



НОВЫЕ ТОЖДЕСТВА ИЗ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ

© 2023 г. В. А. ВОБЛЫЙ

Аннотация. Три новых комбинаторных тождества связаны с перечислением помеченных связных графов с заданным числом конечных вершин. Дано доказательство этих тождеств, не зависящее от перечисления графов. Для одного из тождеств намечен ход доказательства с помощью формул для перечисления графов.

Ключевые слова: комбинаторное тождество, перечисление, помеченный граф, связный граф, конечная вершина, унициклический граф.

NEW IDENTITIES FROM ENUMERATION OF GRAPHS

© 2023 V. A. VOBLYI

ABSTRACT. In this paper, three new combinatorial identities related to the enumeration of labeled connected graphs with a given number of endpoints are presented. We give a proof of these identities independent of the enumeration of graphs. For one of the identities, a course of the proof based on formulas for enumerating graphs is outlined.

Keywords and phrases: combinatorial identity, enumeration, labeled graph, connected graph, endpoint, unicyclic graph.

AMS Subject Classification: 05C30

Комбинаторные тождества часто возникают при перечислении графов (см. [2–4]). Из формул перечисления помеченных связных графов с заданным числом конечных вершин (см. [1, 9, 10]) следует несколько новых тождеств. В статье приведены доказательства трех таких тождеств, не зависящие от перечисления графов. Для одного из тождеств намечен ход доказательства с помощью формул для перечисления графов.

Теорема 1. При $n \geq 3$ верно комбинаторное тождество

$$\sum_{i=0}^{n-3} \sum_{j=3}^{n-i} (-1)^i \frac{(n-i)^{n-j-1}}{i!(n-i-j)!} = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (1) через $L_1(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s = n - i$, $i = n - s$ имеем

$$L_1(n) = \sum_{s=3}^n \sum_{j=3}^s (-1)^{n-s-1} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_1(n) = \sum_{j=3}^n \sum_{s=j}^n (-1)^{n-s} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p = s - j$, $s = p + j$ и ввода биномиального коэффициента получим

$$L_1(n) = \sum_{j=3}^n \frac{1}{(n-j)!} \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^{n-j-p} \binom{n-j}{p} (p+j)^{n-j-1}.$$

Используем известное комбинаторное тождество (см. [7, с. 609, формула 15])

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} (p+a)^q = 0, \quad q = 0, 1, \dots, m-1, \quad m \geq 1.$$

В нашем случае найдем

$$L_1(n) = \frac{1}{n} + \sum_{j=3}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^{n-j-p} \binom{n-j}{p} (p+j)^{n-j-1} = \frac{1}{n} + \sum_{j=3}^{n-1} 0 = \frac{1}{n}. \quad \square$$

Теорема 2. При $n \geq 4$ верно комбинаторное тождество

$$\sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=3}^{n-i} (-1)^{i-1} \frac{(n-i)^{n-j-1}}{(i-1)!(n-i-j)!} = n-3. \quad (2)$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (2) через $L_2(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s = n - i$, $i = n - s$ имеем

$$L_2(n) = \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{j=3}^s (-1)^{n-s-1} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \sum_{s=j}^{n-1} (-1)^{n-s-1} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-1)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p = s - j$, $s = p + j$ и ввода биномиального коэффициента получим

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{(n-j-1)!} \sum_{p=0}^{n-j-1} (-1)^{n-j-p-1} \binom{n-j-1}{p} (p+j)^{n-j-1}.$$

Используем известное комбинаторное тождество (см. [7, с. 609, формула 16])

$$\sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} (p+a)^m = (-1)^m m!.$$

В нашем случае найдем

$$L_2(n) = \sum_{j=3}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} (-1)^{n-j-1} (n-j-1)! = \sum_{j=3}^{n-1} 1 = n-3. \quad \square$$

Пусть $S_p(n, k)$ — нецентральные числа Стирлинга второго рода (см. [8]). Для них известна производящая функция и следующие выражения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_p(n, k) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{pz} (e^z - 1)^k, \quad S_p(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} (l+p)^n, \\ S_p(n, k) = 0 \text{ при } k > n, \quad S_p(n, n) = 1.$$

Лемма 1.

$$S_p(n, n-1) = n \left(p + \frac{1}{2}(n-1) \right).$$

Доказательство. Используем метод коэффициентов (см. [6]):

$$S_p(n, n-1) = \frac{n!}{(n-1)!} \text{Coef}_z e^{pz} (e^z - 1)^{n-1} z^{n-1} = n \text{Coef}_z e^{pz} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{n-1} \frac{1}{z^2}.$$

Пусть

$$f(z) = e^{pz} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{n-1}.$$

Для вычета функции $F(z)$ в полюсе $z = a$ порядка n известна формула (см. [5, с. 84])

$$\text{Coef}_z F(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n F(z)].$$

Функция $f(z)$ аналитична в нуле; по формуле для вычета в полюсе второго порядка найдем

$$\begin{aligned} S_p(n, n-1) &= n \text{Coef}_z \frac{f(z)}{z^2} = n \lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = \\ &= n \lim_{z \rightarrow 0} \left[p e^{pz} \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{n-1} e^{pz} (n-1) \left(\frac{e^z - 1}{z} \right)^{n-2} \frac{e^z z - (e^z - 1)}{z^2} \right] = \\ &= n \left[p + (n-1) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z^2 - z - \frac{1}{2}z^2 + o(z^2)}{z^2} \right] = n \left(p + \frac{1}{2}(n-1) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. При $n \geq 5$ верно комбинаторное тождество

$$\sum_{i=2}^{n-3} \sum_{j=3}^{n-i} (-1)^i \frac{(n-i)^{n-j-1}}{(i-2)!(n-i-j)!} = \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(2n-1). \quad (3)$$

Доказательство. Обозначим левую часть тождества (3) через $L_3(n)$. После замены индекса суммирования во внешней сумме $s = n - i$, $i = n - s$ имеем

$$L_3(n) = \sum_{s=3}^{n-2} \sum_{j=3}^s (-1)^{n-s} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-2)!(s-j)!}.$$

Изменим теперь порядок суммирования в двойной сумме:

$$L_3(n) = \sum_{j=3}^{n-2} \sum_{s=j}^{n-2} (-1)^{n-s} \frac{s^{n-j-1}}{(n-s-2)!(s-j)!}.$$

После замены индекса суммирования во внутренней сумме $p = s - j$, $s = p + j$ получим

$$\begin{aligned} L_3(n) &= \sum_{j=3}^{n-2} \frac{1}{(n-j-2)!} \sum_{p=0}^{n-j-2} (-1)^{n-j-p-2} \binom{n-j-2}{p} (p+j)^{n-j-1} = \\ &= \sum_{j=3}^{n-2} S_j(n-j-1, n-j-2) = \sum_{j=3}^{n-2} (n-j-1) \left(j + \frac{1}{2}(n-j-2) \right) = \\ &= \frac{1}{6}(2n^3 - 15n^2 + 31n - 12) = \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(2n-1). \end{aligned}$$

Суммирование последовательности и разложение на множители многочлена выполнено с помощью пакета программ Maple. $\square$

В качестве примера наметим ход доказательства тождества (2) с помощью формул для перечисления графов.

Обозначим через $C_k(n, m)$ число помеченных связных графов с n вершинами, из которых k концевых, и m ребрами, а через $C(n, m)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m ребрами. Мун (см. [9]) получил формулу

$$C_k(n, m) = \sum_{i=k}^{n-1} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \binom{n}{i} (n-i)^i C(n-i, m-i). \quad (4)$$

Унициклический граф — это связный граф с n вершинами и n ребрами. Известна формула для числа $C(n, n)$ помеченных унициклических графов с n вершинами (см. [10, с. 20]):

$$C(n, n) = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \frac{n!}{(n-i)!} n^{n-i-1}. \quad (5)$$

Выражение для числа $C_k(n, n)$ помеченных унициклических графов с n вершинами, из которых k конечных, найдено в [1]:

$$C_k(n, n) = \frac{1}{2} \frac{n!}{k!} \sum_{p=3}^{n-k} S_p(n-p-1, n-p-k).$$

Учитывая, что $S_p(n, n) = 1$, имеем

$$C_1(n, n) = \frac{1}{2} n! (n-3); \quad (6)$$

подставляя (5) и (6) в формулу Муна (4) при $k = 1$, $m = n$, получим тождество (2).

Отметим, что аналогичным путем можно получить еще ряд тождеств типа (1)–(3), но степень многочлена от n в правой части тождества быстро растет и при $k = 3$ уже равна 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воблый В. А. Асимптотическое перечисление помеченных связных разреженных графов с заданным числом висячих вершин // Методы дискретного анализа в теории графов и схем — 1985. — 42. — С. 3–14.
2. Воблый В. А. Об одном тождестве для многочленов Кравчука // Мат. XX Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кропивницкий, 13–14 апреля 2018 г.). — Кропивницкий, 25–28.
3. Воблый В. А. О комбинаторном тождестве, связанном с перечислением графов // Мат. XXI Междунар. семин. «Комбинаторные конфигурации и их приложения» (Кропивницкий, 17–18 мая 2019 г.). — Кропивницкий, 2019. — С. 30–31.
4. Воблый В. А. Два комбинаторных тождества, связанных с перечислением графов // Итоги науки техн. Современ. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 11–14.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
6. Леонтьев В. К. Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001.
7. Прудников А. П. и др. Интегралы и ряды. Т. 1. — Наука, 1981.
8. Koutras M. Non-central Stirling numbers and some applications // Discr. Math. — 1982. — 42. — P. 73–80.
9. Moon J. W. Connected graphs with unlabeled end-points J. Comb. Theory. — 1969. — 6. — P. 65–66.
10. Moon J. W. Counting Labelled Trees. — Can. Math. Congr., 1970.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич

Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ РАН), Москва

E-mail: vitvobl@yandex.ru