобразованием Радона—Киприянова функции $f$, следуя [5], будем называть следующую конструкцию:
$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\gamma\,\delta\big(p-\langle x,\xi\rangle\big)\,x_1^\gamma\,dx, \quad \gamma>0, \tag{1}$$
где $\langle x,\xi\rangle$ — скалярное произведение $n$-мерных векторов, и мы полагаем, что $\xi$ — единичный вектор нормали к плоскости (при этом $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости $\langle x,\xi\rangle = p$), а символ $\Pi_{x_1}^\gamma$ обозначает действие оператора Пуассона (см. [6]) по переменной $x_1$:
$$\Pi_{x_1}^\gamma g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g\big(x_1\cos\alpha_1, x_2,\ldots,x_n\big)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha. \tag{2}$$

*1.2. Представление $K_\gamma$-преобразования в евклидовом пространстве вращения вокруг весовой оси координат.* Раскрывая действие оператора Пуассона, получим
$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)C(\gamma)\int\limits_0^\pi \delta\Big(p-\Big\langle(x_1\cos\alpha,x_2,\ldots,x_n),(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\Big\rangle\Big)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,x_1^\gamma dx,$$
где
$$C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$
Рассмотрим евклидово полупространство $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \big\{(z_1,z_2,x_2,\ldots,x_n),\ z_2>0\big\}$, которое получается из исходного полупространства $\mathbb{R}_n^+$ вращением $x_1\to\sqrt{z_1^2+z_2^2}$ на угол $\pi$. Следуя [8], функции $f(x)$, определенной на множестве $\mathbb{R}_n^+$, поставим в соответствие функцию от вращения
$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(z_1,z_2,x') = f\Big(\sqrt{z_1^2+z_2^2},x_2,\ldots,x_n\Big),$$
где $z=(z_1,z_2,x')\in\mathbb{R}_{n+1}^+$, $x'=(x_2,\ldots,x_n)$. Функция $\widetilde{f}(z)$ определена в области $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z: z_2>0\}$. Введем антиполярные координаты
$$z_1 = x_1\cos\alpha, \quad z_2 = x_1\sin\alpha;$$
так как $0<\alpha<\pi$ и $x_1>0$, то $-\infty<z_1<+\infty$, $0<z_2<+\infty$. При этом
$$x_1^{\gamma-1}\sin^{\gamma-1}\alpha = z_2^{\gamma-1}, \quad x_1\,dx_1\,d\alpha\,dx' = dz.$$
Следовательно,
$$K_\gamma[f](\xi;p) = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_{n+1}^+}\widetilde{f}(z)\delta(p-\langle z,\tilde{\xi}\rangle)z_2^{\gamma-1}\,dz. \tag{3}$$

Здесь $\langle z,\tilde\xi\rangle$ — скалярное произведение $(n+1)$-мерных векторов $z=(z_1,z_2,x')$ и $\tilde\xi=(\xi_1,0,\xi')$, где $\xi'=\xi_2,\dots,\xi_n$, а $p=\langle z,\tilde\xi\rangle$ — уравнение гиперплоскости, параллельной координатной оси $Oz_2$.

Представление (3) есть представление преобразования Радона—Киприянова в виде специального весового преобразования Радона.

Воспользовавшись определением $\delta$-функции, сосредоточенной на гиперплоскости $p=\langle z,\tilde\xi\rangle$, получим

$$K_\gamma[f](\xi;p)=C(\gamma)\int\limits_{\{p=\langle z,\tilde\xi\rangle\}^+}\widetilde{f}(z)z_2^{\gamma-1}\,d\Gamma(z),\tag{4}$$

где $\{\langle z,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$ — часть гиперплоскости в $\mathbb{R}^+_{n+1}$, определяемая неравенством $z_2>0$, $d\Gamma(z)$ — элемент этой гиперплоскости. Как обычно (см. [1,2,11]), ориентация гиперплоскости $\{\langle z,\widetilde{\xi}\rangle=p\}^+$ выбрана так, чтобы она являлась границей полупространства $\{\langle z,\widetilde{\xi}\rangle<p\}^+$.

*1.3. Представление $K_\gamma$-преобразования в локальных координатах касательной плоскости.* Важно отметить, что указанное выше вращение евклидова пространства вокруг оси $Ox_1$ сводит преобразование Радона—Киприянова (1) к *весовому преобразованию Радона* (3) в $\mathbb{R}^+_{n+1}$, представляющему собой интеграл по гиперплоскости параллельной координатной оси $Oz_2$.

Принадлежность оси координат $Oz_2$ гиперплоскости $\langle z,\widetilde{\xi}\rangle=0$ порождает локальную систему координат, в которой одной из координатных осей является ось $Oz_2$. Другие оси декартовой системы координат на этой плоскости выберем лежащими в линии пересечения гиперплоскости $z_2=0$ с гиперплоскостью $\langle z,\widetilde{\xi}\rangle=0$. Этот набор координатных осей обозначим $y'=(y_2,\dots,y_n)$. Ясно, что гиперплоскость интегрирования является линейным многообразием размерности $n$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^+_{n+1}$. Точки гиперплоскости интегрирования в $\mathbb{R}^+_{n+1}$ имеют следующие локальные координаты: $(z_2,y',p)$, $y'=(y_2,\dots,y_n)$, а $|p|$ — расстояние от гиперплоскости до начала координат.

Множество касательных плоскостей к сфере, проходящих через ее центр, называется касательным расслоением сферы. Каждая плоскость касательного расслоения перпендикулярна соответствующему вектору нормали $\widetilde{\xi}$, лежащему в координатной гиперплоскости $z_2=0$. Мы фиксируем нормаль $\xi$ исходной гиперплоскости интегрирования в определении преобразования Радона—Киприянова (1) и (4) и обозначаем исходную гиперплоскость интегрирования символом $\xi^\perp$. В евклидовом полупространстве «вращения» $\mathbb{R}^+_{n+1}$ вектором нормали к плоскости интегрирования является вектор $\widetilde{\xi}=(\xi_1,0,\xi_2,\dots,\xi_n)=(\xi_1,0,\xi')$. В конструкции (4) эту гиперплоскость в $\mathbb{R}^+_{n+1}$ обозначим тем же символом $\xi^\perp$.

Итак, имеем следующую систему локальных координат в евклидовом полупространстве $\mathbb{R}^+_{n+1}$:

$$y=(z_2,y',p),\quad y_\perp=(z_2,y',0),\quad \widetilde{\xi}=(0,0,\dots,0,1),\quad \widetilde{\xi}\cdot p=(0,0,\dots,p).\tag{5}$$

Используя эти обозначения переменных, формулы (3) и (4) можем записать в виде интеграла по плоскости $\xi^\perp$, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $\widetilde{\xi}$, в виде

$$K_\gamma[f](\xi,p)=C(\gamma)\int\limits_{\xi^\perp}\widetilde{f}\left(\widetilde{\xi}p+y_\perp\right)\,z_2^{\gamma-1}\,d\Gamma(y_\perp).\tag{6}$$

**2. Основные результаты.** Оператор, двойственный $K_\gamma$, получен интегрированием по $\mathbb{R}^+_1$ по переменной $p$ (теорема 1) и интегрированием по евклидову полупространству $\mathbb{R}^+_n$ (теорема 2). Последнее получено дополнительным интегрированием по поверхности сферы в $\mathbb{R}^+_n$ при условии, что $p$ — радиальная переменная. Двойственное преобразование $K^{\#}_{\gamma,\xi}$ определено в следующем утверждении.

**Теорема 1.** *Для функций $f\in S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_n)$ и $g\in S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_1)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1}K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp=\int\limits_{\mathbb{R}^+_n}f(x)\,K^{\#}_{\xi,\gamma}g(x)\,x_1^\gamma dx_1\,dx',$$

*где*

$$K^{\#}_{\gamma,\xi}g(x) = \Pi^{\gamma}_{x_1}\big(g(\langle\xi,x\rangle)\big). \tag{7}$$

*Равенство* (7) *равносильно равенству*

$$K^{\#}_{\gamma,\xi}g(x) = \Pi^{\gamma}_{\xi_1}\big(g(\langle\xi,x\rangle)\big).$$

**Следствие 1.** *Пусть* $f \in S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_n)$ *и* $g \in S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_1)$. *Тогда*

$$\int\limits_{S_1(n)}\int\limits_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp\,dS(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} f(x)\,K^{\#}_{\gamma}g(x)\,x_1^\gamma\,dx_1\,d\,dx',$$

*где*

$$K^{\#}_{\gamma}g(x) = \int\limits_{S_1(n)} \Pi_{x_1}\Big(g\big(\xi,\langle\xi,x\rangle\big)\Big)\,dS(\xi). \tag{8}$$

*Равенство* (8) *эквивалентно равенству*

$$K^{\#}_{\gamma}g(x) = C(\gamma)\int\limits_{S_1(n)} \Pi_{\xi_1}\Big(g\big(\xi,\langle\xi,x\rangle\big)\Big)\,dS(\xi). \tag{9}$$

**Теорема 2.** *Для функции* $f$ *и* $g$, *принадлежащих пространству основных функций* $S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_n)$, *справедлива следующая формула*:

$$K^{\#}_{\gamma}\big(g * K_\gamma[f]\big) = \big(K^{\#}_{\gamma}g * f\big)_\gamma. \tag{10}$$

## 3. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова.

*3.1. Доказательство теоремы* 1. Пусть $g = g(p) \in S_{\rm ev}(\mathbb{R}^+_1)$. Рассмотрим следующую линейную форму от произведения преобразования Радона—Киприянова на функцию $g(p) \in S_{\rm ev}$, $p \in \mathbb{R}^+_1$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_1} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_1} g(p)\,dp\int\limits_{\xi^\perp} \widetilde{f}\big(\widetilde{\xi}\,p + y_\perp\big)\,z_2^{\gamma-1}d\Gamma(y_\perp); \tag{11}$$

внутренний интеграл записан в локальной системе координат (5). Здесь $\widetilde{\xi}\,p + y_\perp = (z_2, y', p) = y$ — $(n+1)$-мерный вектор. Замена переменных

$$z = \widetilde{\xi}\,p + y_\perp \quad\Longrightarrow\quad p = \langle z, \widetilde{\xi}\rangle,$$

имеет якобиан, равный $\dfrac{D(z)}{D(y_\perp + p\widetilde{\xi})} = \dfrac{D(z)}{D(y)} = 1$), и приводит выражение (11) к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+_1} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}\int\limits_{\xi^\perp} \widetilde{f}(z)\,z_2^{\gamma-1}\,d\Gamma(y_\perp)g(\langle z,\widetilde{\xi}\rangle)\,dp. \tag{12}$$

Учитывая, что гиперплоскость $\xi^\perp$ определена в евклидовом полупространстве $x_2 > 0$, выражение (12) запишем в координатах пространства вращений $\mathbb{R}^+_{n+1}$ (имеются в виду первоначальные координаты $z = (z_1, z_2, x')$), т.е. в следующем виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}} \widetilde{f}(z)\,g\big(\langle\widetilde{\xi},z\rangle\big)\,z_2^{\gamma-1}dz_1\,dz_2\,dx'.$$

Здесь скалярное произведение $(n+1)$-мерных векторов совпадает со скалярным произведением $n$-мерных векторов: $\langle\widetilde{\xi},z\rangle = \langle\xi,x\rangle$. Поэтому, введя цилиндрические координаты

$$z_1 = x_1\cos\alpha, \quad z_2 = x_1\sin\alpha, \quad x' = x', \quad 0 < \alpha < \pi, \quad dz_1\,dz_2\,dx' = x_1\,dx_1\,d\alpha\,dx',$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp = C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\int\limits_0^\pi g\Big(Big\langle\xi,(x_1\cos\alpha,x')Bnb\rangle\Big)\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,x_1^\gamma\,dx_1\,d\,dx'.$$

Воспользовавшись определением оператора Пуассона (2) и видом константы $C(\gamma)$, это выражение можем записать в сокращенной форме:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\gamma g\big(\langle\xi,x\rangle\big)\,x_1^\gamma dx_1\,dx' = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{\xi_1}^\gamma g\big(\langle\xi,x\rangle\big)\,x_1^\gamma dx_1\,dx'.$$

Теперь, введя обозначения

$$K^{\#}_{\gamma,\xi}g(x) = \Pi_{x_1}^\gamma g\big(\langle\xi,x\rangle\big) \quad \text{или} \quad K^{\#}_{\gamma,\xi}g(x) = \Pi_{\xi_1}^\gamma g\big(\langle\xi,x\rangle\big),$$

получим (10).

**Определение 2.** *Двойственным оператором* к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_1^+$ называется оператор $K^{\#}_{\gamma,\xi}$.

*Доказательство следствия* 1. Вернемся к равенству (4). Интегрирование по $n$-мерной сфере $S_1(n)=\{\xi:|\xi|=1\}$ приведет к равенству

$$\int\limits_{S_1(n)}\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} K_\gamma[f](\xi,p)\,g(p)\,dp\,dS(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\,\Pi_{x_1}^\gamma\left(\int\limits_{S_1(n)} g\big(\langle\xi,x\rangle\big)\,dS(\xi)\right)\,x_1^\gamma dx_1\,d\,dx'.$$

Остается воспользоваться обозначением (8) или (9). □

**Определение 3.** *Двойственным оператором* к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n^+$ называется оператор $K^{\#}_\gamma$.

**4. $K^{\#}_\gamma$-Преобразование свертки функций с $K_\gamma$-преобразованием.** Свертка радиальных функций в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ определяется по формуле (см. [7,9])

$$(f*g)(|x|) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(|y|)g(|x-y|)\,dy = |S_1(n)|\int\limits_{\mathbb{R}_1} f(r)\,T^r g(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho, \quad r=|x|, \quad \rho=|y|,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}_n$, $T^x$ — обобщенный сдвиг Пуассона:

$$T^\rho v(r) = C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g\left(\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\,\cos\beta}\right)\sin^{n-2}\beta\,d\beta.$$

Для произвольного числа $\gamma>0$ *обобщенной сверткой Пуассона* (сверткой Пуассона) называется выражение (см. [4,6])

$$(u*v)_\gamma(\rho) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} u(r)\,T^\rho v(r)\,r^\gamma dr, \quad \gamma>0,$$

где

$$T^\rho v(r) = C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi g\left(\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\,\cos\beta}\right)\sin^{\gamma-1}\beta\,d\beta.$$

Для цели наших исследований мы используем обобщенный сдвиг смешанного типа, определенный при $\gamma > 0$ в [4] формулой

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\alpha},\, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n\right)\, \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha.$$

Преобразование Радона—Киприянова обобщенной свертки основных функций $S_{\mathrm{ev}}$ определено в [8] следующим равенством:

$$K_\gamma[(f * g)_\gamma](\xi, p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\xi, t)\, K_\gamma[g](\xi, p-t) dt.$$

Таким образом, преобразование Радона—Киприянова свертки Пуассона оказывается одномерной (и обычной) сверткой преобразований Радона—Киприянова свертывателей. Похожее свойство проявляется для преобразования двойственного к преобразованию Радона—Киприянова.

*4.1. Доказательство теоремы* 2. Пусть функции $f$ и $g$ принадлежат пространству основных функций $S_{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}_n^+)$. Докажем справедливость равенства (10), т.е.

$$\left(K_\gamma^{\#} g * f\right)_\gamma = K_\gamma^{\#}\left(g * K_\gamma[f]\right).$$

Воспользуемся представлением действия оператора $K_\gamma^{\#}$ по формуле (8). Имеем

$$\left(K_\gamma^{\#} * f\right)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} T_y^x K_\gamma^{\#}\Big[\Pi_{\xi_1}^\gamma g\big(\xi; \langle y, \xi\rangle\big)\Big] f(y) y_1^\gamma dy = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \int\limits_{\mathbb{S}_1(n)} T_y^x \Pi_{\xi_1}^\gamma g\big(\xi; \langle y, \xi\rangle\big)\, dS(\xi) \cdot f(y) y_1^\gamma dy.$$

Здесь оператор обобщенного сдвига и оператор Пуассона действуют по разным переменным, поэтому, воспользовавшись перестановочностью обобщенного сдвига в весовой билинейной форме с показателем веса $x^\gamma$, имеем

$$\left(K_\gamma^{\#} g * f\right)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} K_\gamma^{\#} g(y)\, T^x f(y)\, y_1^\gamma\, dy.$$

Согласно определению (9) оператора $K_\gamma^{\#}$ получим

$$\left(K_\gamma^{\#} g * f\right)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} T^x f(y) \left( \int\limits_{S_1(n)^+} \Pi_{y_1}^\gamma\, g\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big)\, dS(\xi) \right) y_1^\gamma\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} T^x f(y) \int\limits_{S_1(n)^+} G\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big)\; dS(\xi)\, y_1^\gamma\, dy,$$

где введено обозначение

$$G\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big) = \Pi_{y_1}^\gamma g\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big).$$

Каждая из функций $f$ и $g$ принадлежат основному классу функций, поэтому можно применить теорему Лебега о перестановке пределов интегрирования. В результате получим равенство

$$\left(K_\gamma^{\#} g * f\right)_\gamma = \int\limits_{S_1(n)^+} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} G\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big)\, T^x f(y)\, y_1^\gamma\, dy\, dS(\xi).$$

Учитывая действие оператора Пуассона (2), запишем

$$G\big(\xi, \langle y, \xi\rangle\big) = C(\gamma) \int\limits_0^\pi g\big(\xi, y_1\xi_1 \cos\beta + y_2\xi_2 + \ldots, y_n\xi_n\big)\, \sin^{\gamma-1}\beta\, d\beta. \tag{13}$$

Как в доказательстве теоремы 1, воспользуемся процедурой вращения. При этом учтем, что

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos\alpha}=\sqrt{(x_1-y_1\cos\alpha)^2+y_1^2\sin^2\alpha},$$

и векторы размерности $n-1$, участвующие в скалярном произведении $\langle y,\xi\rangle$, транслируются в векторы размерности $n$ и имеют следующие координаты:

$$y\to\widetilde{z}=(z_1,0,y'),\quad \xi\to\widetilde{\xi}=(\xi_1,0,\xi').$$

В результате получим

$$\big(K_\gamma^{\#}g*f\big)_\gamma(x)=\int\limits_{S_1(n)^+}\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}}\widetilde{f}(\tilde{x}-z)\,G\big(\xi,\langle z,\widetilde{\xi}\rangle\big)\,z_2^{\gamma-1}\,dz\,dS(\xi),$$

где $z=(z_1,z_2,y')$, $\tilde{x}=(x_1,0,x_2,\ldots,x_n)$ и поэтому $\tilde{x}-z=(x_1-z_1,z_2,x'-y')$. Введем $n$-мерные локальные координаты

$$\widetilde{\xi}=(0,0,\ldots,1),\quad \widetilde{\xi}\cdot p=(0,0,\ldots,p),\quad y_\perp=(z_2,y',0),\quad y=(z_2,y',p).$$

Произведем замену переменных

$$z=\tilde{x}-\zeta-s\tilde{\xi},\quad \tilde{x}-z=s\tilde{\xi}+\zeta,\quad\text{где}\quad \zeta=(\zeta_1,z_2,\zeta_3,\ldots,\zeta_n)\in\tilde{\xi}^\perp.$$

Якобиан этой замены равен $\dfrac{D(z)}{D(p,\zeta)}=1$, и мы имеем

$$\big(K_\gamma^{\#}g*f\big)_\gamma(x)=\int\limits_{S_1(n)^+}\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}\int\limits_{\tilde{\xi}^\perp}\widetilde{f}(s\tilde{\xi}+\zeta)\,z_2^{\gamma-1}\,d\zeta\,G\big(\xi,\langle\widetilde{x},\widetilde{\xi}\rangle-s\big)ds\,dS(\xi).$$

Здесь внутренний интеграл есть преобразование Радона—Киприянова, записанное в виде интеграла по касательной плоскости $\xi^\perp$ (см. формулу (6)). Следовательно,

$$\big(K_\gamma^{\#}g*f\big)_\gamma(x)=\int\limits_{S_1(n)^+}\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}K_\gamma[f](\xi,s)\,G(\xi,p-s)\,ds\,dS(\xi)=$$

$$=\int\limits_{S_1(n)^+}\int\limits_{\mathbb{R}^+_1}\Big(K_\gamma[f](\xi,s)\,\Pi^\gamma_{x_1}g(\xi,p-s)\Big)\,ds\,dS(\xi).$$

В последнем равенстве воспользовались обозначением (13). Но $\langle\widetilde{x},\widetilde{\xi}\rangle=\langle x,\xi\rangle$, поэтому внутренний интеграл представляет собой классическую свертку по переменной $p$. В результате

$$\big(K_\gamma^{\#}g*f\big)_\gamma(x)=\int\limits_{S_1(n)^+}\Pi^\gamma_{x_1}\Big(K_\gamma[f](\xi,p)*g(\xi,p)\Big)\,dS(\xi).$$

Полученное выражение есть двойственный оператор к преобразованию Радона—Киприянова от свертки функций по переменной $p$, т.е.

$$\big(K_\gamma^{\#}g*f\big)_\gamma(x)=K_\gamma{}^{\#}\Big(K_\gamma(\xi,p)*g(\xi,p)\Big).$$

Доказательство закончено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: Добросвет, 2007.
2. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
3. *Гельфанд И. М., Шапиро З. Я.* Однородные функции и их приложения// Усп. мат. наук. — 1955. — *10*, № 3. — С. 3–70.
4. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.

5. *Киприянов И. А., Ляхов Л. Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. АН СССР. — 1998. — *360*, № 2. — С. 157–160.
6. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2 (42). — С. 102–143.
7. *Ляхов Л. Н.* О преобразовании Радона—Киприянова сферически симметричных функций// Докл. РАН. — 2008. — *419*, № 3. — С. 315–319.
8. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Киприянова—Радона// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — *248*. — С. 144–152.
9. *Ляхов Л. Н.* Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена—Никольского для $j$-бесселевых интегралов Фурье// Тр. Моск. мат. о-ва. — 2015. — *76*, № 1. — С. 67–84.
10. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 4. — С. 527–537.
11. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.


## ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ


**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.



Ляхов Лев Николаевич (Lyakhov Lev Nikolaevich)
Воронежский государственный университет;
Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского
(Voronezh State University, Voronezh, Russia;
Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)
E-mail: levnlya@mail.ru

Калитвин Владимир Анатольевич (Kalitvin Vladimir Anatolievich)
Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского
(Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)
E-mail: kalitvin@gmail.com

Лапшина Марина Геннадьевна (Lapshina Marina Gennadievna)
Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского
(Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia)
E-mail: marina.lapsh@ya.ru