ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 12–21
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-12-21

УДК 517.9

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2023 г. **А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. В работе рассматривается разностный оператор специального типа (с инволюцией), бесконечная матрица которого имеет две ненулевые диагонали: главную и побочную. Введено понятие абстрактного оператора инволюции и исследованы его свойства, такие как обратимость, спектр, условие коммутируемости. Рассмотрен вопрос о принадлежности исходного оператора и обратного к нему специальным операторным классам.

***Ключевые слова*:** разностный оператор, инволюция, абстрактная инволюция, спектр, обратимость, коммутируемость.

ON BOUNDED DIFFERENCE OPERATORS WITH INVOLUTION

© 2023 **A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA**

Abstract. In this paper, we considers difference operators of a special type (with involution) whose infinite matrix has two nonzero diagonals. We introduce the notion of an abstract involution operator and examine its such as invertibility, spectrum, and commutability condition. Also, we discuss the problem of whether the original operator and its inverse belong to special operator classes.

***Keywords and phrases*:** difference operator, involution, abstract involution, spectrum, invertibility, commutability.

***AMS Subject Classification*:** 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, со стандартной нормой

$$\|X\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}, \quad x \in \mathcal{X},$$

и $I \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ — тождественный оператор в $\mathcal{X}$.

Определение 1. Оператор $J \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ называется инволюцией, если

$$J^2 = I. \tag{1}$$

Заметим, что равенству (1) удовлетворяют, например, операторы I и $-I$. Такую инволюцию назовем тривиальной инволюцией. Далее в работе рассматриваются инволюции, не являющиеся тривиальными.

Всюду рассматривается банахово пространство $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, $p = [1,\infty]$, двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$; будем обозначать кратко его через l_p, $p \in [1,\infty]$. Напомним, что

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1,\infty), \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|.$$

При $p = 2$ пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y}(n).$$

Стандартный безусловный базис в l_p, $p \in [1, \infty)$, обозначим через $(e_n, n \in \mathbb{Z})$, $e_n(k) = \delta_{nk}$, где δ_{nk} — символ Кронекера. Отметим, что инволюция существует в любом банаховом пространстве с двусторонним базисом и определяется формулой

$$(Jx)(n) = x(-n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_n \in \mathcal{X}, \tag{2}$$

причем $(Jx)(0) = x(0)$.

Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ обозначим пространство всех двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (необязательно ограниченных), $l_p \subset l^\infty$ для всех $p \in [1, \infty]$. Пространство l^∞ является алгеброй с поточечным умножением $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, α, $\beta \in l^\infty$.

Инволюцию можно определить и в линейном пространстве формулойЁ(1). Она также существует в любом линейном пространстве с двусторонним базисом и определяется формулой (2).

Инволюцию, задаваемую формулой (2) в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, также называют простейшей или стандартной (см. [7, 8]). Эта инволюция связана со стандартной (или простейшей) инволюцией, например, на отрезке $[0, 1]$, задаваемой формулой $\omega(x) = 1 - x$, $\omega^2(x) = x$, $x \in [0, 1]$, использующейся в дифференциальных уравнениях.

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ определим оператор $A_\alpha = \alpha I$, $Ax = \alpha x$. Область определения $D(A_\alpha)$ оператора A_α определяется следующим образом:

$$D(A_\alpha) = \{x \in l_p, \alpha x \in l_p\}.$$

Оператор A_α будем называть диагональным оператором. Рассмотрим оператор

$$A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta J = \alpha I + \beta J, \quad \alpha, \beta \in l^\infty,$$

где оператор J определен формулой (2). Множество таких операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Аналогично $D(A_\alpha)$ определяется область определения для оператора $A_\beta J$ и $D(A_{\alpha,\beta}) = D(A_\alpha) \cap D(A_\beta J)$. Очевидно, что при $\alpha, \beta \in l_\infty$ оператор $A_{\alpha,\beta}$ ограничен и

$$\|A_{\alpha,\beta}\| \leqslant \|\alpha\|_\infty + \|\beta\|_\infty.$$

Оператор $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_p \to l_p$ действует по формуле

$$(A_{\alpha,\beta}x)(n) = \alpha(n)x(n) + \beta(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и в стандартном базисе пространства l_p имеет разреженную матрицу $A_{\alpha,\beta} \sim (a_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где $a_{ii} = \alpha(i)$, $a_{i,-i} = \beta(i)$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a_{00} = \alpha(0) + \beta(0)$, а остальные элементы равны нулю.

Необходимость изучения оператора $A_{\alpha,\beta}$ возникает, например, при исследовании системы дифференциально-разностных уравнений

$$u'(t) = A_{\alpha,\beta}u(t) + f(t),$$

где $u : \mathbb{R} \to l_p$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in l_p$, $f : \mathbb{R} \to l_p$.

Важность изучения оператора $A_{\alpha,\beta}$ также связана с возможностью применения метода подобных операторов для исследования спектральных свойств различных классов дифференциальных и разностных операторов. Идеологию метода подобных операторов можно найти, например, в [4, 17]. При этом исследуемый оператор представляют в виде $A - B$, где в роли A выступает оператор с известными спектральными свойствами, а возмущение B мало в некотором смысле по сравнению с A. Обычно в качестве A выступает диагональный оператор. Но это не всегда удобно, особенно если у исследуемого оператора по побочной диагонали также стоит растущая последовательность. Тогда в качестве невозмущенного оператора удобно брать именно оператор вида $A_{\alpha,\beta}$, остальное относить к его возмущению и адаптировать метод подобных операторов именно к такому случаю.

Приведем еще один пример. Оператор вида $A_{\alpha,\beta} - B$ возникает при дискретизации оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом с инволюцией.

Отметим, что дифференциальные операторы с инволюцией в настоящее время активно исследуются в работах разных авторов (см., например, [10, 14, 18]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются свойства оператора инволюции сначала в абстрактном банаховом пространстве, а затем в пространстве l_p, $p \in [1, \infty)$, доказана лемма 2, из которой следуют другие примеры инволюции, отличные от стандартной. В разделе 3 рассматривается определение и примеры инволюции порядка n, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. В разделе 4 изучаются свойства оператора $A_{\alpha,\beta}$ такие как обратимость, условия коммутируемости двух операторов, спектр. В последнем разделе рассматривается оператор $A_{\alpha,\beta}$ при α, $\beta \in l_\infty$ и приводятся результаты относительно его принадлежности специальным операторным классам.

2. Оператор J в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Вначале опишем свойства оператора инволюции в абстрактном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Непосредственно из определения 1 вытекает обратимость оператора J и равенство $J^{-1} = J$.

Из (1) немедленно следует, что спектр $\sigma(J)$ оператора J таков, что $\sigma(J) \subseteq \{-1, 1\}$. Так как рассматриваются нетривиальные инволюции, то $\sigma(J)$ совпадает со множеством $\{-1, 1\}$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово пространство. Вектор $x \in \mathcal{X}$ назовем четным, если $Jx = x$, и нечетным, если $Jx = -x$. Четный вектор иногда будем обозначать x_+, нечетный — x_-.

Обозначим через $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ соответственно подпространства четных и нечетных векторов из $\mathcal{X}$. Из определения 2 вытекает, что $\mathcal{X}_+$ и $\mathcal{X}_-$ — замкнутые подпространства и пространство $\mathcal{X}$ представимо в виде их прямой суммы

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \oplus \mathcal{X}_-. \tag{3}$$

Введем два оператора P_+, $P_- \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ формулами

$$P_+ = \frac{I+J}{2}, \quad P_- = \frac{I-J}{2}.$$

Свойства операторов P_+ и P_- удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Операторы P_+ и P_- обладают следующими свойствами*:

(1) P_+ *и* P_- — *проекторы*;
(2) $P_+ + P_- = I$, $P_+P_- = 0$;
(3) $JP_+ = P_+$, $JP_- = -P_-$;
(4) $J = P_+ - P_-$ (*спектральное разложение оператора* J);
(5) $\operatorname{Im} P_+ = \mathcal{X}_+$, $\operatorname{Im} P_- = \mathcal{X}_-$.

Таким образом, есть два проектора, осуществляющих разложение пространства $\mathcal{X}$ в виде прямой суммы (3). При этом собственному значению -1 отвечает $\mathcal{X}_-$, а собственному значению 1 — $\mathcal{X}_+$, причем

$$x = \frac{x+Jx}{2} + \frac{x-Jx}{2} = x_+ + x_-, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Перейдем к оператору $I + J$. Он обладает следующими свойствами:

(1) $\sigma(I+J) = \{2, 0\}$;
(2) $\operatorname{Im}(I+J) = \mathcal{X}_+$;
(3) $\operatorname{Ker}(I+J) = \mathcal{X}_-$.

Очевидно, что операторы I и J перестановочны, $e^I = eI$. Поэтому $e^{I+J} = e \cdot e^J$, где

$$e^J = I\Big(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \ldots\Big) + J\Big(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ldots\Big) = \frac{1}{2}\Big(I(e + e^{-1}) + J(e - e^{-1})\Big),$$

$$e^{Jt} = \operatorname{ch} tI + \operatorname{sh} tJ, \quad e^{I+J} = \frac{1}{2}\Big(I(e^2+1) + J(e^2-1)\Big), \quad e^{(I+J)t} = e^t \operatorname{ch} tI + e^t \operatorname{sh} tJ.$$

Далее везде в статье под оператором инволюции мы будем понимать именно стандартный оператор инволюции, действующий в пространстве l_p, $p \in [1, \infty)$, по формуле (2) и обозначать его через J. Кроме указанных выше свойств он в пространстве l_2 обладает еще и следующими:

(1) $J^* = J$, $J^{-1} = J^*$;

(2) $(I+J)^* = I+J$.

Стандартный оператор инволюции J является не единственным оператором инволюции (в смысле определения 1), действующим в l_p, $p\in[1,\infty)$. Непосредственная проверка выполнения равенства (1) показывает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой последовательности $\beta\in l_\infty$ такой, что $|\beta(n)|>\varepsilon>0$ для всех $n\neq 0$, $\beta(0)=1$, и $\beta(-n)=1/\beta(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, оператор βJ является инволюцией.*

Подчеркнем, что для оператора βJ выполняется лемма 1 и его спектр, как и спектр любого нетривиального оператора инволюции, есть множество $\{-1,1\}$. В стандартном базисе пространства l_p, $p\in[1,\infty)$, оператор βJ, определенный в лемме 2, имеет матрицу только с одной ненулевой побочной диагональю, причем $b_{n,-n}=\beta(n)$, $b_{0,0}=1$, $\beta_{-n,n}=1/\beta(n)$, $n\in\mathbb{N}$. К подпространству X_+ относятся, например, векторы, где на $(-n)$-м месте стоит единица, на n-м месте $\beta(n)$, $n\in\mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые. К подпространству X_- относятся векторы, у которых на $(-n)$-м месте стоит -1, на n-м месте $\beta(n)$, $n\in\mathbb{N}$, а остальные координаты нулевые.

Такая инволюция βJ не является самосопряженным оператором в пространстве l_2. Очевидно, что оператор $(\beta J)^*$ также является инволюцией, а операторы βJ и $(\beta J)^*$ не перестановочны. Отметим еще одно очевидное свойство. Если D_1 и D_2 — два некоммутирующих оператора инволюции, то $(D_1D_2)^{-1}=D_2D_1$.

Кроме приведенных выше примеров, инволюцией, например, является оператор $A_\alpha : l_p\to l_p$, $p\in[1,\infty)$, если $\alpha(n)=(-1)^n$, $n\in\mathbb{Z}$. Для него подпространство $\mathcal{X}_+$ содержит элементы с нулевыми нечетными координатами, а $\mathcal{X}_-$ — с нулевыми четными.

Согласно лемме 2 операторы βJ, где $\beta(n)=(-1)^n$, $n\in\mathbb{Z}$, также является инволюцией, причем он самосопряжен в пространстве l_2.

Оператор $-J$, где J определен формулой (2) в пространстве l_p, $p\in[1,\infty)$, также является инволюцией. Очевидно, что у него подпространство $\mathcal{X}_+$ содержит нечетные последовательности, а $\mathcal{X}_-$ — четные.

3. Абстрактная инволюция.

В этом разделе приведем примеры абстрактной инволюции.

Определение 3. Оператор $\widetilde{J}\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ называется обобщенной инволюцией, если для некоторого $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, выполняется соотношение $\widetilde{J}^n=I$. Наименьшее такое n называется порядком обобщенной инволюции.

Для обобщенной инволюции $\widetilde{J}$ n-го порядка имеет место равенство $\widetilde{J}^{-1}=\widetilde{J}^{n-1}$.

Определение 4 (см. [13, с. 87]). Оператор $A\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ называется оператором простейшего типа, если его спектр состоит из конечного числа собственных значений и пространство $\mathcal{X}$ есть прямая сумма соответствующих собственных подпространств.

Лемма 3 ((см. [13]). *Оператор A является оператором простейшего типа тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $P(\lambda)$ с простыми корнями, что $P(A)=0$.*

Из определения 3 и леммы 3 немедленно следует, что обобщенная инволюция является оператором простейшего типа, так как многочлен $P(\lambda)=\lambda^n-1$ есть для нее аннулирующий многочлен. Следовательно, также $\sigma(J)\subseteq\{\sqrt[n]{1}\}$, все собственные значения обобщенной инволюции простые и лежат на единичной окружности. Соответствующие проекторы можно найти по интерполяционной формуле Лагранжа

$$P_j=\frac{(\widetilde{J}-\lambda_1I)\dots(\widetilde{J}-\lambda_{j-1}I)(\widetilde{J}-\lambda_{j+1}I)\dots(\widetilde{J}-\lambda_nI)}{(\lambda_j-\lambda_1)\dots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\dots(\lambda_j-\lambda_n)},\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_n — собственные значения обобщенной инволюции.

Оператор обобщенной инволюции имеет спектральное разложение вида

$$\widetilde{J}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{(\widetilde{J}-\lambda_1I)\dots(\widetilde{J}-\lambda_{j-1}I)(\widetilde{J}-\lambda_{j+1}I)\dots(\widetilde{J}-\lambda_nI)}{(\lambda_j-\lambda_1)\dots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\dots(\lambda_j-\lambda_n)}.$$

Такое разложение также называется интерполяционной формулой Сильвестра.

Приведем примеры обобщенных инволюций. Тривиальной обобщенной инволюцией третьего порядка является оператор $e^{i2\pi/3}I$, четвертого порядка — оператор iI.

К нетривиальной инволюции четвертого порядка относится оператор $\widetilde{J}$, действующий по формуле

$$(\widetilde{J}x)(n) = ix(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

У него два собственных значения $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; соответствующие проекторы P_{λ_1} и P_{λ_2} задаются формулами $P_{\lambda_1} = (I - iJ)/2$, $P_{\lambda_2} = (I + iJ)/2$.

Приведем еще один пример. Пусть

$$(\widetilde{J}x)(n) = \begin{cases} (-1)^n x(-n), & n \geqslant 0, \\ (-1)^{n+1} x(-n), & n < 0. \end{cases}$$

Оператор $\widetilde{J}$ является обобщенной инволюцией четвертого порядка. Заметим также, что если $\widetilde{J}$ — обобщенная инволюция нечетного порядка, то оператор $I + \widetilde{J}$ обратим.

4. Исследование оператора $A_{\alpha,\beta}$.

Пусть $\mathcal{X} = l_p$, $p \in [1, \infty)$. Обозначим символом $e : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ единичную последовательность, т.е. $e(n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, а символом $0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — нулевую последовательность. Отметим, что $e \in l_\infty$.

Операторы $I, J \in \operatorname{End} l_p$ принадлежат $\mathcal{M}$, так как $I = A_{e,0} = eI + 0J$, $J = A_{0,e} = 0I + eJ$. Напомним, что символом J теперь обозначена простейшая или стандартная инволюция, т.е. J действует по формуле (2). Далее используется очевидное свойство оператора J: $J(\alpha x) = (J\alpha)(Jx)$; вместо $\alpha(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, иногда будем писать $J\alpha$.

Отметим, что операторы, заданные своими бесконечными матрицами, широко исследованы в различных работах. Но, обычно, это матрицы несколько другого типа. Особенно хорошо изучаются трехдиагональные матрицы, что связано с их приложениями в разных прикладных задачах. Также бесконечные трехдиагональные матрицы возникают при дискретизации дифференциальных уравнений второго порядка с (обычным) потенциалом (без инволюции). Соответствующие результаты, касающиеся нахождения спектральных свойств бесконечных трехдиагональных матриц, можно посмотреть, например, в [5, 11, 19, 20]. Результаты из этих работ к $A_{\alpha,\beta}$ неприменимы (они относятся к замкнутым линейным операторам специального вида, причем существенным образом используется тот факт, что последовательность $(\alpha(n), n \in \mathbb{Z})$ растущая). В [12] рассматривались трехдиагональные матрицы с ненулевой побочной диагональю, причем кроме условия, что диагональная последовательность $(\alpha(n), n \in \mathbb{Z})$ растущая, еще ставились условия на последовательность $(\beta(n), n \in \mathbb{Z})$, например, $\beta \in l_2$.

Напомним также, что матрица оператора $A_{\alpha,\beta}$ является разреженной матрицей. Пусть $A_{\alpha,\beta}$, $A_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}$. Рассмотрим оператор

$$A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}} = A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} : D(A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}) \subset l_p \to l_p, \quad D(A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}) = \Big\{ x \in D(A_{\alpha',\beta'}) : A_{\alpha',\beta'}x \in D(A_{\alpha,\beta}) \Big\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = A_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\widetilde{\alpha}(n) = \alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n), \quad \widetilde{\beta}(n) = \alpha(n)\beta'(n) + \beta(n)\alpha'(-n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Замечание 1. Равенства (4) удобнее записывать в виде

$$\widetilde{\alpha} = \alpha\alpha' + \beta J\beta', \quad \widetilde{\beta} = \alpha\beta' + \beta J\alpha'.$$

Лемма 4. *Операторы A_α, A_β и $A_{\alpha,\beta}$ обладают следующими свойствами*:

(1) *если $\beta \in l_+^\infty$ (четная последовательность), то операторы A_β и J коммутируют, т.е. $A_\beta J = JA_\beta$*;
(2) *если α, $\beta \in l_+^\infty$, то операторы A_α и $A_\beta J$ коммутируют*;
(3) *в пространстве l_2 имеем $A^*_{\alpha,\beta} = A_{\overline{\alpha}} + JA_{\overline{\beta}}$*;
(4) *$A_{\alpha,\beta} = A^*_{\alpha,\beta}$ в пространстве l_2, если α, $\beta \in l_+^\infty$, α, $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.*

Для оператора $A_{\alpha,\beta}$ спектр хорошо ищется в явном виде, а также легко можно выписать условие обратимости и найти обратный оператор.

Сначала рассмотрим условия коммутирования двух операторов $A_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ и $A_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}$, при этом предполагается, что операторы $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'}$ и $A_{\alpha',\beta'}A_{\alpha,\beta}$ определены корректно.

Лемма 5. *Операторы $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ коммутируют, если выполнены равенства*

$$\beta'(\alpha - J\alpha) = \beta(\alpha' - J\alpha'), \quad \beta' J\beta = \beta J\beta'. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) следует, что для коммутирования операторов $A_{\alpha,\beta}$ и $A_{\alpha',\beta'}$ должны быть выполнены условия

$$\alpha\alpha' + \beta J\beta' = \alpha\alpha' + \beta' J\beta, \quad \alpha\beta' + \beta J\alpha' = \alpha'\beta + \beta' J\alpha,$$

откуда и получаются равенства (5). □

Для любой последовательности $\alpha \in l^\infty$ введем множество ее нулей $Z(\alpha) = \{n \in \mathbb{Z} : \alpha(n) = 0\}$. В терминах $Z(\alpha)$ мы будем формулировать условие обратимости.

Теорема 1. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим тогда и только тогда, когда*

$$Z(\alpha J\alpha - \beta J\beta) = \varnothing \tag{6}$$

и $\alpha(n)\alpha(-n) - \beta(n)\beta(-n) \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обратным к $A_{\alpha,\beta}$ в этом случае является оператор $A^{-1}_{\alpha,\beta} = A_{\alpha',\beta'}$, где

$$\alpha' = J\alpha(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \quad \beta' = -\beta(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \quad \alpha'(0) = \frac{1}{\alpha(0) + \beta(0)}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (4) получим, что для выполнения равенства $A_{\alpha,\beta}A_{\alpha',\beta'} = I$ должны выполняться условия

$$\alpha\alpha' + \beta J\beta' = e, \quad \alpha\beta' + \beta J\alpha' = 0,$$

откуда и вытекает условие (6) и формулы (7). Осталось показать, что равенства (5) выполнены, что легко сделать непосредственной подстановкой. Теорема доказана. □

Перейдем к нахождению спектра оператора $A_{\alpha,\beta} : D(A_{\alpha,\beta}) \subset l_2 \to l_2$, α, $\beta \in l^\infty$. Воспользуемся идеями замены, предложенными в [9, 16] для перехода от оператора инволюции к оператору Дирака и в [15] при исследовании интегральных операторов с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов.

Каждой последовательности $x \in l_2$ поставим в соответствие последовательность $\overline{x} \in l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ формулой $\overline{x}(n) = \{x(n), x(-n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $U : l_2 \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$, $Ux = \overline{x}$. Введем оператор $\widetilde{B}_{\alpha,\beta}$, который связан с оператором $A_{\alpha,\beta}$ соотношением $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} = UA_{\alpha,\beta}U^{-1}$. Непосредственным подсчетом доказывается следуюий факт.

Лемма 6. *Оператор $A_{\alpha,\beta}$ унитарно эквивалентен оператору $\widetilde{B}_{\alpha,\beta} : l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2) \to l_2(\mathbb{Z}_+, \mathbb{C}^2)$ вида*

$$(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}x)(n) = \begin{pmatrix} \alpha(n) & \beta(n) \\ \beta(-n) & \alpha(-n) \end{pmatrix} \overline{x}(n) = Q(n)\overline{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Итак,

$$\sigma(\widetilde{B}_{\alpha,\beta}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma(Q(n)),$$

и далее необходимо вычислить собственные значения матриц второго порядка $Q(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что не составляет труда.

Из представления (8) вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$ есть замыкание множества чисел*

$$\left\{\alpha(0) + \beta(0),\ \frac{\alpha(n) + \alpha(-n) \pm \sqrt{(\alpha(n) + \alpha(-n))^2 - 4\beta(n)\beta(-n)}}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что в лемме 7 ограниченность последовательностей α, β не предполагается.

5. О принадлежности ограниченного оператора $A_{\alpha,\beta}$ специальным операторным классам. В предыдущем разделе в явном виде выписан спектр оператора $A_{\alpha,\beta}$, приведено условие его обратимости и получены формулы для последовательностей α', β' у обратного оператора при условии $\alpha, \beta \in l^\infty$. В частном, но важном, случае $\alpha, \beta \in l_\infty$, иногда не столь существенен явный вид последовательностей α', β', сколь важна принадлежность исходного и обратного операторов специальным операторным классам. Для этого можно применить общие результаты, касающиеся оценок элементов обратных матриц из [1, 2].

Итак, пусть $\alpha, \beta \in l_\infty$; тогда $A_{\alpha,\beta} \subset \operatorname{End} l_p$. Опишем классы, ограниченных операторов, опираясь на результаты [1, 2], для чего введем в рассмотрение некоторую последовательность, а также весовые функции.

По каждой матрице $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ построим последовательность $(d_A(n), n \in \mathbb{Z})$, $d_A(n) = \sup\limits_{i-j=n} |a_{ij}|$. Введенная последовательность отвечает за скорость убывания элементов матрицы $\mathcal{A}$ оператора $A \in \operatorname{End} l_p$ на диагоналях, параллельных главной диагонали. Если $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n) < \infty$, то оператор $A \in \operatorname{End} l_p$, $p \in [1, \infty)$, отнесем к пространству $\operatorname{End}_1 l_p$ операторов с суммируемыми диагоналями, норма в котором задается формулой

$$\|A\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n).$$

Свойства таких операторов можно найти, например, в [3]. Для исследуемого оператора $A_{\alpha,\beta}$ имеем

$$d_{A_{\alpha,\beta}}(n) = |\beta(n)|, \quad n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad d_{A_{\alpha,\beta}}(0) = |\alpha(0) + \beta(0)|.$$

Очевидно, что $A_{\alpha,\beta} \in \operatorname{End}_1 l_p$, если $\beta \in l_1$. Введем две функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ и $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами:

$$\text{(a)} \quad \lim_{|k|\to\infty} \frac{\ln f(k)}{|k|} = 0, \quad f(k) \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}, \quad f(m+n) \leqslant f(m)f(n),\ m, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{g(k)} < \infty; \quad \lim_{|k|\to\infty} \frac{\ln g(k)}{|k|} = 0;$$

существует такая постоянная $C(g) > 0$, что

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{g(k-j)g(j)} \leqslant \frac{C(g)}{g(k)},\ k \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{|k|\geqslant 2} \frac{g(k)}{g(mk+j)} = 0,\ m \geqslant 1.$$

Такая функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ называется субэкспоненциальным весом.

Из [1, теорема 1] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in l_\infty$ и для последовательности $\beta \in l_\infty$ выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\beta \in l_1$;
(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)| f(k) < \infty$;
(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)| g(k) < \infty$;
(4) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(k)|(1 + |k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;
(5) *для некоторых постоянных* $M = M(A_{\alpha,\beta}) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(A_{\alpha,\beta}) \in (0, 1)$ *выполняется неравенство* $|\beta(k)| \leqslant M\gamma^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Если оператор $A_{\alpha,\beta}$ обратим, то для обратного оператора $B = A_{\alpha,\beta}^{-1}$ также выполнено одно из соответствующих условий:

(1) $B \in \operatorname{End}_1 l_p$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) < \infty$;
(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) f(k) < \infty$;
(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) g(k) < \infty$;

(4) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)(1+|k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q>1$;

(5) $d_B(k) \leqslant M\gamma^{|k|}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Определение 5 (см. [6]). Подалгебра $\mathfrak{B}$ из $\operatorname{End}\mathcal{X}$ с единицей называется наполненной в $\operatorname{End}\mathcal{X}$, если каждый обратимый в $\operatorname{End}\mathcal{X}$ оператор обратим также и вЁ$\mathfrak{B}$.

В частности, $\operatorname{End}_1 l_p$ — наполненная алгебра в $\operatorname{End} l_p$, $1\leqslant p<\infty$.
Из теоремы 1 вытекает следующий факт.

Лемма 8. *Если* $\alpha,\beta\in l_\infty$, *то* $\mathcal{M}$ — *наполненная подалгебра в* $\operatorname{End} l_p$, $1\leqslant p<\infty$.

Приведем еще один результат для $A_{\alpha,\beta}$, доказанный в [1].

Теорема 3 (см. [1]). *Спектр оператора* $A_{\alpha,\beta}$ *при* $\alpha,\beta\in l_\infty$ *не зависит от* $p\in[1,\infty)$.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha,\beta\in l_\infty$. *Тогда* $\sigma(A_{\alpha,\beta})$, *где* $A_{\alpha,\beta}: l_p\to l_p$, $1\leqslant p<\infty$, *задается формулой* (9).

Приведем следующую очевидную лемму.

Лемма 9. *Пусть выполнено одно из двух условий*:

(a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}(|\alpha(n)|^2+|\beta(n)|^2)<1$;

(b) $\|\alpha\|_\infty+\|\beta\|_\infty<1$.

Тогда оператор $I+A_{\alpha,\beta}$ *обратим в* $\operatorname{End} l_2$ *и*

$$(I+A_{\alpha,\beta})^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n(I+A_{\alpha,\beta})^n}{n!}.$$

Далее остановимся на вопросах принадлежности оператора $A_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in l^\infty$, идеалам $\mathfrak{S}_1(l_2)$ и $\mathfrak{S}_2(l_2)$. Напомним, что обычно символом $\mathfrak{S}_2(l_2)\subset\operatorname{End} l_2$ обозначается двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта с (эквивалентной) нормой $\|X\|_2^2=\sum\limits_{i,j\in\mathbb{Z}}|x_{ij}|^2$, где оператор $X\in\mathfrak{S}_2(l_2)$ имеет матрицу $X\sim(x_{ij})$, $i,j\in\mathbb{Z}$, относительно стандартного базиса в l_2 (или любого другого ортонормированного базиса в l_2). Через $\mathfrak{S}_1(l_2)$ обозначен двусторонний идеал ядерных операторов и $\operatorname{End} l_2$ с нормой $\|X\|_1=\operatorname{tr}(X^*X)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}s_n$, где $(s_n, n\in\mathbb{Z})$ — последовательность s-чисел оператора $X\in\mathfrak{S}_1(l_2)$ и $\operatorname{tr}\zeta$ — след оператора ζ. Таким образом, для принадлежности оператора $A_{\alpha,\beta}$ идеалу $\mathfrak{S}_1(l_2)$ требуется вычислить собственные значения оператора

$$A^*_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}=(A_{\overline{\alpha}}+JA_{\overline{\beta}})(A_\alpha+A_\beta J),$$

для чего воспользуемся формулами (4) и леммой 7.

В формулировке следующей теоремы используются последовательности $\delta^+(n),\delta^-(n):\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, определяемые формулой:

$$\delta^\pm(n)=\Bigg(\frac12\Big(\overline{\alpha}(n)\alpha(n)+\overline{\beta}(-n)\beta(-n)+\overline{\alpha}(-n)\alpha(-n)+\overline{\beta}(n)\beta(n)\pm \\ \pm\Big(\big(\overline{\alpha}(n)\alpha(n)+\overline{\beta}(-n)\beta(-n)-\overline{\alpha}(-n)\alpha(-n)-\overline{\beta}(n)\beta(n)\big)^2+ \\ +4\big(\overline{\alpha}(n)\beta(n)+\overline{\beta}(-n)\alpha(-n)\big)\big(\overline{\alpha}(-n)\beta(-n)+\overline{\beta}(n)\alpha(n)\big)\Big)^{1/2}\Bigg), \quad (10)$$

где $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 4. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

(i) *последовательности* α, β *принадлежат* l_2;

(ii) *последовательности* $\delta^+(n)$, $\delta^-(n)$, $n\in\mathbb{N}$, *принадлежат* l_1;

(iii) *последовательности* α, β *принадлежат подпространству* c_0 *сходящихся к нулю последовательностей.*

Тогда

(1) $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_2(l_2)$;
(2) $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$;
(3) *оператор* $A_{\alpha,\beta}$ *компактен.*

Утверждение последнего, третьего пункта теоремы 4, следует из того, что в этом случае оператор $A_{\alpha,\beta}$ является пределом операторов конечного ранга.

Формула (10) в общем случае довольно громоздкая, но ее можно существенно упростить в ряде частных случаев. Соответствующие результаты сформулируем в виде следствий.

Следствие 2. *Если последовательности* $\alpha, \beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *вещественны, то формула* (10) *принимает вид*

$$\delta^{\pm} = \frac{1}{2}\Big(\alpha^2(n) + \beta^2(-n) + \alpha^2(-n) + \beta^2(n) \pm \\ \pm \Big(\big(\alpha^2(n) + \beta^2(-n) - \alpha^2(-n) - \beta^2(n)\big)^2 + \\ + 4\big(\alpha(n)\beta(n) + \beta(-n)\alpha(-n)\big)^2\Big)^{1/2}\Big).$$

Если $\delta^{\pm} \in l_1$, *то* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

Следствие 3. *Пусть последовательности* α, β *вещественны и четны* (*или нечетны*). *Если* $\delta^{\pm} \in l_1$, *где* $\delta^{\pm} = |\alpha(n) \pm \beta(n)|$, *то* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

Следствие 4. *Пусть вещественные последовательности* α, β *таковы, что одна из них четная, а вторая — нечетная и* $(\alpha^2(n) + \beta^2(n))^{1/2} \in l_1$. *Тогда* $A_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{S}_1(l_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 17–26.
2. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1997. — *61*, № 6. — С. 3–26.
3. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О матрицах с суммируемыми диагоналями// 2021. — *194*. — С. 23–37.
4. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 2. — С. 71–85.
5. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 10–29.
6. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972.
7. *Бурлуцкая М. Ш.* Вопросы спектральной теории для операторов с инволюцией и приложения. — Воронеж: Научная книга, 2020.
8. *Бурлуцкая М. Ш.* Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией $\nu(x) = 1 - x$ и их приложения// Изв. вузов. Мат. — 2021. — № 5. — С. 89–97.
9. *Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией// Докл. РАН. — 2007. — *414*, № 4. — С. 443–446.
10. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
11. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одной трехдиагональной бесконечной матрицы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 31–42.
12. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одного разностного оператора с инволюцией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208*. — С. 15–23.
13. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
14. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 35–48.

15. *Пальчиков А. Н.* Спектральный анализ интегральных операторов с ядром, зависящим от разности и суммы аргументов// Изв. вузов. Мат. — 1990. — № 3. — С. 80–83.
16. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией// Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 5. — С. 67–76.
17. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *477*, № 2. — P. 930–960.
18. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 2. — P. 30–39.
19. *Boutet de Monvel A., Zielinski L.* Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Cent. Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 3. — P. 445–463.
20. *Malejki M.* Eigenvalues for some complex infinite matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — *26*, № 5. — P. 1–9.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: `anatbaskakov@yandex.ru`

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: `gala_69@mail.ru`

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: `nat-uskova@mail.ru`