ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 115–122
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-115-122

УДК 517.956.22, 517.956.8

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© 2023 г. **С. М. СИТНИК**

Аннотация. В 1982 г. Е. М. Ландисом была поставлена задача о точных оценках экспоненциальной скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера. Эта задача в первоначальной постановке через несколько лет была решена Воронежским математиком В. З. Мешковым. Он построил пример решения, которое на бесконечности убывает сверхлинейно, что даёт отрицательный ответ на первоначальный вопрос в задаче Е. М. Ландиса. В данной работе доказано, что для некоторых потенциалов специального вида тем не менее ответ на вопрос в задаче Е. М. Ландиса оказывается положительным. Рассмотрены также некоторые обобщения и современные результаты в этом направлении.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шрёдингера, оператор Штурма—Лиувилля, оператор преобразования, задача Ландиса, априорная оценка, ряд Неймана, функция Бесселя.

ON THE DECAY RATE OF SOLUTIONS TO THE STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH A POTENTIAL DEPENDING ON ONE VARIABLE

© 2023 **S. M. SITNIK**

Abstract. In 1982, E. M. Landis posed the problem of exact estimates for the exponential decay rate of solutions to the stationary Schrödinger equation. A few years later, this problem in its original formulation was solved by the Voronezh mathematician V. Z. Meshkov. He constructed an example of a solution that decreases superlinearly at infinity, which gives a negative answer to the original question in Landis' problem. In this paper, we prove that for some potentials of a special form, nevertheless, the answer to the question in Landis' problem may be positive. Some generalizations and modern results in this direction are also presented.

Keywords and phrases: stationary Schrödinger equation, Sturm–Liouville operator, transformation operator, Landis problem, a priori estimate, Neumann series, Bessel function.

AMS Subject Classification: 35A22, 35B40

1. Введение. В заметке Е. М. Ландиса [10] поставлена следующая задача: доказать, что решение стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\begin{gathered}\Delta u(x) - q(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geqslant R_0 > 0,\\ |q(x)| \leqslant \lambda^2, \quad \lambda > 0, \quad u(x) \in C^2(|x| \geqslant R_0),\end{gathered} \tag{1}$$

удовлетворяющее оценке вида

$$|u(x)| \leqslant \mathrm{const} \cdot e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}, \quad \varepsilon > 0,$$

тождественно равно нулю.

В. З. Мешков в известных работах [6,7] дал отрицательный ответ на данный вопрос. При этом было доказано существование контрпримеров с решениями, которые являются комплексными функциями. Более того, было показано, что если усилить оценку в гипотезе Е. М. Ландиса до следующей:

$$|u(x)| \leqslant \mathrm{const} \cdot e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|^{4/3}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то ответ будет положительным: таких ненулевых решений не существует. В последнее время интерес к этим результатам не пропал, тематика, связанная с гипотезой Е. М. Ландиса и результатами В. З. Мешкова, активно развивается, причём в том числе и ведущими математиками в области дифференциальных уравнений: Ж. Бургейном, К. Кёнигом и рядом других (см. [13,15,17,18,21]). Основным вопросом остаётся исследование гипотезы Е. М. Ландиса для действительных решений, причём ответ на этот вопрос до сих пор не удалось получить. В связи с вышеизложенным представляется обоснованным название *задача Ландиса—Мешкова* в следующей формулировке.

Задача Ландиса—Мешкова. *Верно ли, что для заданных области D и положительных функций $r(x)$, $s(x)$ только нулевое классическое решение стационарного уравнения Шрёдингера*

$$\Delta u(x) - q(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |q(x)| \leqslant r(x), \tag{2}$$

удовлетворяет оценке

$$|u(x)| \leqslant s(x)? \tag{3}$$

Из результатов В. З. Мешкова следует отрицательный ответ в случае комплексных решений, когда D — внешность некоторого круга, $q(x) = \lambda^2$, $s(x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}$, $\varepsilon > 0$, и положительный ответ в случае комплексных решений, если D — внешность некоторого круга, $q(x) = \lambda^2$, $s(x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|^{4/3}}$, $\varepsilon > 0$. Для действительных решений даже в этих частных случаях ответы неизвестны.

Далее будет показано, что несмотря на общее отрицательной решение В. З. Мешкова для первоначальной формулировки задачи Е. М. Ландиса, тем не менее для некоторых классов потенциалов проблема решается положительно, причём для действительных решений. При этом используется метод операторов преобразования специального вида (см. [3, 11, 12, 22]).

Далее эта задача решена для случая потенциала, зависящего только от одной переменной: $q(x) = q(x_i)$, где $1 \leqslant i \leqslant n$; далее для определённости считаем, что $i = 1$. Для этого случая в работе доказано обобщение утверждения (1) для уравнения

$$\Delta u - q(x_1)u = 0, \tag{4}$$

в котором потенциал $q(x_1)$ ограничен произвольной неубывающей функцией. Решение основано на использовании операторов преобразования, сводящих уравнение (4) к уравнению Лапласа.

2. Применение операторов преобразования.

2.1. Условия задачи (1) выполнены в полупространстве $x_1 \geqslant R_0$ и инвариантны относительно замены переменных $z = x_1 - R_0$. Поэтому будем рассматривать задачу (1) в полупространстве $z \geqslant 0$ или, сохраняя для переменной x_1 прежнее обозначение, $x_1 \geqslant 0$. Будет доказано, что решение задачи (1) равно нулю в полупространстве $x_1 \geqslant 0$, а тогда в силу теоремы Кальдерона о единственности продолжения (см. [9, гл. 6, с. 14]) такое решение тождественно равно нулю во всём пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $T(\delta)$ множество функций, удовлетворяющих следующим условиям (5)–(7) в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1 \geqslant 0\}$:

$$u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n_+), \tag{5}$$

$$\bigl|u(x)\bigr| \leqslant c_1\, e^{-\delta|x|}, \quad \delta > 0, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c_2\, e^{-\delta|x|}. \tag{7}$$

Построим для функций из $T(\lambda+\varepsilon)$ такой оператор преобразования

$$Su(x) = u(x) + \int\limits_{x_1}^{\infty} K(x_1,t)u(t,x')\,dt \tag{8}$$

(см. [3, 11, 12, 22]), чтобы выполнялось равенство

$$S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - q(x_1)u\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}Su, \quad |q(x_1)| \leqslant \lambda^2, \tag{9}$$

где, как обычно, через (x_1, x') обозначено $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Подстановка выражения (8) в формулу (9) приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial x_1^2} = q(t)K, \tag{10}$$

$$3\frac{\partial K(x_1,x_1)}{\partial x_1} = q(x_1), \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} K(x_1,t)\frac{\partial u(t,x_1)}{\partial t} - \lim_{t\to\infty}\frac{\partial K(x_1,t)}{\partial t}u(t,x_1) = 0. \tag{12}$$

Выполняя стандартную замену переменных

$$w = \frac{t+x_1}{2}, \quad v = \frac{t-x_1}{2},$$

сведем систему (10)-(11) к более простой (выполнение условия (12) на решениях задачи (1) будет показано позже):

$$\frac{\partial^2 K}{\partial w \partial v} = q(w+v)K, \tag{13}$$

$$K(w,0) = \frac{1}{3}\int\limits_0^w q(s)\,ds, \tag{14}$$

которая, в свою очередь, является следствием интегрального уравнения

$$K(w,v) = \frac{1}{3}\int\limits_0^w q(s)\,ds + \int\limits_0^w d\alpha \int\limits_0^v q(\alpha+\beta)K(\alpha,\beta)\,d\beta, \quad |q| \leqslant \lambda^2, \quad w \geqslant v \geqslant 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) отличается от обычно используемого при рассмотрении операторов преобразования на бесконечном интервале интегрального уравнения изменением области интегрирования с полуоси (w,∞) на отрезок $(0,w)$, что влечёт экспоненциальный рост ядра $K(x_1,t)$. Далее доказывается, что такое ядро существует и оператор преобразования с таким ядром (8) определён на множестве $T(\lambda+\varepsilon)$. Возможность сведения задачи (10)–(12) к неэквивалентным интегральным уравнениям вытекает из недоопределённости задачи Коши (13)-(14).

Следует отметить, что интегральное уравнение (15) должно быть решено в более широкой области без ограничений $w \geqslant v$, иначе не будет определено ядро под знаками интегралов. Доказательство существования решения в этой более широкой области проводится так же, как приведённое ниже доказательство. На этот нюанс при доказательстве существования решения интегрального уравнения (15) обычно не обращают внимания (замечание А. В. Боровских).

Лемма 1. *Существует единственное непрерывное решение уравнения* (15)*, удовлетворяющее неравенству*

$$|K(w,v)| \leqslant \frac{\lambda}{3}\sqrt{\frac{w}{v}}\,I_1(2\lambda\sqrt{wv}), \tag{16}$$

где $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя. При этом на допустимом потенциале $q(x_1) \equiv \lambda^2$ в (16) *достигается знак равенства.*

Замечание 1. В дальнейшем символом c обозначаются абсолютные положительные постоянные, величина которых не играет роли.

Доказательство. Введём обозначения

$$K_0(w,v) = \frac{1}{3}\int_0^w q(s)\,ds, \quad PK(w,v) = \int_0^w d\alpha \int_0^v q(\alpha+\beta)K(\alpha+\beta)\,d\beta.$$

Тогда уравнение (15) запишется в виде $K = K_0 + PK$. Будем искать его решение в виде ряда Неймана

$$K = K_0 + PK_0 + P^2K_0 + \dots . \tag{17}$$

Для слагаемых ряда (17) с учётом условия $|q(x_1)| \leqslant \lambda^2$ получаем

$$\left|P^n K_0(w_0 v)\right| \leqslant \frac{1}{3}(\lambda^2)^{n+1}\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}\frac{v^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\dots . \tag{18}$$

Отсюда вытекает неравенство (16), если использовать представление функции $I_1(x)$ в виде ряда

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Оценка (16) является точной, так как при $q(x_1) \equiv \lambda^2$, неравенства (18) превращаются в равенства для всех целых $n \geqslant 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *В терминах переменных x_1, t справедлива оценка*

$$\left|K(x_1,t)\right| \leqslant c\,t\,e^{\lambda t}.$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\left|\frac{1}{x}I_1(x)\right| \leqslant c\,e^x, \quad x \geqslant 0,$$

для проверки истинности которого надо разобрать случаи (i) $x \geqslant 1$, (ii) $0 \leqslant x \leqslant 1$ и использовать известную асимптотику функции $I_1(x)$ при $x \to \infty$ и $x \to +0$ (см. [2]). Отсюда с помощью очевидных неравенств

$$\frac{x_1+t}{2} \leqslant t, \quad 2\sqrt{wv} = \sqrt{t^2 - x_1^2} \leqslant t$$

из оценки (16) следует утверждение леммы. □

Из леммы 2 следует, что выражение (8) определено на функциях из $T(\lambda+\varepsilon)$. Покажем, что выражение (8) в действительности задаёт оператор преобразования на $T(\lambda+\varepsilon)$. Для этого осталось проверить соотношение (12). Из того, что $u(x) \in T(\lambda+\varepsilon)$ и из леммы вытекает равенство

$$\lim_{t\to\infty} K(x_1,t)\frac{\partial u(t,x_1)}{\partial t} = 0.$$

Поэтому осталось доказать, что если $u(x) \in T(\lambda+\varepsilon)$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial K(x_1,t)}{\partial t}u(x_1,t) = 0.$$

Последнее соотношение следует из оценки

$$\left|\frac{\partial K(x_1,t)}{\partial t}\right| \leqslant c\,t\,e^{\lambda t}. \tag{19}$$

Для доказательства неравенства (19) нужно перейти к переменным w, v и с использованием уже установленных оценок для ядра $K(x_1,t)$ оценить производные $\partial K/\partial w$, $\partial K/\partial v$, дифференцируя уравнение (15). Так как

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial K}{\partial w} + \frac{\partial K}{\partial v}\right),$$

то мы придём к (19).

2.2. Покажем, что любое решение задачи (1) принадлежит $T(\lambda+\varepsilon)$ и, следовательно, на таких решениях определён оператор (8). Для этого необходимо проверить выполнение условия (7).

Лемма 3. *Пусть функция $u(x) \in C^2(|x| \geqslant R_0)$ является решением задачи* (1)*. Тогда найдётся такая постоянная $c > 0$, что*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Доказательство. В силу априорных оценок Шаудера в замкнутом шаре $B(x,1)$ единичного радиуса с центром в точке x, $|x| \geqslant R_0+1$, имеем (см. [8, теорема 33, II])

$$u_1 \leqslant c\Big({u_{1,\lambda}}^{1/(1+\lambda)} \cdot {u_0}^{\lambda/(\lambda+1)} + u_0\Big),$$

где введены обозначения

$$u_0 = \|u(x)\|_{C^0(B(x,1))}, \quad u_1 = \|u(x)\|_{C^1(B(x,1))};$$

$u_{1,\lambda}$ есть сумма коэффициентов Гёльдера функции $u(x)$ и её производных первого порядка $\partial u/\partial x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right| \leqslant c\Big({u_{1,\lambda}}^{1/(1+\lambda)} \cdot {u_0}^{\lambda/(\lambda+1)} + u_0\Big). \tag{20}$$

Отметим, что поскольку выполнены все условия из [8, утверждение 33, V], то константа c в формуле (20) не зависит от x.

Из результатов Морри (см. [9, теорема 39, IV]) вытекает оценка для величины u_{1,λ_1}:

$$u_{1,\lambda} \leqslant c\Big[\|u\|_{L_2(B(x,1))} + \|qu\|_{L_2(B(x,1))}\Big], \tag{21}$$

причём постоянная в (21) по-прежнему не зависит от x. Из условий задачи $|q(x_1)| \leqslant \lambda^2$, следовательно, с помощью теоремы о среднем получаем из (21)

$$u_{1,\lambda_1} \leqslant c\Bigg(\int\limits_{B(x,1)} |u(y)|^2\, dy\Bigg)^{1/2} \leqslant c^1\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Подставляя последнее неравенство в (20), получаем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \leqslant c\left[\big(e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}\big)^{\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}} + e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}\right] \leqslant c\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}.$$

Таким образом, требуемое неравенство установлено для $|x_1| \geqslant R_0+1$. Так как множество $R_0 \leqslant |x| \leqslant R_0+1$ является компактом в $\mathbb{R}^n$, то это неравенство справедливо и при $|x| \geqslant R_0$. Лемма 3 доказана. □

Выполняя опять замену координат $z = x_1 - R_0$, получаем, что лемма 3 справедлива в полупространстве $x_1 \geqslant 0$ (мы переобозначим z через x_1).

2.3. Применим к уравнению (4) оператор S. Из тождества (9) и перестановочности S с производными $\partial^2 u/\partial x_i^2$, $2 \leqslant i \leqslant n$, получаем, что в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$

$$S(\Delta u - q(x_1)u) = \Delta S u = 0.$$

Обозначим функцию Su через v. Из (8), (15) следует, что если $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$, $q(x) \in C(\mathbb{R}^n_+)$, то $v(x) \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$. Покажем, что $v(x)$ экспоненциально убывает в $\mathbb{R}^n_+$ при $|x| \to \infty$ и, следовательно, равна нулю.

Лемма 4. *Пусть $u(x) \in T(\lambda+\varepsilon)$. Тогда для $x \in \mathbb{R}^n_+$*

$$|v| = |Su| \leqslant c\,|x|\, e^{-\varepsilon|x|}, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Из представления (8) и леммы 3 получаем

$$|Su| \leqslant |u(x)| + \int\limits_{x_1}^{\infty} t\, e^{\lambda t} c\, e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x_1|^2}}\, dt \leqslant c\left(e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|} + \int\limits_{x_1}^{\infty} t\, e^{-(\lambda+\varepsilon)\sqrt{t^2+|x_1|^2}}\, dt\right).$$

Вычисляя интеграл с помощью замены переменных по формуле $y = \sqrt{t^2+|x_1|^2}$ с последующим интегрированием по частям, получаем требуемую оценку. Лемма доказана. $\square$

Итак, $v(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n_+$. Определим на $T(\lambda+\varepsilon)$ обратный к S оператор P по формуле

$$Pu(x) = u(x) + \int\limits_{x_1}^{\infty} N(x_1, t) u(t, x_1)\, dt.$$

Тогда для ядра $N(x_1, t)$ справедливы леммы 1–3. Кроме того, если $Su \in T(\lambda+\varepsilon)$, то

$$PSu(x) = u(x). \tag{22}$$

Так как, очевидно, $0 \in T(\lambda+\varepsilon)$, то, применяя (22) к обеим частям установленного в $\mathbb{R}^n_+$ равенства $Su = 0$, получим $u = 0$ в $\mathbb{R}^n_+$. Выше было показано, что это влечёт $u \equiv 0$ во всём $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Переход к полупространству $\mathbb{R}^n_+$ использовался при доказательстве потому, что выражение (8) не определено в области, получаемой пересечением шара $|x| \leqslant R_0$ и бесконечного полуцилиндра $\{|x_1| \leqslant R_0,\ |x_1| \leqslant R_0\}$.

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Любое решение $u(x) \in C^2(|x| > R_0)$ стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом*

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geqslant R_0 > 0,$$
$$q(x_1) \in C(|x| \geqslant R_0), \quad |q(x_1)| \leqslant \lambda^2, \qquad \lambda > 0,$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(x)| \leqslant \mathrm{const}\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|}, \quad \varepsilon > 0,$$

есть тождественный нуль.

3. Возможные обобщения. Использованная техника операторов преобразования позволяет усилить полученный результат. Будем обозначать через $L_{2,\mathrm{loc}}(x_1 \geqslant R_0)$ множество функций, для которых при любом $x_1 \geqslant R_0$ конечен интеграл

$$\int\limits_{R_0}^{x_1} \psi^2(s)\, ds.$$

Далее, пусть задана неотрицательная функция $g(x)$, для которой интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} t\, g(t, x_1)\, dt = p(x)$$

конечен при любом $x_1 \geqslant R_0$ и для некоторой постоянной $\alpha > 0$

$$|p(x)| \leqslant c \cdot \exp(-\alpha |x|^{\delta}), \quad \delta > 0.$$

Тогда по схеме доказательства предыдущей теоремы может быть установлен следующий факт.

Теорема 2. *Пусть $\psi(x_1) \in L_{2,\mathrm{loc}}(x_1 \geqslant R_0)$ — неубывающая функция, а функция $g(x)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Тогда любое решение уравнения*

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |x| \geqslant R_0 > 0,$$
$$|q(x_1)| \leqslant \psi^2(x_1),$$

для которого выполнено неравенство

$$\psi(x_1)|u(x)| \leqslant \mathrm{const}\, e^{-\psi(x_1)|x|} g(x), \quad g(x) \geqslant 0,$$

есть тождественный нуль.

В условиях теоремы 1 нужно положить $g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Примером другой допустимой $g(x)$ является функция $g(x) = \exp(-\varepsilon|x|^{\delta})$, $0 < \delta < 1$. Этот случай является также примером обобщённой задачи Ландиса—Мешкова (2)–(3).

По аналогичной схеме может быть также рассмотрен случай потенциала, зависящего только от радиальной переменной. Ответ в первоначальной формулировке задачи Е. М. Ландиса здесь тоже положительный, после перехода к сферическим координатам нужно использовать операторы преобразования для возмущённого оператора Бесселя, подобные тем, что были рассмотрены выше (см. [3, 11, 12, 22]).

Результаты данной работы переносятся также на класс многомерных специальных потенциалов, которые представляются в виде сумм одномерных потенциалов рассмотренных типов по каждой переменной.

Возможно рассмотрение обобщений задачи Е. М. Ландиса на случай более общих дифференциальных уравнений и соответствующих оценок роста решений. Например, представляет интерес исследование поставленных вопросов для нелинейного уравнения p-лапласиана (см. [16, 19]); эта задача возникла во время обсуждения доклада автора на семинаре кафедры дифференциальных уравнений МГУ с проф. А. А. Коньковым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1966.
3. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
4. *Левин Б. Я.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка// Докл. АН СССР. — 187–190. — *106*.
5. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.
6. *Мешков В. З.* Весовые дифференциальные неравенства и их применение для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1989. — *190*. — С. 139–158.
7. *Мешков В. З* О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 3. — С. 364–383.
8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
9. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
10. *Олейник О. А., Шубин М. А.* Дифференциальные уравнения и их приложения// Усп. мат. наук. — 1982. — *37*, № 6 (228). — С. 278–281.
11. *Ситник С. М.* Об одном интегральном уравнении в теории операторов преобразования// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 8. — С. 1428–1438.
12. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
13. *Bourgain J., Kenig C. E.* On localization in the continuous Anderson–Bernoulli model in higher dimension// Invent. Math. — 2005. — *161*, № 2. — P. 389–426.
14. *Calderon A. P.* Uniquenes in the Cauchy problem for partial differential equations// Am. J. Math. — 1958. — *80*. — P. 16–36.
15. *Davey B., Kenig C., Wang J. N.* The Landis conjecture for variable coeffcient second-order elliptic PDEs// Trans. Am. Math. Soc. — 2017. — *369*, № 11. — P. 8209–8237.
16. *Drabek P., Kufner A., Nicolosi F.* Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities. — Berlin–New York: de Gruyter, 1997.
17. *Kenig C. E.* Some recent quantitative unique continuation theorems// in: Sémin. Équ. Dériv. Partielles.. — Palaiseau: Ec. Polytech. Cent. Math., 2006. — P. 1–10.

18. *Kenig C. E., Silvestre L., Wang J. N.* On Landis' conjecture in the plane// Commun. Part. Differ. Equ. — 2015. — *40*, № 4. — P. 766–789.
19. *Lindqvist P.* Notes on the p-Laplace equation. — Trondheim, Norway: Norwegian Univ. Sci. Techn., 2006.
20. *Morrey C. B.* Second order elliptic systems of differential equations// Proc. Natl. Acad. U.S.A. — 1953. — *39*. — P. 201–206.
21. *Rossi L.* The Landis conjecture with sharp rate of decay/ `arXiv: 1807.00341 [math.APC]`.
22. *Shishkina E. L., Sitnik S. M.* Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. — Amsterdam: Elsevier, 2020.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ситник Сергей Михайлович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `sitnik@bsu.edu.ru`